

VALLEJO

MATEMÁTICAS

5/6

R-5947

51/6



814

COMPENDIO  
DE  
MATEMÁTICAS  
PURAS Y MISTAS.

POR  
D. JOSÉ MARIANO VALLEJO.

CUARTA EDICION

CORREGIDA Y AUMENTADA CON CUANTOS ADELANTAMIENTOS  
SE HAN HECHO HASTA EL DIA EN DICHA CIENCIA, Y EN SUS  
IMPORTANTÍSIMAS APLICACIONES.

TOMO I.

*Que contiene la Aritmética, Algebra, Geometria, Trigonometria  
rectilinea é idéa general de la resolucion de los triángulos  
esféricos, y Geometria práctica,*

Y

Un método nuevo, sencillo, general y seguro para encontrar las raices  
reales de las ecuaciones numéricas de todos los grados, aun las que  
se resisten á cuantos medios y recursos ofrecen las Matemáticas,  
*inclusos los que suministra el Cálculo Infinitesimal.*



8-10-8-9

MADRID: NOVIEMBRE 1840.  
IMPRENTA GARRASAYAZÁ, *propia del mismo autor.*  
Calle de Leganitos, núm. 57.

---

Esta obra es propiedad de su autor ; quien perseguirá judicial y criminalmente á los que la reimpriman: pues cuando el autor se ocupa incesantemente en proporcionar aquellas obras que son mas útiles para promover la pública y particular prosperidad, es uno de los mas enormes atentados, el que los especuladores con el sudor y trabajo ageno le usurpen su propiedad, y le priven del fruto de sus fatigas, desvelos y penalidades.

---

# INTRODUCCION.



**S**E llama *cuerpo* todo lo que es capaz de hacer *impresion* en nuestros sentidos. Las impresiones que nos causan los cuerpos, se llaman *sensaciones*. Las sensaciones, consideradas como representando los objetos, se llaman *idéas*; y la facultad, por cuyo medio podemos retener las idéas, se llama *memoria*. Si para dar á conocer el objeto que espresa una idéa, es absolutamente necesario presentarle al sentido á que pertenece, como la *blancura*, *picante*, etc., la idéa es *simple*; y si el objeto se puede hacer conocer sin esta circunstancia, como una *mesa*, *caballo* etc., la idéa se llama *compuesta*. Si la idéa conviene á un solo objeto, como la de *este libro*, se llama *singular* ó *individual*; y es *abstracta* ó *universal*, cuando conviene á muchos, como la idéa de *libro*; de manera, que para formar una idéa universal, ó abstracta, se *observará* *aquello en que convienen muchos objetos*, y se *prescindirá de lo demas*.

La operacion por cuyo medio podemos

prescindir de aquello en que se diferencian varios objetos , se llama *abstraccion*; de manera, que *abstraccion* es una *operacion del alma*, por medio de la cual concebimos como separadas , cosas que realmente no lo están.

Para hacernos cargo de los muchos objetos que se nos presentan, se deben considerar separadamente , lo que se consigue por medio de la *atencion*; así, la *atencion* es una *operacion del alma*, por medio de la cual, de muchos objetos que se nos presentan, elegimos uno para hacernos cargo de él; y practicando lo mismo con todos los demas, se vendrá en conocimiento de todos ellos.

Como casi todos los objetos son compuestos , no basta la *atencion* sola para conocerlos , sinó que es necesario ir considerando cada una de sus partes, y esto se consigue por la *análisis*, que es una *operacion del alma*, por medio de la cual se descompone un todo en sus partes, para ver qué *conexion* ó *dependencia* tienen entre sí y con el todo, y se vuelven á juntar otra vez para que compongan el mismo todo. Por ejemplo , si tuviésemos que hacernos cargo de los muebles que había en una sala, por medio de la *atencion* elegiríamos uno, v. g. un reloj; y por medio de la *análisis* le descompondríamos en las diferentes piezas de

que constaba , para ver qué conexion ó dependencia tenían entre sí y con el total de la máquina; y despues las volveríamos á juntar para formar el reloj. Lo mismo se ejecutaria con todos los demas muebles.

La exactitud de las idéas depende del mayor grado de análisis que se haga de los objetos ; y de aquí resulta otra division de las idéas , que es la contenida en el siguiente ejemplo. Si de muchos sujetos , que han estado en una casa , uno solo se acordase de la calle en que está dicha casa , habrá analizado muy poco , y la idéa , que de ella tiene , se llama *obscura*. Otro , que sabiendo la calle , sólo dudase entre dos ó tres casas , habrá analizado mas , y la idéa , que tiene de la casa , se llama *confusa*. Otro , que entrando en la calle , se fuese derecho á la casa sin preguntar á nadie , habrá analizado mas , y la idéa , que tiene de la casa , se llama *clara*. Y otro , que no solo supiese la casa , sinó que estando léjos , fuese capaz de dar á otro tales señas , que sin preguntar á nadie se fuese derecho á ella , este habrá analizado mas que todos , y la idéa que tiene de la casa se llama *distinta* ó *exacta*. Esta es la idéa que hemos de procurar adquirir en todos nuestros conocimientos.

Si despues de haber examinado dos objetos, v. g. dos relojes, prestamos nuestra atencion á ambos á un mismo tiempo, entónces se dice que los *comparamos*; de manera, que comparacion es *una operacion del alma, por medio de la cual prestamos nuestra atencion á un mismo tiempo á dos objetos*. De la comparacion resultará que el uno será mejor, mayor, etc. que el otro; y este grado de mejoría, mayoría, etc. se llama *relacion*, que *no es mas que el resultado de la comparacion*.

Cuando, al comparar dos idéas, hallamos que convienen, ó no, é interiormente nos convencemos de ello (como cuando me convenzo de que *la nieve es blanca*), formamos lo que se llama *juicio*, que es *una operacion del alma por medio de la cual afirmamos ó negamos una cosa de otra*. Si se espresa el juicio con palabras (como si yo digo á otro *la nieve es blanca*), se llama *proposicion*; de manera, que proposicion es un *juicio espresado por palabras*.

La proposicion consta de tres partes: *sujeto*, que es la cosa de que se habla (v. g. en la anterior *la nieve*); *predicado*, que es lo que se afirma ó niega del sujeto (v. g. *blanca*); y *cópula* el verbo (v. g. *es*), que los une ó separa.

Cuando, por la comparacion de dos idéas, no podemos averiguar su relacion, y para esto las comparamos con otra ú otras, usamos del *raciocinio*, que es una operacion, por medio de la cual se comparan dos idéas con una ó mas intermedias, para averiguar su relacion. Si el raciocinio se espresa por proposiciones, se llama *razonamiento*; y á la triple facultad de adquirir idéas, compararlas y racionar sobre ellas se le llama *entendimiento*.

Las proposiciones pueden ser *evidentes*, *ciertas* y *probables*. Se llaman evidentes ó *axiomas* aquellas cuya verdad se conoce inmediatamente que se pronuncian. Tales son:

1.º *Una cosa es igual á ella misma.*

2.º *Un todo es igual al conjunto de sus partes.*

3.º *Lo que hagamos con el todo, quedará hecho con el conjunto de sus partes; y lo que hagamos con el conjunto de sus partes, quedará hecho con el todo.*

4.º *El todo es mayor que cualquiera de sus partes, ó la parte es menor que el todo.*

5.º *Cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.*

El primer axioma está al alcance de todos, y los demas lo estarán igualmente.

te, si se tiene presente, que cuando una cosa se compone de otras, á la compuesta se le llama *todo*, y á cada una de las componentes se les llama *partes* del mismo todo.

El tercer axioma y el último son de la mayor importancia, pues en ellos se fundan casi todas las demostraciones.

Proposiciones ciertas son aquellas que siempre son verdaderas; mas cuya verdad no se percibe sólo por la consideracion de sus palabras; y es necesario para ello hacer uso del racionio. Las proposiciones ciertas, en las Matemáticas, reciben el nombre de *teoremas*, comprendiendo bajo esta denominacion *aquellas proposiciones que para convencer de su verdad es preciso compararlas con los axiomas, y hacer ver que están comprendidas en ellos; ó de otro modo: teorema es una proposición que necesita demostracion; y demostracion es un razonamiento seguido, en que se hace ver que la proposición enunciada, de tal modo concuerda con los principios mas ciertos y evidentes, que no deja duda de su verdad.*

La demostracion puede ser *directa* ó *á priori*, é *indirecta* ó *á posteriori*, que tambien se llama *ad absurdum*. Es *directa*, cuando partiendo del sujeto de la proposición se manifiesta la verdad que se ha enunciado; é *indirecta*, cuando se hace

*ver que no se puede verificar ninguna otra cosa mas que el enunciado. Este método de demostrar se llama método de exaucion.*

Proposiciones probables son las que unas veces pueden ser *verdaderas* y otras *falsas*.

Segun las cosas que se enuncian en la proposicion, toma esta el nombre de *definicion*, *problema*, *corolario*, *postulado*, *escolio* y *lema*.

*Definicion* es una proposicion en que se da una *idéa clara y distinta de lo que se quiere dar á entender*: como las que hemos dado de la atencion, análisis, etc. La *definicion* debe ser *breve, clara y no contener al definido*.

*Problema* es una proposicion en que se enuncia que por medio de ciertas cosas conocidas debemos averiguar alguna desconocida. Estas proposiciones se conocen en que principian por el infinitivo ó imperativo del verbo. El problema consta de *resolucion* y *demonstracion*; en la *resolucion* se dan las reglas para encontrar lo que se busca; y en la *demonstracion* se hace ver que practicando dichas reglas, se llegará á tener lo que se pedía.

*Corolario* ó *consecuencia* es una proposicion, que se infiere de otra que se acaba de demostrar.

*Postulado* es un axioma enunciado en

*particular*: como cuando se dice en vez de un peso duro se pueden tomar cinco pesetas.

Escolio es una proposicion en que se explica ó advierte alguna cosa.

Lema es una proposicion, que, perteneciendo á otro asunto diferente del que se trata, se enuncia para que sirva de ilustracion ó principio de lo mismo que se va á tratar.

Tambien hay proposiciones *condicionales*; que son aquellas en que su verdad depende de que se verifique alguna otra cosa, que se denomina la *condicion*. Por ejemplo: si suelto este libro (teniéndole en la mano), se cae. La parte en que entra la condicion, que aquí es *si suelto este libro*, se llama *hipótesis*, que quiere decir *suposicion*; y la otra en que está lo que se asegura, que aquí es *se cae*, es lo que se llama *tésis*.

Esto supuesto, se llama *ciencia* el conjunto de todas las proposiciones evidentes y ciertas pertenecientes á un asunto, enlazadas entre sí con cierta dependencia.

Esta dependencia es lo que se llama *método*, que es el *orden* que se sigue en la *adquisicion* (ó *esposicion*) de nuestros conocimientos. La circunstancia esencial del método es que se proceda siempre de lo conocido á lo desconocido; si se nos dan conocidas las partes, y por ellas hemos de ve-

nir en conocimiento del todo, el método se llama *sintético* ó *de composicion*; y si, conocido el todo, hemos de conocer sus partes, el método se llama *analítico* ó *de descomposicion*.

Si observamos un cuerpo cualquiera, v. g. un libro, le hallaremos dotado de muchas propiedades, como son: ocupar un espacio cualquiera, que se llama *estension*; no poder ocupar otro cuerpo el mismo espacio que él á un mismo tiempo, que se llama *impenetrabilidad*; serle indiferente el moverse ó estarse quieto, que se llama *inerencia*; poder ser trasladado de una parte á otra, que se llama *movilidad*; poder permanecer siempre en un mismo sitio, que se llama *quiescibilidad*; dirigirse hácia la tierra inmediatamente que le falta el apoyo que le sostiene, que se llama *gravedad*; el estar terminado de esta ó de la otra manera, que es lo que constituye su *forma* ó su *figura*, y se llama *figurabilidad*, etc. etc.; y tambien la de poder ser mayor ó menor, que se llama *cantidad*; de manera, que cantidad es *todo lo que puede aumentar ó disminuir*.

La cantidad se divide en *discreta* y *continua*; discreta es *aquella cuyas partes no tienen ninguna trabazon ni enlace*, como un monton de pesos duros; y continua es *aquella cuyas partes están unidas entre sí*; como

las partes de plata que componen un duro. La cantidad forma el objeto de las *Matemáticas*; de manera, que entendemos por *Matemáticas* las ciencias que tratan de averiguar las *relaciones y propiedades de la cantidad*. Como esta sólo es susceptible de aumento ó disminucion, las *Matemáticas* solo podrán *espresar, componer y descomponer las cantidades*; y cuando se ejecuta cualquiera de estas operaciones, se dice que se *calcula*.

Las *Matemáticas* se dividen en *puras y mistas*; se llaman *puras* las que tratan de la cantidad con la mayor abstraccion; y *mistas* son las que consideran la cantidad en alguna de las propiedades de los cuerpos. Los ramos de las *Matemáticas puras* se pueden reducir á dos: uno trata de la cantidad discreta, que se llama *Aritmética universal*, que se divide en *Aritmética propiamente dicha* y en *Algebra*; y otro que trata de la cantidad continua ó de la estension, que se llama *Geometría*. Pero, en general, se considera que son tres, á saber: *Aritmética, Algebra y Geometría*. La *Aritmética* trata de la cantidad espresada por números; el *Algebra* trata de la cantidad en su acepcion mas general, y espresada por letras; y la *Geometría* considera la cantidad como una estension continua y figurada. Los tratados de las *Matemáti-*

cas mistas son tantos como propiedades tienen los cuerpos; y aun una misma propiedad da origen á diferentes tratados. Por ejemplo: el movimiento, considerado en los cuerpos terrestres sólidos, da origen á la *Dinámica*; considerado en los líquidos, origina la *Hidrodinámica* ó *Hidráulica*; considerado en los cuerpos celestes, origina la *Astronomía*, etc. etc. etc.

Estas nociones estudiadas con buen método, son suficientes para poder comprender todos los conocimientos que vamos á esponer.



### NOMBRE, FIGURA Y VALOR

DE ALGUNAS LETRAS GRIEGAS, DE QUE HARÉMOS USO EN ADELANTE.



<u>Nombre.</u>	<u>Figura.</u>	<u>Valor.</u>
Alfa	$\alpha$	<i>a</i>
Beta	$\epsilon$ , ó $\beta$	<i>b</i>
Gama	$\gamma$ , $\Gamma$	<i>g</i>
Delta	mayúscula $\Delta$	<i>D</i>
	minúscula $\delta$	<i>d</i>
Epsilon	$\epsilon$	<i>e</i> breve
Tzeta	$\theta$	<i>t z</i>
Lambda	$\lambda$	<i>l</i>
Pi	$\pi$ , $\Pi$	<i>p, P</i>
Sigma	$\Sigma$	<i>S</i>
Fi	$\phi$	<i>f</i>
Psi	$\Psi$	<i>ps</i>

## ADVERTENCIA.

---

Un número dentro de un paréntesis denota que la operación ó proposición en que se funda la que se está efectuando, se halla en el párrafo que dice dicho número; además, se pondrá la señal § cuando las citas estén entre cálculos.

Si alguno desease mas estension sobre cualquier punto de los contenidos en este Compendio, podrá consultar el *Tratado Elemental* en el parage correspondiente.

2

# ARITMETICA.

---

*Nociones preliminares, numeracion, division y subdivision de  
las unidades de pesas y medidas,*

\*\*\*\*\*

**S**E llama *unidad* cualquier cantidad, que se elije ó toma para que sirva de término de comparacion ó medida respecto de todas las de su especie. V. g. en una cantidad de dinero espresada en *reales*, sirve el real de unidad; espresada en *duros* sirve el duro, etc.

El agregado, reunion ó conjunto de unidades de una misma especie forma lo que se llama *número*. Ó de otro modo: cuando comparamos una cantidad de dinero con un duro (ó real etc.) con el fin de averiguar los duros (ó reales, etc.) que hay, el resultado de esta comparacion se llama *número*. Así, cuando despues de haberlos contado, decimos que hay *tantos* duros (ó reales), la palabra con que espresamos el *tantos* es el número.

Y se llama Aritmética la *ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad espresada por números*.

2 La Aritmética solo puede hacer con los números las operaciones de *espresarlos, componerlos y descomponerlos*. La parte que trata de espresar los números, se llama *numeracion*. Esta puede ser *hablada*, y puede ser *escrita*; la numeracion hablada consiste en *espresar con palabras las diferentes colecciones de unidades*.

3 Para darla á conocer, observaremos que cualquier objeto que nos presenta la naturaleza, es en sí lo que ha-

mamos *uno*; esto supuesto, el agregado de uno y uno se espresa con la palabra *dos*, y por lo mismo *dos* equivale á *uno y uno*; para espresar el conjunto de dos y uno se usa de la palabra *tres*; tres y uno se espresa con la palabra *cuatro*; cuatro y uno con la palabra *cinco*; cinco y uno con la palabra *seis*; seis y uno con la palabra *siete*; siete y uno con la palabra *ocho*; ocho y uno con la palabra *nueve*; nueve y uno con la palabra *diez*.

4 Ahora se toma esta coleccion de diez unidades por una nueva unidad, que se llama *unidad de decena*, y se continúa contando por decenas y unidades, diciendo: *diez y uno*, *diez y dos* etc.; mas por una irregularidad del lenguaje, en vez de *diez y uno* se dice *once*; en vez de *diez y dos* se dice *doce*; en vez de *diez y tres* se dice *trece*; y en vez de *diez y cuatro* se dice *catorce*; en vez de *diez y cinco* se dice *quince*; y despues se continúa regularmente *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho*, *diez y nueve*; y para espresar *dos dieces ó decenas* se usa de la palabra *veinte*, y se continúa diciendo: *veintiuno*, *veintidos*, *veintitres*,..... *veintinueve*; y para espresar *tres dieces ó decenas* se usa de la palabra *treinta*, y se continúa diciendo: *treinta y uno*, *treinta y dos*.... *treinta y nueve*; y para espresar *cuatro dieces ó decenas* (y en general cualquier coleccion de decenas) se modifica la palabra *cuatro* (ó cinco, seis &c.) que las espresa, con la terminacion *enta*, y se dice *cuarenta*; despues se continúa: *cuarenta y uno*, *cuarenta y dos*,..... *cuarenta y nueve*; *cincuenta*, *cincuenta y uno*,..... *cincuenta y nueve*; *sesenta*, *sesenta y uno*,..... *sesenta y nueve*; *setenta*, *setenta y uno*,..... *setenta y nueve*; *ochenta*, *ochenta y uno*,..... *ochenta y nueve*; *noventa*, *noventa y uno*,..... *noventa y nueve*; *diez dieces ó decenas*, que se espresan con la palabra *ciento*.

5 Esta coleccion de diez decenas se toma por una nueva unidad, que se llama *centena*, y se continúa contando por centenas, decenas y unidades, diciendo: *ciento*, *ciento y uno*,..... *ciento y diez*,..... *ciento cincuenta y seis*,..... *doscientos*,... *doscientos ochenta y cuatro*,..... *trescientos*,... *cuatrocientos*,..... *quinientos*,..... *seiscientos*,..... *setecientos*,..... *ochocientos*,..... *novecientos*,..... *novecientos noventa y nueve*. Añadiendo *uno*, tendrémos *diez cientos*, que se

espresan con la palabra *mil*; se toma por una nueva unidad, que se llama *millar*, y se continúa contando por millares, centenas, decenas y unidades, hasta tener un *millar de millares*, que se llama *millon*; este se vuelve á tomar por unidad, y se continúa contando por millones, centenas de millar, decenas de millar, millares, centenas, decenas y unidades, hasta tener un *millon de millones*, que se llama *billon*. Despues se continúa contando hasta un *millon de billones*, que se llama *trillon*; y así sucesivamente *cuadrillon*, *quillon*, *sestillon*, etc. etc.; de modo que solo con las trece palabras *uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, ciento, mil y millon*, modificadas, se pueden espresar todos los números de que puede necesitar el hombre.

6 La numeracion escrita consiste en espresar todos estos números con pocos signos, que se llaman *cifras, guarismos ó caractéres*. La que nosotros vamos á esplicar, y que está generalmente adoptada, consta de los diez guarismos siguientes:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0;  
*uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, cero;*

y cada uno espresa la palabra que tiene debajo; advirtiéndole que el carácter 0 significa la idéa que tenemos de la *nada*, y solo sirve para ocupar en los números el lugar en donde falta alguna especie de unidades.

7 Para espresar con estos diez guarismos todos los números posibles, se considerará cada uno de ellos con dos valores: uno *absoluto*, que es el que le acabamos de fijar; y otro, *relativo al lugar que ocupa contando de derecha á izquierda*; por el cual resulta que, *un guarismo cualquiera, colocado á la izquierda de otro, espresa unidades del orden inmediatamente superior á este*. Así, el guarismo 4 v. g. siempre espresará cuatro cosas; pero si está en el primer lugar de derecha á izquierda, serán cuatro unidades; si está en el segundo, cuatro decenas, etc.

8 En general, *el primer lugar, contando de derecha á izquierda, está destinado para las unidades; el segun-*

do para las decenas, el tercero para las centenas; el cuarto para los millares; el quinto para las decenas de millar; el sexto para las centenas de millar; el séptimo para los millones; el octavo para las decenas de millon; el noveno para las centenas de millon; el décimo para los millares de millon; el undécimo para las decenas de millar de millon; el duodécimo para las centenas de millar de millon; el décimotercero para los billones; el décimocuarto para las decenas de billon; el décimoquinto para las centenas de billon, el décimosesto para los millares de billon; el décimoséptimo para las decenas de millar de billon; el décimooctavo para las centenas de millar de billon; el décimono nono para los trillones; y así sucesivamente; el vigésimoquinto para los cuadrillones..... el trigésimo primo para los quillones; etc.

9 Esto supuesto, para escribir los números, se seguirán las reglas de una rigorosa traduccion; esto es, se colocarán sucesivamente los guarismos que espresen el número de unidades de cada orden, los unos al lado de los otros, principiando por la izquierda, teniendo bien presente la sucesion de estos órdenes para no omitir ninguno, y ocupando con ceros los lugares de los órdenes de unidades que puedán faltar.

10 La razon de empezar á escribir por la izquierda, es que la unidad de especie superior es la que está mas á la izquierda, y cuando enunciamos un número, principiámos por la especie superior.

11 Así, si quiero escribir el número *cincuenta y siete mil, seiscientos y tres*; lo primero escribiré la palabra *cincuenta*, que equivale (4) á cinco decenas; por consiguiente, pondré en primer lugar un 5, que para que sean decenas debe seguir (8) á su derecha otro guarismo, el cual ha de ser el que espresen las unidades; y como despues de cincuenta sigue la palabra *siete*, infiero que despues del 5 debo poner un 7 y tendré 57, con lo que están escritas las palabras *cincuenta y siete*. Ahora sigue la palabra *mil*, lo que me indica que para que el 57 espresen millares, faltan aun tres cifras (8); y como la primera que debe seguir es la que espresen las centenas, y en el número dice *seiscientos*, escribiré el guarismo 6 para

espresarlas, y tendré 576. Despues debe seguir el guarismo que espresa las decenas; y como el número dado no las tiene (pues no hay en él las palabras *diez*, *veinte*, *treinta*,.... *noventa*, que las espresan), pondré 0 y tendré 5760. Aun faltan las unidades; y como en el número propuesto dice *tres*, escribiré el guarismo 3 despues del 0 y tendré 57603, que espresa el número que se quería.

12 Con la misma facilidad se escribirá cualquier otro número, aunque sea mas complicado. V. g. si quiero escribir el número *ocho mil quinientos sesenta y tres millones, doscientos cuarenta y seis mil*; lo primero escribiré por lo dicho ántes 8563, con lo que tendré escritas las palabras *ocho mil quinientos sesenta y tres*. Como despues sigue la palabra *millones*, me da á conocer que faltan aun seis cifras (8), y la primera que debe seguir es la que espresa las centenas de millar; y como el número dice (ántes de la palabra *mil*) *doscientos*, el primer guarismo que debo poner es el 2, y tendré 85632. Ahora han de seguir las decenas de millar; y como dice *cuarenta*, tendré que poner el 4 y me resultará 856324. Despues siguen los millares; y como dice *seis*, pondré el guarismo 6 y tendré 8563246. Despues deberán seguir las centenas, decenas y unidades que haya en el número propuesto; y como despues de las palabras *seis mil* no sigue nada, pondré tres ceros y tendré 8563246000, que espresa el número dado. He aquí varios ejemplos para que se ejerciten los principiantes.

- 1.º El número *trescientos cuarenta* se escribe 340.
- 2.º El número *siete mil cincuenta y ocho* se escribe 7058.
- 3.º El número *noventa mil seiscientos diez* se escribe 90610.
- 4.º *Doce millones, treinta y ocho mil seiscientos cuatro* se escribe 12038704.
- 5.º *Quinientos tres mil millones y noventa* se escribe 503000000090.

13 Para leer un número cuando está escrito, se observará el lugar que ocupa cada guarismo y la especie de unidades que espresa, y se pronuncia la palabra correspondiente á cada uno. Esto es fácil, si el número tiene pocos guarismos; pero si es complicado se divide en porciones de seis guarismos empezando por la derecha; en la

primera separacion, se pone un 1, bien sea por la parte de arriba ó bien por la de abajo; en la segunda un 2; en la tercera un 3, etc.; despues se divide cada porcion de seis guarismos en dos de tres con una coma; y se empieza leyendo por la izquierda, pronunciando mil donde se encuentre una coma, y donde se halle un 1, un 2, un 3, etc. millon, billon, trillon, etc.; y luego al fin se pronuncia unidades. Ejecutando esto con el número

tendré  $4683^{21}572^{05}700^{21}543^{00}807$   
 $468,321_3 572,057_2 002,154_1 300,807$

que se lee: *cuatrocientos sesenta y ocho mil, trescientos veintiun trillones, quinientos setenta y dos mil cincuenta y siete billones, dos mil ciento cincuenta y cuatro millones, trescientas mil ochocientas y siete unidades.*

14 Ahora, si á un número cualquiera se le pone un cero á la derecha, se le hace diez veces mayor; porque su último guarismo, que ántes espresaba unidades, ahora espresa decenas; las decenas, centenas, etc. del primitivo, se habrán hecho tambien diez veces mayores; luego habiéndose hecho cada parte diez veces mayor, lo habrá quedado el todo (intr. ax. 3.º). Del mismo modo se demostraría que añadiendo dos ceros, se hace el número cien veces mayor, etc.

15 En los pesos y medidas españolas se observa la ley siguiente.

Las medidas de longitud se refieren al *pie*; este se divide en 16 *dedos*, y el dedo en *mitad*, *cuarta*, *ochava*, y *diez y seisav aparte*; tambien se divide en 12 *pulgadas*, y la pulgada en 12 *lineas*.

La *vara* se compone de tres pies, y la *legua* de 20000 pies.

16 La primera de las medidas agrarias es el *estadal cuadrado*, que es un cuadro de 4 varas, ó 12 pies de largo y otro tanto de ancho. Despues sigue la *aranzada*, que se compone de 20 estadales en cuadro; y luego la *fanega de tierra*, que se compone de 24 estadales en cuadro ó de 576 estadales cuadrados. La fanega de tierra se divide en 12 *celemines*, y el celemin en 4 *cuartillos*.

17 Para los granos, la sal (\*) y demas cosas secas, la unidad

(\*) En el artículo 12 del Rael Decreto de 5 de agosto del año de 1854 se previene que 'se venderá la sal por peso en vez de la medida que en el día se usa.'

de especie superior es el *cahiz*, que se compone de 12 *fanegas*, y la fanega de 12 *celemines*; tambien se divide la fanega en 2 *medias fanegas* y en 4 *cuartillas*.

18 Para los líquidos, excepto el aceite, se usa de la *cántara* ó *arroba*, que se divide en 2 *medias cántaras*; la media cántara en 2 *cuartillas*; la cuartilla en 2 *azumbres*; la azumbre en 2 *medias azumbres*; la media azumbre en 2 *cuartillos*; el cuartillo en 2 *medios cuartillos*; el medio cuartillo en 2 *copas*; de modo que la cántara tiene 32 cuartillos. El *moyo* se compone de 16 cántaras.

Esceptuamos el aceite. porque sus medidas están arregladas al peso; y así se usa de la *arroba*, *media arroba*, *cuartilla* ó *cuarto de arroba*, *libra*, *media libra*, *cuarteron* ó *panilla*, y de la *media panilla*.

19 Para las cosas que se venden al peso, la unidad de especie superior es el *quintal*, que se compone de 4 *arrobas*; la arroba de 25 *libras*; la libra de 16 *onzas*; la onza de 16 *adarmes*; el adarme de 3 *tomines*, y el tomin de 12 *granos*. La libra se divide en 2 *medias libras*, en 4 *cuarterones* y en 8 *medios cuarterones*; la onza en 2 *medias onzas*, en 4 *cuartas* y en 8 *ochavas* ó *dracmas*; la libra se divide tambien en 2 *marcos*, y el marco en 8 *onzas*.

20 En la moneda la unidad de especie superior es el *doblon*, que se compone de 4 *pesos*; el peso de 15 *reales*, y el real de 34 *maravedises*. De todas estas unidades no hay monedas: el doblon, el peso y el ducado, que vale 11 reales, son monedas imaginarias; porque no hay en la actualidad ninguna pieza que la represente, y solo sirve en los tratos de comercio.

De las demas, sí hay monedas y de mayor valor. Las monedas se hacen de oro, de plata y de cobre; la mayor de oro es el *doblon de á ocho*, que es una onza de oro, y vale 8 *escudos de oro*, ó 320 reales; despues sigue el *doblon de á cuatro escudos de oro*, que es media onza de oro y vale 160 reales; luego sigue el *doblon de oro*, que vale dos escudos de oro, ú 80 reales, ó 4 duros; despues sigue el *escudo de oro*, que vale 40 reales, y el *medio escudo*, *escudito*, ó *veinten*, que vale 20 reales. La mayor de plata es el *peso duro*, que es una onza de plata y vale 20 reales; el *medio duro*, que vale 10 reales; la *peseta columnaria* ó *mejicana*, que vale 5 reales; la *media peseta columnaria* ó *real de plata mejicano*, que vale dos reales y medio; y el *real columnario*, que vale diez cuartos y medio. Tambien hay otra peseta que es la *ordinaria* ó *provincial*, y vale 4 reales; la *media peseta* ó *real de plata provincial* 2 reales; y el *real sencillo* ó de *vellon* equivale á ocho cuartos y medio de la moneda de cobre. La moneda mayor de cobre en la actualidad va-

le dos cuartos ú ocho maravedises; la que sigue un cuarto, que vale 4 maravedises; y la otra un ochavo, que vale 2 maravedises; el maravedí, aunque hay moneda que le representa, no corre en el comercio regularmente.

21 En el tiempo se observa la siguiente división: el *siglo* se compone de 100 *años*; el año de 12 *meses*, ó de 365 *días* y algo mas; el mes de 28, 30, ó 31 *días*; el día de 24 *horas*; la hora de 60 *minutos*; el minuto de 60 *segundos*, etc.

22 Los números se dividen en *abstractos* y *concretos*; se llaman abstractos los que no *determinan la especie de unidades*, como *cinco*, *veinte*, y todos los que hemos considerado hasta el fin del párrafo 14; y concretos son los que la *determinan*, como *cinco hombres*, *seis manzanas*, etc.

Los números concretos, comparados entre sí, pueden ser *homogéneos* y *heterogéneos*; se llaman homogéneos los que *espresan unidades de una misma especie*, como 5 hombres, 60 hombres, etc.; y heterogéneos los que *se refieren á diferentes unidades*, como 20 hombres, 80 manzanas, etc.

El número se llama *simple* ó *dígito*, cuando se escribe con un solo guarismo; y *compuesto*, cuando se escribe con mas de un guarismo.

La definición que hemos dado (§ 1) de lo que se entiende por *número*, comprende solo el caso particular en que se compone de un conjunto exacto de unidades, que es á lo que se llama *número entero*; mas ahora podemos ya dar una definición exacta y general de lo que se entiende por *número*, sin faltar al orden ideológico que nos hemos propuesto seguir, de no usar de palabras, cuyo sentido se ignore. Y por lo mismo, diremos que *número es el resultado de la comparacion de una cantidad cualquiera con la unidad, ó es la relacion de una cantidad con la unidad*, que fué la definición que dió Neuton.

Si la cantidad que se compara es igual ó mayor que la *unidad*, y equivale exactamente á un conjunto, reunion ó agregado de unidades, resulta el *número entero* denominacion que corresponde á todos los que hemos considerado hasta ahora.

Si la cantidad que se compara es menor que la *unidad* ó *cantidad con que se compara*, el resultado de la

comparacion, ó el número que resulta, no puede llegar á equivaler toda la unidad, y espresará solo *parte ó partes de ella*; y en este caso el número se llama *quebrado ó fraccion*.

Si la cantidad que se compara equivale á una unidad ó á un conjunto de unidades, y algo mas, que no llegue á ser otra unidad, entónces recibe el nombre de *número misto*, pues se compone de entero y de quebrado.

Si el resultado de la comparacion es que equivale á parte ó partes de una unidad, y esta unidad es parte ó partes de otra unidad diferente, entónces recibe el nombre de *quebrado de quebrado*.

Finalmente, cuando un número, que no es propiamente quebrado, se enuncia á manera de quebrado ó de fraccion, entónces se llama *número fraccionario*.

Para aclarar estas idéas, supongamos que en un monton se tengan *diez moneditas de plata*, de las que representan *un real*. Si para espresar la cantidad de dinero, que hay en dicho monton, la comparamos con un *real*, esto es, con una de las espresadas moneditas, el resultado de la comparacion de todos los *reales* que hay en el monton, es que hay *diez*; y este número se llama *número entero*, porque se compone de un conjunto exacto de unidades. Si el dinero que hay en dicho monton, lo comparamos con el valor de un *peso duro*, como este vale veinte reales, y veinte reales equivalen á dos veces diez reales, los diez reales vienen á ser la mitad de los veinte reales que hay en el peso duro; y entónces los diez reales equivalen á la *mitad del peso duro* ó á *medio duro*: y el número *mitad del duro* ó *medio duro* es el que se caracteriza con el nombre de *quebrado*. Si la cantidad de diez reales, que hay en el monton, la comparamos con la pieza de plata, que se conoce con el nombre de *resellado*, verémos que el resultado de la comparacion es que los *diez reales* de aquel monton equivalen á una vez la espresada pieza que se caracteriza con el mencionado nombre de *resellado*; ó lo que es lo mismo equivalen á un *resellado*; y en este caso, dicha cantidad está espresada tambien por un *número entero*, pues equi-

vale exactamente á *una vez* la unidad elegida por término de comparacion.

Si el mismo conjunto de *diez reales* lo comparamos con una peseta columnaria, que equivale á *cinco reales*, como diez reales equivalen á dos veces cinco reales, quiere decir que *diez reales equivalen á dos pesetas columnarias*; y en este caso, el mismo conjunto de *diez reales* viene espresado por un número que tambien es entero, pues equivale exactamente á *dos unidades* ó á *dos veces la unidad*, que aquí es la peseta columnaria.

Si comparamos la misma cantidad de dinero ó conjunto de *diez reales*, con una peseta de las que hemos llamado *ordinaria* ó *provincial*, observaremos que teniendo esta peseta *cuatro reales*; dos pesetas tendrán *ocho reales*; y *tres pesetas* tendrán *doce reales*; y como *diez reales* se hallan entre *ocho reales* y *doce reales*, resulta que el conjunto de *diez reales* se halla entre *dos pesetas* y *tres pesetas*; luego equivaldrá á *dos pesetas* y *algo mas*. Para formarnos idéa de lo que en *diez reales* hay mas de dos pesetas, observaremos que como dos pesetas equivalen á *ocho reales*, en *diez reales*, ademas de las dos pesetas, hay *dos reales*; y para valorar ó valuar estos *dos reales* en la unidad que ahora hemos elegido, que es la peseta, debemos considerar, que teniendo la peseta *cuatro reales*, los citados *dos reales* equivalen á la mitad de los cuatro reales, que vale la peseta; luego los *dos reales* es lo mismo que decir *media peseta*; y resulta que el conjunto de *diez reales*, cuando se toma por unidad la peseta ordinaria ó provincial, equivale á *dos pesetas* y á *la mitad de otra peseta*, ó á *dos pesetas y media*: y en este caso, tenemos espresado el conjunto de *diez reales* por un número misto, á saber: *dos y media pesetas*.

Comparando el mismo conjunto de *diez reales* con el peso duro, tomado por unidad, hemos manifestado que *diez reales* equivalen á *la mitad del peso duro*; y si queremos referir este valor á otra unidad, por ejemplo, al *doblon de oro*, no tenemos mas que observar, que teniendo (§ 20) el *doblon de oro* cuatro duros, *un duro es la cuarta parte* ó *el cuarto de un doblon de oro*, y entón-

ces los diez reales equivalen á la *mitad de un cuarto del doblon de oro*; y esta *mitad de un cuarto ó el medio de un cuarto* es lo que se llama *quebrado de quebrado*.

Por otra parte, si para valuar los diez reales, que hay en el mismo monton, eligiéramos la *media peseta ordinaria ó provincial*, hallaríamos que los diez reales equivalían á *cinco medias pesetas ó á cinco medios*, sobrentendiéndose que la unidad es la peseta; en cuyo caso, se tiene un número, que se enuncia como si fuese un quebrado, no siéndolo; y como al quebrado se le suele tambien llamar *fraccion*, á estos números en que, contando por partes de la unidad, se llega á tener una unidad ó mas de una unidad, se caracterizan con el nombre de *fraccionarios*; porque se enuncian á manera de fraccion ó quebrado, sin serlo; pues un número fraccionario ó equivale á un número entero ó á un número misto. En el ejemplo presente las *cinco medias pesetas ó cinco medios* de peseta equivalen á *dos pesetas y media*. Y si en el monton hubiese únicamente *ocho reales*, y quisiéramos espresarlos, eligiendo por unidad la *media peseta*, encontraríamos que los *ocho reales* equivalían á *cuatro medias pesetas ó cuatro medios* de peseta, que equivalen á *dos pesetas justas*, número entero.

De todo esto resulta, que el número, con relacion á la unidad á que se refiere, puede ser *entero, quebrado, misto, quebrado de quebrado y fraccionario*. Es *entero* cuando se compone exactamente de unidades; es *quebrado* cuando solo consta de parte ó partes de la unidad; es *misto* cuando consta de entero y quebrado, ó se compone de unidades y parte ó partes de la unidad; es *quebrado de quebrado* cuando se compone de partes de partes de la unidad; y finalmente es *fraccionario*, cuando, contando por partes de la unidad, se llega á tener una unidad ó mas de una unidad: resultando que una misma cantidad, cual es aquí el monton de *diez reales*, se puede espresar en cada una de estas especies de número, segun la unidad que se elija.

Es sumamente importante percibir clara y distinta-

mente la idea que está fija á cada especie de número; porque sirviendo de base estas nociones á cuanto hemos de manifestar en lo sucesivo, no se hallarán las dificultades que de otro modo se encuentran (\*).

*De la operacion de sumar ó de la adición.*

---

23 Aunque es verdad que, dado un número, solo se le podrá hacer mayor ó menor, los diferentes modos, que hay de aumentar ó disminuir los números, conducen á seis operaciones, que son: *sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar á potencias y extraer raíces.*

Sumar es *reunir en un solo número el valor de dos ó mas homogéneos*; la operacion, por cuyo medio se ejecuta esto, se llama *adición*; los números que se dan para sumar, *sumandos*; y lo que resulta de la operacion, *suma*. Los sumandos han de ser homogéneos, porque un número de hombres, por ejemplo, no puede aumentar uno de caballos, etc.

Se indica esta operacion poniendo entre los sumandos este signo  $+$ , que se lee *mas*. Así, la expresion  $5+3$  se lee: *cinco mas tres*; y para indicar que, despues de hecha esta suma, resulta 8, se pone el signo  $=$ , que se lee *igual*; de manera que la expresion  $5+3=8$ , se lee: *cinco mas tres igual ocho*.

24 Para poder sumar, es necesario saber perfectamente lo que componen juntos de dos en dos, los números díjitos, cuyas sumas son las contenidas en la siguiente

---

(\*) Si para dar todas estas ideas, se hiciese todo sensible, presentando al mismo tiempo los realitos, pesetas, resellado y duros, y se acostumbrase á los principiantes á que ellos mismos hiciesen la esplicacion, valiéndose de las espresadas monedas, se lograrían ventajas de mucha consideracion.

Tabla para sumar.

1 y 1 son 2.	2 y 2 son 4.	3 y 3 son 6.
1 y 2.... 3.	2 y 3.... 5.	3 y 4.... 7.
1 y 3.... 4.	2 y 4.... 6.	3 y 5.... 8.
1 y 4.... 5.	2 y 5.... 7.	3 y 6.... 9.
1 y 5.... 6.	2 y 6.... 8.	3 y 7.... 10.
1 y 6.... 7.	2 y 7.... 9.	3 y 8.... 11.
1 y 7.... 8.	2 y 8.... 10.	3 y 9.... 12.
1 y 8.... 9.	2 y 9.... 11.	
1 y 9.... 10.		
4 y 4 son 8.	5 y 5 son 10.	6 y 6 son 12.
4 y 5.... 9.	5 y 6.... 11.	6 y 7.... 13.
4 y 6.... 10.	5 y 7.... 12.	6 y 8.... 14.
4 y 7.... 11.	5 y 8.... 13.	6 y 9.... 15.
4 y 8.... 12.	5 y 9.... 14.	
4 y 9.... 13.		
7 y 7 son 14.	8 y 8 son 16.	
7 y 8.... 15.	8 y 9.... 17.	
7 y 9.... 16.	9 y 9 son 18.	

25 Aprendida la tabla, se saben sumar de memoria todos los números dígitos; y para sumar un número compuesto con un dígito, *se añadirá el dígito á las unidades del compuesto, y se pronunciará el todo*; si de la suma del dígito con las unidades del compuesto resulta alguna decena, *se pronuncia en la suma la decena inmediatamente mayor á la que lleve el compuesto*. V. g. 25 y 4 (diciendo 5 y 4 son 9) son 29; 27 y 8 (diciendo 7 y 8 son 15) son 35, etc.

26 Entendido esto, para sumar toda clase de números enteros resolverémos el siguiente

Problema. Sumar números enteros.

Resolucion. Colóquense todos los sumandos, los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas etc.; tírese despues una raya; empíese á sumar por la columna de las unidades, y súmense todas las de los sumandos: esta suma se compondrá ó de unidades solas, ó de decenas solas, ó de decenas y unidades; si se compone solo de uni-

*dades, se pone debajo de la raya el guarismo que las expresa, de modo que se corresponda con las unidades de los sumandos; si se compone solo de decenas, se pondrá o debajo de las unidades de los sumandos, y las decenas se guardarán para sumarlas con las de la columna siguiente; si hay decenas y unidades, se colocan las unidades debajo de las unidades, y se guardan las decenas para sumarlas con las de la columna inmediata. Despues se suma la columna de las decenas, teniendo cuidado de sumar con el primer guarismo las que resultaron de la suma de las unidades: esta suma de decenas se compondrá ó de decenas solamente, ó solo de centenas, ó de centenas y decenas; si solo contiene decenas, se pone debajo de la columna de las decenas el guarismo que las expresa; si tiene solamente centenas, se pone o debajo de las decenas, y se guardan las centenas que resulten para sumarlas con las de los sumandos; si contiene centenas y decenas, se colocan las decenas debajo de las decenas, y las centenas se guardan para sumarlas con las de la columna de la izquierda. Luego, se pasa á sumar las centenas, teniendo cuidado de añadir al primer guarismo las que se llevaban de la suma de las decenas; y si en la suma de las centenas hay millares, se guardan para sumarlos con los de la columna inmediata; y así se continúa hasta llegar á la última columna de la izquierda, de cuya suma si resulta alguna ó algunas unidades de especie superior, se ponen á la izquierda del guarismo últimamente puesto; y el número que resulta debajo de la raya es la suma pedida.*

*Ejemplo.* Si quiero sumar los números 3572, 696, 57 y 709; los pondré los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, etc. tiraré despues una raya en esta forma:

Empiezo á sumar por las unidades, y digo: 2	3572
unidades y 6 son 8, y 7 son 15, y 9 son 24; en	696
24, que son unidades, hay 2 decenas y 4 unidades;	57
coloco las 4 unidades debajo de la columna de las	709
unidades, y guardo las 2 decenas para sumarlas con	_____
las de la columna siguiente, en que digo: 7 decenas,	5034
y 2 que llevaba de la suma de las unidades, son 9 de-	
cenas, y 9 son 18, y 5 son 23, y 0 son 23; en 23, que son decenas,	
hay tres decenas y 2 centenas; por lo cual pongo un 3 debajo de	

las decenas, y guardo las 2 centenas para sumarlas con las de la columna inmediata, diciendo: 5 centenas, y 2 que llevaba, son 7 centenas, y 6 son 13, y 7 son 20; en 20, que son centenas, hay 2 millares justos y ninguna centena; por lo que pongo 0 debajo de las centenas, y guardo los 2 millares para la columna inmediata, en que digo: 3 y 2 que llevaba son 5, que pongo debajo de los millares; y como ya no hay mas guarismos, digo que la suma de los números propuestos es *cinco mil treinta y cuatro*.

*Escolio.* Al sumar cada columna no se necesita ir repitiendo si son unidades, decenas, etc.; pues como por el sistema de numeracion cada diez unidades componen una de especie superior, se suman los guarismos de cada columna como si solo espresasen unidades, y despues de colocar debajo de la columna que se suma, las unidades sencillas que resulten, se llevan para la columna inmediata tantas unidades como decenas resultaron en la suma de la columna anterior.

27. Como el problema consta (introd..) de resolucion y demostracion, y hasta ahora solo hemos dado la resolucion, nos falta la segunda parte, que es la

*Demostracion.* La colocacion de los sumandos es por comodidad; el tirar la raya es por claridad, esto es, para que no se confunda la suma con los sumandos; todo lo demas está reducido á que en el número de debajo de la raya están las sumas de todas las unidades, decenas, centena, etc., esto es, de todas las partes de los sumandos; y como lo que se hace con las partes (intr. ax. 3.<sup>o</sup>) queda hecho con el todo, se infiere que el número que está debajo de la raya es la suma de todos los sumandos, *que era lo que debía hacer y demostrar*, que se espresa: L. Q. D. H. y D.

*Esc.* Si fuesen muchos los sumandos, se podrían hacer varias sumas de á seis, ocho, diez ó mas sumandos cada una, y luego se sumarían estas sumas; pero es mejor acostumbrarse á hacer siempre la operacion de una vez, como se ve en los siguientes ejemplos.

1.º	3.º	4.º	5.º
4723	49673	45638	35286
87412	35486	7946	5732
7029	359864	369204	93468
379408	68397	70803	74253
<u>478572</u>	75386	974932	<u>208739</u>
	8535	67960	
	56384	540316	6.º
2.º	724836	47210	38497
7537	97537	204562	98704
96425	35791	<u>38930</u>	2746
17584			<u>4821</u>
2563	1511889	2367501	<u>144768</u>
<u>124109</u>			

*De la operacion de restar ó de la sustraccion.*

28 La primera operacion de disminuir es la de *restar*, que es *averiguar la diferencia entre dos números homogéneos*; la operacion por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *sustraccion*; el número de que se ha de restar, *minuendo*; el que se resta, *sustraendo*; y lo que resulta de la operacion, se llama *resta*, *exceso* ó *diferencia*.

El minuendo y sustraendo deben ser homogéneos por razones análogas á las dichas (23).

Se conoce el minuendo en que lleva siempre antepuesta la preposicion *de*; y para indicar una operacion de restar se escribe el minuendo, despues este signo —, que se lee *ménos*, y luego el sustraendo que es el otro número; y para indicar el resultado se pone el signo =. Así, la expresion  $7-4=3$ , quiere decir, que, *despues de quitar 4 de 7 quedan 3*, y se lee: *siete ménos cuatro igual tres*.

29 Entendido esto; pasemos á resolver el siguiente Problema. *Restar números enteros*.

Res. *Colóquese el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, etc.; tírese despues una raya debajo del sustraendo; véase las unidades que faltan á las del sustraendo para que tenga las mismas que el minuen-*

do, y las que le falten se ponen debajo de la raya en la columna de las unidades: ejecútese lo mismo con las decenas, centenas, millares etc., y el número que salga debajo de la raya será la resta.

*Ejemp.* Si de 47835 quiero restar 23512, veré que el número que lleva la preposición *de* es el 47835; por consiguiente este es el minuendo, y por lo mismo colocaré el sustraendo 23512 debajo de él, como aquí se ve:

Y despues de tirada la raya, diré: de 2 unidades 47835  
 á 5 unidades van 3, que pongo debajo de la raya en 23512  
 la columna de las unidades; de 1 decena á 3 van 2, ———  
 que pongo debajo de la raya en la columna de las de- 24323  
 cenas; de 5 centenas á 8 van 3, que pongo debajo; de  
 3 millares á 7 van 4, que pongo debajo; de 2 decenas de millar  
 á 4 van 2, que pongo debajo de su columna correspondiente; y  
 tendré que la diferencia entre los dos números propuestos es 24323.

*Dem.* El colocar el sustraendo debajo del minuendo es por combidad, y el tirar la raya por claridad; todas las demas reglas se reducen á que por ellas encontramos la diferencia entre las unidades de los dos números propuestos, la de las decenas, la de las centenas etc., esto es, que hallamos la diferencia de todas las partes de los números dados; y como todas estas diferencias las hemos ido colocando las unas al lado de las otras en sus lugares correspondientes, resulta que su conjunto formará (intr. ax. 2.º) la diferencia total. L. Q. D. H y D.

30 Al ejecutar las restas parciales no se necesita repetir si son unidades, decenas etc., sinó hacer siempre la resta como si fuesen unidades sencillas. V. g. si quiero restar 47305 de 58639, los colocaré como aquí se presenta:

Y despues de tirada la raya diré: de 5 á 9 van 58639  
 4, que pongo debajo; de 0 á 3 van 3; de 3 á 6 van 47305  
 3; de 7 á 8 va 1, y de 4 á 5 va 1; y colocando es-  
 tas diferencias en sus lugares respectivos, digo que la  
 diferencia total es 11334. 11334

31 En la operacion de restar sucede con frecuencia que algunos guarismos del minuendo son menores que los correspondientes del sustraendo. En este caso *se toma una unidad del guarismo inmediato de la izquierda del minuendo*, la cual como vale diez respecto del guarismo que se considera, se le añaden á este, y de su suma se resta el gua-

rismo del sustraendo; y cuando se pasa á restar el otro, se considera el guarismo del minuendo con una unidad ménos; pero es mas análogo con el modo de proceder en las demas operaciones, dejar los guarismos del minuendo como son, y añadir una unidad al correspondiente del sustraendo. V. g. si quiero hallar la diferencia entre 58276 y 23848, los colocaré como he dicho (29) y aquí se ve:

Y despues de tirada la raya, diré: de 8 á 6 no puede ser, es decir, que al 8 no le faltan ningunas unidades para convertirse en 6, ó que no puedo quitar 8 al que no tiene mas de 6; por lo mismo tomo una unidad del guarismo inmediato 7, que como vale 10 respecto de las del 6, las sumo y tengo 16, de cuya suma ya puedo restar el 8 diciendo: de 8 á 16 van 8 que pongo debajo; ahora podría considerar el 7 como 6, por haberle quitado una unidad, y decir de 4 á 6 van 2; pero es mejor acostumbrarse á añadir dicha unidad al guarismo del sustraendo; y así, diré: 4 y 1 que llevo son 5, de 5 á 7 van 2 que coloco debajo; paso á la columna inmediata y digo: de 8 á 2 no puede ser; tomaré una unidad del guarismo inmediato, y hallaré que de 8 á 12 van 4, que pongo debajo, y llevo 1; 3 y 1 que llevo son 4, de 4 á 8 van 4 que pongo, y no llevo nada; de 2 á 5 van 3 que pongo debajo, y resulta la diferencia 34428.

32 Tambien suele ocurrir en esta operacion *el que el minuendo termine en ceros, ó que tenga ceros entre sus guarismos significativos*; en ambos casos se deja el minuendo como lo que es, y se añade una unidad al guarismo del sustraendo siempre que para restar el anterior, se haya tenido que tomar unidad auxiliar. V. g. si de 370480000, quiero restar 35729486, los colocaré como aquí se ve:

Y despues de tirada la raya diré: de 6 á 10 van 4, y de 10 llevo 1; 8 y 1 son 9, á 10 va 1, y de 10 llevo 1; 1 y 4 son 5, á 10 van 5, y llevo 1; 1 y 9 son 10, á 10 va cero, y llevo 1; 1 y 2 son 3, á 8 van 5, y no llevo nada; de 7 á 14 van 7, y llevo 1; 1 y 5 son 6, á 10 van 4, y llevo 1; 1 y 3 son 4, á 7 van 3, y no llevo nada; y como del 3, que queda á la izquierda, no tengo nada que restar, le pongo debajo.

33 La razon de esta práctica, contrayéndonos al pri-

mer ejemplo, es que para poder restar el 8 tuve que tomar una unidad auxiliar del 7; de donde se infiere que al restar el 4 no se debe considerar al 7 mas que como 6; pero si dejo al 7 como lo que es, y cuando voy á restar el 4 tengo cuidado de quitarle una mas, obtendré lo mismo, y resulta que cualquier práctica es igualmente segura, aunque la segunda es preferible.

Otros ejemplos de sustraccion.

1.º	2.º	3.º	4.º	5.º
3571042	4268013	1350304	2570842	3204005
683475	586435	584258	643576	863957
<u>2887567</u>	<u>3681578</u>	<u>766046</u>	<u>1927266</u>	<u>2340048</u>

De la multiplicacion.

34 La segunda operacion de aumentar es la de *multiplicar*. Esta es el caso particular de la suma en que todos los sumandos son iguales; y así, se dice que multiplicar es tomar un número tantas veces como unidades tiene otro. La operacion se llama *multiplicacion*; el número que se ha de tomar, se llama *multiplicando*; aquel que con sus unidades espresa las veces que se ha de tomar el multiplicando, se llama *multiplicador*; y lo que resulta de la operacion se llama *producto*; el multiplicando y multiplicador juntos, se llaman *factores* del producto.

La operacion de multiplicar se indica escribiendo el multiplicando, despues un punto ó este signo  $\times$ , y luego el multiplicador; así, 4.5 ó  $4 \times 5$  indica que se ha de multiplicar el 4 por el 5; y para indicar el resultado se usa tambien del signo  $=$ ; de manera que  $4.5 = 20$ , ó  $4 \times 5 = 20$ , espresa que el producto de multiplicar 4 por 5 es 20, y se lee: 4 *multiplicado por 5 igual 20*. Ocurre con mucha frecuencia el hacer oficios de multiplicando ó de multiplicador, ó de ambos, sumas ó restas indicadas; en este caso se encierran en un paréntesis de este modo:

$$(3 + 1) \times (7 - 2) = 20;$$

que quiere decir, que la suma de 3 con 1 que es 4, se debe multiplicar por lo que queda de restar 2 de 7 que es 5: y por eso hemos puesto el producto 20.

35 La definición de la multiplicación manifiesta que el producto debe ser de la misma especie que el multiplicando; y el multiplicador debe ser un número abstracto, que solo dice las veces que se ha de tomar ó sumar el multiplicando. En algunas cuestiones conviene distinguir los factores; mas en el producto no influye el que se truequen ó inviertan sus oficios, como vamos á manifestar en el siguiente

36 Teorema. *El orden de los factores no altera el producto.*

*Explicacion.* Si quiero multiplicar 5 por 4, voy á demostrar que el producto será el mismo, ya multiplique el 5 por el 4, ó ya el 4 por el 5.

*Dem.* Pues que la multiplicación es una suma abreviada, tendré que sumando cuatro veces el 5, hallaré el producto que busco; pero si descompongo á cada 5 en las cinco unidades de que consta, deberé sacar el mismo resultado de sumar estas unidades que de sumar los cuatro 5 á que equivalen; por lo mismo, indicando y ejecutando la operación como aquí se ve:

Observo, que el conjunto de unidades que están á la derecha de los signos de igualdad, equivalen á los cuatro 5 que están en columna; pero estas mismas unidades, sumadas equivalen á los cinco 4 que hay debajo de la raya; luego si cuatro 5 equivalen á cinco 4, será cuatro veces un 5 igual á cinco veces un 4; y por lo mismo cuatro veces 5 es igual á 5 veces 4 ó  $4 \times 5 = 5 \times 4$ . Y como se demostraría lo mismo respecto de cualesquiera otros números, resulta L. Q. D. D.

*Esc.* También se verifica esta proposición en el caso de haberse de multiplicar muchos números sucesivamente entre sí. En efecto, si tuviésemos que multiplicar el 5 por el 4; y lo que resultase, por 7, indicaríamos la operación del modo siguiente  $5 \times 4 \times 7$ ; pero, en virtud de lo acabado de demostrar,  $5 \times 4 = 4 \times 5$ , luego la expresión anterior será igual con  $4 \times 5 \times 7$ . Y como, tanto el  $5 \times 4$  como el  $4 \times 5$  equivalen á 20; estas dos expresiones se convierten en  $20 \times 7$ ; que por lo acabado de demostrar, seten-

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

---


$$20 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

drá  $20 \times 7 = 7 \times 20$ ; ó poniendo, en vez del 20 sus equivalentes  $5 \times 4$  y  $4 \times 5$ ; resultará  $5 \times 4 \times 7 = 4 \times 5 \times 7 = 7 \times 5 \times 4 = 7 \times 4 \times 5$ .

Pero, según lo acabado de demostrar  $7 \times 5 = 5 \times 7$ , y  $7 \times 4 = 4 \times 7$ ; luego será

$$5 \times 4 \times 7 = 4 \times 5 \times 7 = 7 \times 5 \times 4 = 7 \times 4 \times 5 = 5 \times 7 \times 4 = 4 \times 7 \times 5.$$

Y por este procedimiento, llegaríamos á deducir en general, que *cualquiera* que sea el número de los factores, su producto no varía, aunque se altere el orden de las multiplicaciones del modo que se quiera.

37 Entendido esto, para poder ejecutar una multiplicación, es indispensable saber perfectamente los productos que resultan de multiplicar entre sí los números dígitos, que son los contenidos en la siguiente:

*Tabla de los productos de los números dígitos.*

1 por 1 es . . . 1	2 por 2 son . . . 4	3 por 3 son . . . 9
1 por 2 . . . 2	2 por 3 . . . 6	3 por 4 . . . 12
1 por 3 . . . 3	2 por 4 . . . 8	3 por 5 . . . 15
1 por 4 . . . 4	2 por 5 . . . 10	3 por 6 . . . 18
1 por 5 . . . 5	2 por 6 . . . 12	3 por 7 . . . 21
1 por 6 . . . 6	2 por 7 . . . 14	3 por 8 . . . 24
1 por 7 . . . 7	2 por 8 . . . 16	3 por 9 . . . 27
1 por 8 . . . 8	2 por 9 . . . 18	
1 por 9 . . . 9		
4 por 4 son 16	5 por 5 son 25	6 por 6 son 36
4 por 5 . . . 20	5 por 6 . . . 30	6 por 7 . . . 42
4 por 6 . . . 24	5 por 7 . . . 35	6 por 8 . . . 48
4 por 7 . . . 28	5 por 8 . . . 40	6 por 9 . . . 54
4 por 8 . . . 32	5 por 9 . . . 45	
4 por 9 . . . 36		
7 por 7 son 49	8 por 8 son 64	9 por 9 son 81
7 por 8 . . . 56	8 por 9 . . . 72	
7 por 9 . . . 63		
10 por 10 son . . . 100		
10 por 100 . . . . . 1000		
10 por 1000 . . . . . 10000		
10 por 10000 . . . . . 100000		
10 por 100000 . . . . . 1000000		

38 En la multiplicacion pueden ocurrir tres casos; *multiplicar un número dígito por otro dígito; un compuesto por un dígito, ó un dígito por un compuesto; y un compuesto por otro compuesto.* Para el primero basta saber de memoria la tabla anterior; para el segundo resolverémos el siguiente

39 Problema. *Multiplicar un número compuesto por un dígito.*

Res. *Colóquese el dígito debajo de las unidades del compuesto, y tírese una raya por la parte inferior; multiplíquese el guarismo de las unidades del multiplicando, que es el compuesto, por el multiplicador que es el dígito: si en este producto hay solo unidades, se colocan debajo de las de los factores: si contiene solo decenas, se pone 0 en el lugar de las unidades, y se guardan las decenas para añadirlas al producto de las decenas de la columna inmediata; y si contiene decenas y unidades, se ponen las unidades debajo de las de los factores, y se guardan las decenas para añadirlas al producto de las decenas. Despues se multiplican las decenas del multiplicando por el mismo multiplicador; á su producto se añaden las que se llevaban del producto de las unidades, y se colocan las decenas que resulten debajo de las decenas, guardando las centenas, si las hay, para añadirlas al producto de las centenas de la columna inmediata. Luego, se multiplican por el mismo multiplicador las centenas del multiplicando, á cuyo producto se añaden las que se llevaban del producto de las decenas, y así se continúa hasta que no haya mas guarismos en el multiplicando. Si en el último producto hay algunas unidades de especie superior que llevar, se colocan á la izquierda; y el número que resulta debajo de la raya es el producto.*

*Ejemp.* Si quiero multiplicar 453 por 6, ó 6 por 453, colocaré el 6 debajo de las unidades del 453, en esta forma:

Tiro debajo una raya, y empiezo á multiplicar diciendo: 3 por 6 son 18, que son unidades; y como en 18 unidades hay 1 decena y 8 unidades, coloco el 8 debajo de las unidades de los factores, y guardo la	$\begin{array}{r} 453 \\ 6 \\ \hline 2718 \end{array}$
--	--

decena para añadirla al producto de las decenas, y digo: 5 por 6 son 30, y 1 que llevaba son 31, que son decenas; y como en 31 decenas hay 3 centenas y 1 decena, coloco el 1 debajo de las decenas, y guardo las 3 centenas para añadirlas al producto de la columna siguiente, en que digo: 4 por 6 son 24, y 3 que llevaba son 27, que son centenas; y como en 27 centenas hay dos millares y 7 centenas, coloco las 7 centenas, y guardo los 2 millares para añadirlos al producto de la columna siguiente; pero como ya no hay mas guarismos en el multiplicando, coloco estos 2 millares á la izquierda del 7, y tengo que 453 multiplicado por 6 da 2718 por producto.

*Dem.* La colocacion de los factores es por comodidad, y la raya se tira para claridad. Todas las demas reglas están reducidas á multiplicar las unidades, las decenas, centenas etc., esto es, todas las partes del multiplicando por el multiplicador; y como todos los productos parciales los hemos ido reuniendo en uno solo, resulta que el número que está debajo de la raya es el producto de todas las partes de que se compone el multiplicando por el multiplicador; luego (intr. ax. 3.º) será el producto total. L. Q. D. H. y D.

40 Al hallar cada producto no se necesita ir espresando la especie de unidades; de manera que en la práctica bastan las palabras del siguiente ejemplo. Si quiero multiplicar 7263 por 8, colocaré los números como he dicho y aquí se ve:

Y despues de tirada la raya diré: 3 por 8 son	7263
24, pongo el 4 y llevo 2; 6 por 8 son 48, y 2	8
que llevaba son 50, pongo 0 y llevo 5; 2 por 8	—
son 16, y 5 que llevaba son 21, pongo 1 y llevo	58104
2; 7 por 8 son 56, y 2 que llevaba son 58, pon-	

go el 8 y llevo 5; que como no hay mas guarismos en el multiplicando, coloco el cinco á la izquierda del 8, y resulta que el producto, de 7263 por 8 es 58104.

41 Ahora observaremos que *todo número multiplicado por la unidad, ó la unidad multiplicada por cualquier número, da por producto el mismo número; y que cero multiplicado por cualquier número, ó al contrario, da cero por producto.*

42 Si atendemos al sistema de numeracion, veremos (14) que un número resulta multiplicado por 10, solo con añadirle un 0; se le multiplica por 100, con añadirle dos ceros etc.; y en general, para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, *se colocarán á la derecha de dicho número tantos ceros como acompañen á la unidad.*

43 De aquí se sigue que la multiplicacion de un número cualquiera por otro de un guarismo significativo y ceros, se reduce á la de por uno dígito; para lo cual se *multiplica el número compuesto por el guarismo significativo, y al producto se le añaden tantos ceros como le acompañen.*

En efecto, para multiplicar 453 por 600, indicaré la operacion de este modo:  $453 \times 600$ ; pero 600 es lo mismo que  $6 \times 100$ ; luego poniendo en vez de 600 este valor, la espresion anterior se convertirá en  $453 \times 6 \times 100$ ; pero aquí tengo indicado que el producto de 453 por 6, que (39) es 2718, le debo multiplicar por 100; y como para multiplicar por 100, basta (42) solo añadir dos ceros, resulta que si al 2718 le añado dos ceros, tendré que 271800 es el producto de 453 por 600.

Otros ejemplos de multiplicacion.

1.º	2.º	3.º	4.º
5787	95687	8040753	14257839
8	7	60	5000
46296	669809	482445180	71289195000

44 Comprendido esto, pasemos al tercer caso, que explicaremos en el siguiente

**Problema.** *Multiplicar un número compuesto por otro compuesto.*

**Res.** *Tómese por multiplicador el que tenga ménos guarismos, y póngase debajo del multiplicando, que es el otro número, de modo que se correspondan en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.; tírese una raya; multiplíquese todo el multiplicando por las unidades del multiplicador (40), cuyo producto se pondrá debajo de la raya de modo que caigan*

las unidades, decenas, etc. debajo de las unidades, decenas, etc. de los factores; multiplíquese despues todo el multiplicando por las decenas del multiplicador, y colóquese este producto debajo del anterior, corriéndole un lugar hacia la izquierda; luego, multiplíquese todo el multiplicando por el guarismo siguiente del multiplicador, y colóquese este producto debajo del antecedente, corriéndole tambien otro lugar hacia la izquierda; y continúese de este modo hasta que no haya mas guarismos en el multiplicador. Despues se tirará debajo de estos productos parciales otra raya; se sumarán todos ellos, y la suma será el producto que se pide.

*Ejemp.* Si quiero multiplicar 8237 por 536, tomaré por multiplicador el 536 y le colocaré debajo del multiplicando, en esta forma:

Y despues de tirada la raya, multiplicaré el 8237	8237
por 6, é iré colocando el producto debajo de la raya	536
como en el caso dicho (40); despues paso á multiplicar	49422
todo el multiplicando 8237 por el segundo guarismo	24711
del multiplicador que es el 3, y coloco su producto de-	41185
bajo del anterior, corriéndole un lugar hacia la izquierda.	4415032
Paso despues á multiplicar todo el multiplicando por el	
tercer guarismo del multiplicador, que es el 5, y colo-	
co su producto debajo del anterior, corriéndole un lugar hacia la iz-	
quierda. Tiro despues una raya, porque ya no hay mas guarismos	
en el multiplicador; sumo todos estos productos parciales, y tengo	
en la suma 4415032 el producto de los dos números propuestos.	

*Dem.* El tomar por multiplicador el de ménos guarismos es porque el órden de los factores (36) no alterando el producto, y de este modo resulta la operacion con mas sencillez; su colocacion es por comodidad, y el tirar la raya por claridad; todas las demas reglas están reducidas á multiplicar todo el multiplicando por las unidades del multiplicador; despues todo el multiplicando por las decenas del multiplicador, y hemos de colocar este producto debajo del guarismo de las decenas del anterior, porque de multiplicar por decenas (42) debe resultar al fin un cero, y los guarismos significativos deben empezar desde las decenas en adelante, y por consiguiente se deben colocar debajo de las decenas del primer producto parcial, para poder ejecutar despues la suma; lue-

go, hemos multiplicado por las centenas, y así sucesivamente, hasta haber multiplicado todo el multiplicando por todos los guarismos ó partes del multiplicador; pero todos estos productos los hemos sumado y reunido en un solo número, que es el que sale debajo de la raya; luego (intr. ax. 3.º) este número que contiene la suma de los productos del multiplicando por todas las partes del multiplicador, contendrá el producto de todo el multiplicando por todo el multiplicador. L. Q. D. H. y D.

*Ejemplos de multiplicacion.*

1.º	2.º	3.º
78546	85368	947586
3254	647	4798
314184	597576	7580688
392730	341472	8528274
157092	512208	6633102
235638	55233096	3790344
255588684		4546517628

4.º El producto de 695725 por 8563 es 5957493175.

5.º El producto de 85326 por 475 es 40529850.

6.º Y el de 357964 por 4867 es 1742210788.

45 La operacion de multiplicar se abrevia cuando uno ó ambos factores terminan en ceros; lo que se consigue multiplicando únicamente los guarismos significativos, y añadiendo al producto tantos ceros como hay al fin en ambos factores juntos, ó en el uno de ellos si él solo los llevase.

En efecto, si tengo que multiplicar 6300 por 56, será en virtud de lo espuesto (§ 43)

$$6300 \times 56 = 63 \times 100 \times 56 = (\$ 36) 63 \times 56 \times 100.$$

Luego si multiplico el 63 por 56, y al producto le añado dos ceros (42), tendré en 352800 el producto de estos tres factores, ó el de los dos primitivos.

Del mismo modo si fuese 633000 por 2500, tendría  $633000 \times 2500 = 633 \times 1000 \times 25 \times 100 =$

$$633 \times 25 \times 1000 \times 100 = 1582500000.$$

Tambien se abrevia esta operacion cuando los ceros se hallan entre los guarismos significativos del multiplica-

dor; en cuyo caso se multiplica el multiplicando por los guarismos significativos del multiplicador, hasta llegar á los ceros; en llegando á estos no se multiplica por ellos, y se pasa á multiplicar por los demas guarismos significativos; pero teniendo cuidado de correr el primer producto hacia la izquierda tantos lugares mas uno, cuantos ceros hay; es decir, que si hay un cero se debe correr el primer producto dos lugares; si dos ceros, tres lugares, etc. á la izquierda. V. g. si tuviese que multiplicar 847536 por 400306, colocaría los factores de esta manera:

Multiplicaría todo el multiplicando por 6;	847536
lo que me dá el producto parcial 5085216; como	400306
despues del 6 hay un cero en el multiplicador,	5085216
paso á multiplicar por el primer guarismo signi-	2542608
ficativo que encuentro, que es el 3, y coloco este	3390144
producto de modo que su primer guarismo caiga	339273746016
debajo del 2 del producto antecedente, esto es,	
corriéndole dos lugares hacia la izquierda. Como	
despues vuelvo á encontrar ceros, paso á multiplicar por el guaris-	
mo significativo que hay despues de ellos, que es el 4; coloco el	
producto tres lugares mas hacia la izquierda respecto del antece-	
dente, porque aqui hay dos ceros; sumo despues estos productos, y	
saco que 847536 multiplicado por 400306 da 339273746016	
por producto.	

46 Las cuestiones que conducen á la operacion de multiplicar, se presentan bajo tres aspectos diferentes, que se llaman usos de esta operacion: 1.º cuando se quiere hacer á un número cierto número de veces mayor; 2.º cuando conocido el valor de una unidad, se quiere averiguar el de muchas; y 3.º cuando se quieren reducir unidades de especie superior á unidades de especie inferior.

Para el primer caso, se multiplica el número dado por aquel que espresa con sus unidades las veces que se le quiere hacer mayor. V. g. si al 754 le quiero hacer 58 veces mayor, multiplicaré el 754 por 58 y tendré que el producto 43732 es un número 58 veces mayor que el 754.

Para el segundo, se multiplica el valor de la unidad por el número de ellas. V. g. si quiero averiguar lo que

valen 372580 varas de paño á 60 reales la vara, multiplicaré el número de varas por el valor de una de ellas, que es 60 reales, y hallaré que valen 22354800 reales. Porque, por cada unidad que haya, se debe tomar una vez su valor; luego se deberá tomar tantas veces el valor de una como unidades hay. Así mismo, 457 arrobas de aceyte á 96 reales valen 43872 reales; y 3574 fanegas de trigo á 85 reales valen 303790 reales.

Para el tercer caso, se multiplica el número de unidades de especie superior, por aquel número que con sus unidades espresa las unidades de especie inferior de que se compone la mayor.

1.<sup>er</sup> *ejemp.* Quiero saber cuántos pies tienen 7 varas; como la vara es la unidad de especie superior, y se compone de 3 pies, multiplicaré el número 7 de varas por 3, y tendré, en el producto 21, los pies que hay en 7 varas.

—2.<sup>o</sup> Quiero averiguar cuántos maravedises hay en 79 doblones; para esto, multiplicaré el 79 por los maravedises que tiene un doblon, que son 2040, y sacaré 161160 maravedises; pero es mas cómodo reducirlos primero á pesos, luego á reales y despues á maravedises. Así en el ejemplo propuesto verá primero cuántos pesos hay en los 79 doblones; despues los pesos que saque, verá los reales que componen; y luego este número de reales averiguaré los maravedises que tienen, como se vé en (A).

(A)	(B)	(C)
79 <i>doblones.</i>	75893 <i>varas</i>	4367 <i>quints.</i>
4	3	4
<hr/>	<hr/>	<hr/>
316 <i>pesos.</i>	227679 <i>pies</i>	17468 <i>arrobos.</i>
15	12	25
<hr/>	<hr/>	<hr/>
1580	455358	87340
316	227679	34936
<hr/>	<hr/>	<hr/>
4740 <i>reales</i>	2732148 <i>puigs.</i>	436700 <i>libras.</i>
34	12	16
<hr/>	<hr/>	<hr/>
1896	3404296	26202
1422	2732148	4367
<hr/>	<hr/>	<hr/>
16160 <i>mars.</i>	32785776 <i>lineas</i>	6987200 <i>onzas.</i>

El ejemplo (B) manifiesta el modo de reducir 75893 varas á líneas; y el (C) da á conocer el modo de reducir 4367 quintales á onzas.

## De la División.

47 Pasemos á la segunda operacion de disminuir, que es cuando se ha de restar el sustraendo del minuendo todas las veces que se pueda; y como se podrá quitar tantas veces como esté contenido, se dice que dividir *es averiguar cuantas veces un número contiene á otro*. La operacion se llama *division*; el número que ha de contener, se llama *dividendo*; el que ha de estar contenido, se llama *divisor*; y lo que resulta *cociente*; el dividendo y divisor juntos, se llaman *términos* de la division ó del cociente.

48 Como dividir es averiguar las veces que el divisor está contenido en el dividendo, se infiere que *multiplícando el divisor por el cociente ha de resultar el dividendo*; luego en la division *el número que multiplicado por el divisor no dé el dividendo no puede ser el cociente*.

Para indicar que un número se ha de dividir por otro, se pone el dividendo, debajo una raya, y luego el divisor; ó se pone el dividendo, despues dos puntos, y luego el divisor; así,  $\frac{15}{5}$  ó  $15 : 5$ , indica la division de 15 por 5; y se lee: 15 *dividido por 5* (\*); y para indicar el resultado usaremos del signo  $=$ ; de manera que  $\frac{15}{5} = 3$ , ó  $15 : 5 = 3$ , se lee: 15 *dividido por 5 igual 3*.

49 Tres casos pueden ocurrir en la division, á saber: *dividir un número dígito por otro dígito; dividir un compuesto por un dígito, y dividir un compuesto por otro compuesto*.

Para dividir un número dígito por otro dígito, y aun uno compuesto solo de dos guarismos por uno dígito que sea mayor que el guarismo de especie superior del compuesto, no hay mas que saber la tabla de la multiplicacion (37); pues en este caso en averiguando el número por que se ha de multiplicar el divisor para que dé el dividendo (ó el producto inmediatamente menor), este será el cociente.

---

(\*) En los libros ingleses usan de este signo  $\div$  para la division; de modo que  $15 \div 5 = 3$ , quiere decir, 15 dividido por 5 igual 3.

1.<sup>er</sup> *ejemp.* Quiero saber cuántas veces el 6 contiene al 2, ó quanto es 6 dividido por 2; y como haciendo varias tentativas encuentro que el 2 se ha de multiplicar por 3 para producir 6, digo que 3 es el cociente.

2.<sup>o</sup> Si quisiera dividir 11 por 4, vería que despues de dar al cociente 2, me sobran 3; estas 3 unidades que sobran se ponen al lado del cociente hallado, debajo se tira una raya, y debajo se pone el divisor, en esta forma:  $2\frac{3}{4}$ , y se lee dos y tres cuartos.

Para leer todas estas espresiones, se lee el número que está encima de la raya con los nombres numerales absolutos, y el que está debajo con los numerales partitivos, si no llega á 10; ó con los absolutos si llega ó pasa de 10, añadiendo despues la partícula avos. Así, la espresion  $3\frac{9}{17}$  se lee: tres y nueve diez y siete avos.

50 2.<sup>o</sup> caso. Problema. Dividir un número compuesto por un dígito,

Res. Colóquese el divisor á la derecha del dividendo, de modo que se correspondan en un mismo renglon; tírese entre los dos una raya de arriba á abajo, y otra debajo del divisor. Hecho esto, tómese el guarismo de especie superior del dividendo, véase cuántas veces está contenido en él el divisor, y se pone este cociente debajo de la raya del divisor; si el primer guarismo del dividendo es menor que el divisor, se toma otro guarismo mas del dividendo, y para que se sepa los que se han tomado, se pone una coma, y se ve cuántas veces en aquel número de dos guarismos se contiene el divisor, conforme se ha dicho (49), poniendo por cociente lo que resulte. Despues se multiplica este cociente por el divisor, y se coloca el producto debajo del guarismo ó dos guarismos que se separaron en el dividendo; se tira debajo una raya, y se resta este producto del guarismo ó guarismos separados. Al lado de esta resta, ó al lado de 0 si no quedó ninguna, se baja el guarismo siguiente del dividendo, y se ve cuántas veces en la resta, juntamente con el guarismo que se bajó, está contenido el divisor, y el número que resulte se pone en el cociente á la derecha del guarismo hallado úntes; se multiplica este segundo cociente por el divisor, se coloca el producto debajo del segundo dividendo parcial, se tira una raya, y se

*resta.* Al lado de la resta se baja el siguiente guarismo, y así se continúa hasta que no haya en el dividendo mas guarismos que bajar, apuntando con una coma el que se baja para no equivocarse. Si al fin queda resta, se pone como se ha dicho (49), y el número que resulta debajo de la raya es el cociente.

*Ejemp.* Si quiero dividir 924 por 7, pondré el divisor á la derecha del dividendo, separándolos con una raya tirada de arriba abajo, y tiraré otra debajo del divisor en esta forma:

Separo con la coma el guarismo 9 de la izquierda del dividendo, y digo: el 7 en 9 ¿cuántas veces está contenido? veo que una vez, por lo que pongo 1 debajo de la raya del divisor; multiplico este primer cociente parcial 1 por el divisor 7, diciendo: 1 por 7 es 7 que pongo debajo del dividendo parcial 9; tiro una raya y resto 7 de 9. Al lado de la resta 2, bajo el guarismo siguiente 2 del dividendo, le apunto arriba y digo: el 7 en 22 ¿cuántas veces está contenido?

$$\begin{array}{r} 9,2,4 \quad | \quad 7 \\ 7 \quad \quad | \quad 132 \\ \hline 22 \quad \quad \\ 21 \quad \quad \\ \hline 014 \\ \quad 14 \\ \hline \quad 00 \end{array}$$

hallo que son 3, y pongo este segundo cociente parcial á la derecha del primero, le multiplico por el divisor 7, su producto 21 le pongo debajo del segundo dividendo parcial 22 y resto. Bajo al lado de la resta 1 el guarismo siguiente 4, y digo: 7 en 14 ¿cuántas veces está contenido? veo que son 2, pongo este guarismo en el cociente á la derecha del 3, y le multiplico por el divisor 7; pongo su producto 14 debajo del tercer dividendo parcial, y le resto de él; y como no hay mas guarismos que bajar, ni queda resta, resulta que el cociente de dividir 924 por 7 es 132.

*Dem.* La colocacion de los dos términos es por comodidad, y las rayas se tiran para claridad; ahora, para hacer ver la exactitud de lo demas de la regla, nos contraeremos al ejemplo anterior, donde observamos que hemos dividido primeramente 9 centenas por 7, ó hemos visto 9 centenas entre 7 á cómo les toca, y hemos hallado que es á 1; pero como el 9 espresa centenas, este cociente es 1 centena, y por lo mismo despues del 1 debe haber en el cociente otros dos guarismos; en 9 centenas, no solo había lo necesario para que tocasse á 1 centena, sinó que había algo mas, y por esto hemos multiplicado el cociente por el divisor, y le hemos restado de lo que nos servía de dividiendo; á su lado hemos bajado el guarismo inmediato 2, y vemos que estas 22 son de-

cenas, y hemos continuado diciendo: el 7 en 22 ¿cuántas veces está contenido? ó 22 decenas entre 7 ¿á cómo les toca? hemos hallado que es á 3, que las coloco á la derecha del 1 que había de espresar centenas; ahora, para ver si despues de tocarles á 3 decenas quedan aun algunas decenas, se multiplica este segundo cociente por el divisor, y se resta del segundo dividendo parcial 22; la resta 1 que resulta espresa una decena, que junta con las 4 unidades que se bajan, son 14 unidades; que entre 7 les toca á 2, que pongo á la derecha del 3 que espresaba decenas; y como he visto cuánto cabe el divisor en todas las partes del dividendo, y tengo reunidos en un solo número todos los cocientes parciales, resulta (intr. ax. 3<sup>o</sup>) que este es el cociente total. L. Q. D. H. y D.

51 Al ejecutar esta operacion se debe tener presente:

1.<sup>o</sup> Que no se puede poner de una vez en el cociente nada mas que 9; porque si se pudiera poner á mas, lo ménos sería á 10, y la decena no correspondería al cociente parcial que se hallase, sinó al anterior, lo que daría á conocer que el anterior era menor de lo que debía.

2.<sup>o</sup> Que cuando se baja un guarismo y en él, junto con la resta si la hay, no cabe el divisor, se debe poner 0 en el cociente, y se baja al instante el otro guarismo.

3.<sup>o</sup> Que todo número cabe en sí mismo una vez, ó lo que es lo mismo, que si se tiene que dividir un número por sí mismo, el cociente es 1.

4.<sup>o</sup> Que todo número dividido por la unidad da por cociente el mismo número.

Y 5.<sup>o</sup> que 0 dividido por cualquier número siempre da 0 por cociente. Todo lo cual se ve practicado en los siguientes ejemplos.

$$\begin{array}{r}
 \text{1.}^{\circ} \\
 72,0,8,4,7 \left| \begin{array}{l} 9 \\ \hline 90105 \frac{7}{8} \end{array} \right. \\
 \underline{72} \\
 0008 \\
 \underline{8} \\
 047 \\
 \underline{40} \\
 07
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{2.}^{\circ} \\
 45,9,0,9,4 \left| \begin{array}{l} 9 \\ \hline 51010 \frac{4}{9} \end{array} \right. \\
 \underline{45} \\
 009 \\
 \underline{9} \\
 009 \\
 \underline{9} \\
 04
 \end{array}$$

52 Cuando se ha adquirido ya cierta destreza, se eje-

cuta la operacion con mucha brevedad, tomando del dividendo la parte que diga el divisor. V. g. si quiero dividir 45685 por 7, diré: la séptima parte de 4, guarismo de especie superior, no puede ser; la séptima parte de 45 es 6 (que será el primer guarismo del cociente), y quedan 3; que juntas con el guarismo siguiente 6 son 36, y diré: la séptima parte de 36 es 5, que pongo al lado del 6, y queda 1, que junta con el 8 vale 18; la séptima parte de 18 es 2, y quedan 4, que juntas con el guarismo siguiente 5 componen 45; la séptima parte de 45 es 6, que pongo al lado del 2, y quedan 3 por resta; por lo que infero que el cociente es 6526  $\frac{3}{7}$ .

53 3.<sup>er</sup> caso. Prob. *Dividir un número compuesto por otro compuesto.*

Res. *Colóquese el divisor á la derecha del dividendo separándolos con una raya, y poniendo otra debajo del divisor segun se ha dicho en el caso anterior; despues se separan con una coma á la izquierda del dividendo tantos guarismos como tiene el divisor, ó un guarismo mas si en éstos no cabe el divisor. Separados ya éstos guarismos, se ve cuántas veces el primer guarismo de la izquierda del divisor está contenido en el primero del dividendo (ó en los dos primeros si se tomó para el primer dividendo un guarismo mas de los que tenía el divisor), y el número de veces que está contenido se pone en el cociente; se multiplica este cociente por todo el divisor, y el producto se coloca debajo del dividendo parcial, se tira una raya y se resta de él. Al lado de la resta se baja el guarismo siguiente (apuntándole con la coma en el dividendo), y se ve cuántas veces el primer guarismo del divisor está contenido en el primero (si tiene tantos el uno como el otro) ó dos primeros del dividendo (si tuviese éste uno mas que el divisor); se pone este guarismo en el cociente á la derecha del primer cociente parcial, se multiplica por todo el divisor, se tira la raya y se resta. Al lado de la resta se baja el guarismo siguiente, y así se procede hasta que no haya mas guarismos que bajar; y si al fin queda alguna resta se pone á la derecha del cociente con una raya y el divisor debajo.*

1.<sup>er</sup> ejem. Si quiero dividir 966 por 42, colocaré el divisor

42 á la derecha del dividendo 966, separándolos con una raya en esta forma:

Y despues de haber tirado otra debajo del divisor, separo á la izquierda del dividendo dos guarismos, y veo cuántas veces está contenido en el primero que es 9 el primero del divisor que es 4; hallo que son 2 veces, y pongo el guarismo 2 en el cociente; ahora multiplico este cociente 2 por todo el divisor 42, y coloco el producto 84 debajo del dividendo parcial 96, tiro la raya y resto. Al lado de la resta 12 bajo el guarismo diguiente 6; y como ahora tengo por segundo dividendo un número que tiene un guarismo mas que el divisor, averiguaré cuántas veces en los dos primeros de este dividendo está contenido el primero del divisor; y así, diré: el 4 en 12 ¿cuántas veces está contenido? veo que son 3, pongo 3 en el cociente á la derecha del 2, multiplico todo el divisor por este 3, y coloco el producto 126 debajo del dividendo parcial 126, tiro una raya y resto; y como no hay mas guarismos que bajar, ni queda resta, digo que el cociente de dividir 966 por 42 es 23.

$$\begin{array}{r|l} 96,6 & 42 \\ 84 & \hline 126 & \\ 126 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

2.<sup>o</sup> *ejem.* Si quiero averiguar cuántas veces cabe el 812 en 442635, colocaré los números como aquí se presenta:

Y despues de tiradas las rayas, separaré cuatro guarismos en el dividendo, por no ser suficientes los tres primeros para contener al divisor, y averiguaré cuántas veces el 8, primer guarismo del divisor, está contenido en 44, dos primeros guarismos del dividendo; y como hallo, que son 5, pongo este guarismo en el cociente; multiplico el 812 por 5, coloco el producto 4060 debajo del dividendo parcial 4426, tiro una raya y resto. Al lado de la resta 366 bajo el 3, hallo que el 8 está contenido 4 veces en 36, y pongo 4 en el cociente; multiplico el 812 por 4; coloco el producto 3248 debajo del dividendo parcial 3663, tiro una raya y resto. Al lado de la resta 415 bajo el 5, veo que el 8 está contenido 5 veces en 41, pongo 5 en el cociente, multiplico el 812 por 5, coloco el producto debajo del dividendo parcial, tiro la raya y resto; y como no hay mas guarismos que bajar, coloco la resta 95 como he dicho (49), y tengo que de dividir 442635 por 812 resulta  $545 \frac{95}{812}$ .

$$\begin{array}{r|l} 4426,3,5 & 812 \\ 4060 & \hline 03663 & \\ 3248 & \\ \hline 04155 & \\ 4060 & \\ \hline 0095 & \end{array}$$

*Dem.* La colocacion de los términos y las rayas, se hace por comodidad y claridad (50). Despues tomamos á la izquierda del dividendo tantos guarismos como se ne-

cesitan para que esté contenido el divisor, y hallamos, contrayéndonos al primer ejemplo, que se necesitan dos guarismos, y que en ellos está contenido el divisor 2 veces, ó que 96 entre 42, que es el divisor, les toca á 2; pero como el 96 espresaba decenas, resulta que estas dos serán decenas. Hago la multiplicacion y resta, para saber si ademas de tocarles á 2 decenas queda aun algo que repartir, como sucede en efecto, pues quedan 12 que son decenas, y bajando el guarismo 6 de las unidades, he visto cuántas veces cabe el 42 en 126, y hallo 3, que como son unidades las coloco á la derecha del 2 que espresaba decenas. Hago la multiplicacion y resta para ver si quedan aun algunas unidades por repartir, y veo que no; y como todos los cocientes que han salido de dividir todas las partes del dividendo por el divisor, los tengo reunidos en un solo número, resulta (intr. ax. 3.º) que este es el cociente total. L. Q. D. H. y D.

54 Suele suceder que el cociente parcial sacado por la regla (53) es mayor de lo que corresponde, por no estar contenido todo el divisor en todo el dividendo parcial tantas veces como el primer guarismo del divisor está en el primero ó dos primeros del dividendo. Esta circunstancia (que arredra á los principiantes, y origina toda la dificultad de la division) desaparece al instante, si se atiende á lo dicho (48); pues si el producto que resulte de multiplicar el divisor por el cociente puesto, fuese mayor que el dividendo, *está reducido á borrar dicho producto, y cociente, y poner en este una unidad ménos. Se procede á la multiplicacion, y si el producto es todavía mayor que el dividendo, se vuelve á borrar, y se quita otra unidad al cociente; y así se continúa hasta que encontrando un producto igual ó menor que el dividendo se ejecuta la resta; y siempre que la resta sea menor que el divisor, el cociente será el verdadero.* Si la resta fuese igual ó mayor que el divisor, *se irán añadiendo unidades al cociente hasta que venga á quedar una resta menor que el divisor.* De donde se infiere, que teniendo un poco de paciencia para hacer dos ó tres operaciones que comprueben el verdadero cociente, y ejecutando muchos ejemplos, llegarán á ponerse tan diestros que no tendrán luego que hacer ningun tantéo.

Por lo mismo se ponen aquí estos dos ejemplos. 1.º Si quieró dividir 575726 por 493, los colocaré como se ve en (A).

575,7,2,6,	493	
493	12	
0827	18	
986	7	
493	69	
3342	8	
2944	7 $\frac{395}{493}$	
3451		
2958		
03846		
4437		
3944		
3451		
0395		

37963,1,0,4,	6879	
41274	6	
34395	552	
035681	19	
34395	8 $\frac{4782}{6879}$	
012860		
13758		
6879		
59814		
61912		
55032		
04782		

Separo tres guarismos en el dividendo y digo: 5 entre 4 á 1 que pongo en el cociente; multiplico y resto. Al lado de la resta 82 bajo el guarismo siguiente 7 del dividendo, y digo: 8 entre 4 á 2, que pongo en el cociente y multiplico; y como el producto 986 es mayor que el dividendo parcial 827, infero que el cociente 2 es mayor de lo que debe ser; borro; pues, el 986 y tambien el 2, y pongo á 1 en el cociente; multiplico y resto (porque el producto 493 es menor que el dividendo). Al lado de la resta 334 bajo el guarismo siguiente 2; y digo: 33 entre 4 á 8, que pongo en el cociente, y multiplico; y como el producto 3944 es mayor que el dividendo 3342, le borro y tambien el 8; pongo á 7; y como el producto 3451 es aun mayor que el dividendo, los borro y pongo á 6; multiplico el divisor por este cociente 6; y como su producto 2958 es menor que el dividendo, tiro la raya y resto. Al lado de la resta 384 bajo el 6; y digo: 38 entre 4 á 9; y como el producto del divisor por 9 es mayor que el dividendo, los borro y pongo á 8; multiplico y sale tambien un producto mayor; le borro y pongo á 7; multiplico y resto, lo que dá la resta 395; y reuniendo ahora todos los cocientes, tendré el verdadero y total en  $1167 \frac{395}{493}$ .

2.º Si quiero dividir 37963104 por 6879, ejecutaré la operacion como se ve en (B), y saco el cociente  $5518 \frac{4782}{6879}$ .

55 Entendido el modo de hallar el verdadero cociente, se puede ahorrar todo este trabajo, practicando estas dos reglas: 1.ª cuando el segundo guarismo del divisor sea 8 ó 9,

se considerará el primero (al tiempo de buscar cada cociente) como con una unidad mas.

2.<sup>a</sup> Véase si en la resta que queda de dividir el primero ó dos primeros guarismos del dividendo por el primero del divisor, junta con el guarismo siguiente del dividendo, cabe el segundo del divisor el mismo número de veces que el primero en el primero ó dos primeros del dividendo; y si cabe, se podrá asegurar que el cociente hallado es el verdadero; si no cabe, no lo será.

Esc. Los principiantes deben aplicar la 1.<sup>a</sup> regla á los ejemplos anteriores, considerando en el primero (siempre que vayan á sacar el cociente) el 4 como si fuera 5: y en el segundo el 6 como si fuera 7, y verán que no escriben mas guarismos que los necesarios para encontrar el verdadero cociente. Además deben resolver los siguientes ejemplos.

Si quiero dividir 185975 por 395, los colocaré como aquí se ve:

Separo cuatro guarismos, y en vez de decir 18 entre 3, diré 18 entre 4 á 4, que pongo en el cociente; multiplico todo el divisor por este 4, coloco el producto debajo del dividendo, tiro una raya y resto. Al lado de la resta 279 bajo el guarismo siguiente 7, y digo: 27 entre 4 á 6, que pongo en el cociente; multiplico y resto; y como la resta 427 es mayor que el divisor, infiero que el cociente debe ser mayor de lo que le he puesto; por lo cual le borro, y borro tambien la resta y producto; pongo á 7, multiplico y resto. Al lado de la resta 32 bajo el guarismo siguiente 5, y por ser el dividendo menor que el divisor pongo 0 en el cociente; y como no hay mas guarismos que bajar, pongo la resta 325 al lado del cociente, con la raya y el divisor debajo, y resulta por cociente 470 $\frac{325}{395}$ .	$\begin{array}{r} 1859,7,5, \\ \underline{1580} \\ 0279\ 7 \\ \underline{2370} \\ 0427 \\ \underline{276\ 5} \\ 003\ 2\ 5 \end{array}$
---	--

Si quiero dividir 2285473 por 3526, los colocaré como aquí se ve:

Separo cinco guarismos y digo: 22 entre 3 á 7 y queda 1, que junta con el 8 vale 18; y como 18 entre 5 (segundo guarismo del divisor) no les cabe á 7, infiero que no puedo poner 7 en el cociente; veo que 22 entre 3 dándoles á 6 sobra 4, que juntas con el 8 valen 48; y como 48 contiene al 5 mas de seis veces, digo	$\begin{array}{r} 22854,7,3, \\ \underline{21156} \\ 01698\ 7 \\ \underline{1410\ 4} \\ 288\ 3\ 3 \\ \underline{282\ 0\ 8} \\ 006\ 2\ 5 \end{array}$
--	--

que 6 es el cociente; le pongo, multiplico y resto. Al lado de la resta 1698 bajo el 7; y continuando el mismo raciocinio evito los tantéos, y saco el cociente  $648\frac{625}{3520}$ .

56 La operacion de dividir se puede abreviar siempre, *haciendo la resta al mismo tiempo que la multiplicacion del divisor por el cociente parcial*. V. g. si quiero dividir 57327 por 46, los colocaré como he dicho (53) y aquí se ve:

Separaré dos guarismos en el dividendo, y diré: 4 en 5 cabe una vez, y pongo 1 en el cociente; multiplico ahora el divisor 46 por el cociente 1, y en vez de colocar este producto debajo del dividendo parcial 57, para restar despues, voy ejecutando la resta al mismo tiempo que formo el producto en esta forma:

57,3,2,7,	46
11 3	
02 1 2	1246 $\frac{11}{46}$
0 2 8 7	
0 1 1	

6 por 1 es 6, de 6 á 7 va 1, que pongo debajo del 7, y continúo: 1 por 4 es 4, de 4 á 5 va 1, que pongo debajo del 5. Al lado de la resta 11 bajo el guarismo siguiente 3, y digo: 4 en 11 está contenido 2 veces, pongo 2 en el cociente, multiplico y resto diciendo: 2 por 6 son 12, de 12 á 13 va 1, y de 13 llevo 1; 2 por 4 son 8, y 1 que llevo son 9, de 9 á 11 van 2, y de 11 llevo 1; de 1 á 1 no va nada, y pongo cero debajo del último 1. Al lado de la resta 21 bajo el guarismo siguiente 2, y digo: 4 en 21 á 5; pero como solo sobra 1 unidad; y en ella junto con el guarismo siguiente 2, no está contenido 5 veces el segundo guarismo 6 del divisor, pondré solo á 4; multiplico y resto, diciendo: 4 por 6 son 24, de 24 á 32 van 8, y de 32 llevo 3; 4 por 4 son 16, y 3 son 19, de 19 á 21 van 2, y de 21 llevo 2, á 2 no va nada. Al lado de la resta 28 bajo el guarismo siguiente 7, y digo: 4 en 28 está 7 veces; pero como no sobra nada, pondré solo á 6; haré la multiplicacion y resta diciendo: 6 por 6 son 36, de 36 á 37 va 1, y de 37 llevo 3; 6 por 4 son 24, y 3 que llevaba son 27, de 27 á 28 va 1, y de 28 llevo 2; de 2 á 2 no va nada, y pongo 0 debajo del 2; y como no hay mas guarismos que bajar pongo la resta 11 como he dicho (49), y tengo el cociente,  $1246\frac{11}{46}$ .

*Ese.* Si al ejecutar esta operacion *no se pudiese hacer la última resta, es señal de que el cociente es mayor de lo que corresponde;* y si despues de hecha la resta, resulta ésta igual ó mayor que el divisor, *es señal de que se ha puesto de ménos al cociente;* y en estos casos se hará la correccion necesaria.

Hé aqui mas ejemplos para ejercitarse.

1. <sup>o</sup>	2. <sup>o</sup>
$\begin{array}{r} 8450,3,1,7, \\ 04763 \\ 07761 \\ 37747 \\ 01864 \end{array} \left  \begin{array}{l} 3987 \\ \hline 2119 \frac{1864}{3987} \end{array} \right.$	$\begin{array}{r} 98540,6,7,8, \\ 437596 \\ 0541297 \\ 0482688 \\ 044440 \end{array} \left  \begin{array}{l} 54781 \\ \hline 1798 \frac{44440}{54781} \end{array} \right.$

57 Además se abrevia la division cuando ambos términos ó solo el divisor acaban en ceros. En el primer caso se borran en los dos, tantos ceros como hay en el que tiene ménos, y se hace la division con lo demás que queda. Y en el 2.<sup>o</sup> se separan á la derecha del dividendo tantos guarismos, como ceros hay al fin del divisor; se hace la division de lo que queda á la izquierda; al lado de la resta, si queda, se baja todo lo separado, y se tiene la resta total, la que se pondrá encima de una raya y todo el divisor debajo.

Así es, que si quisiera dividir 3600 por 900, estaba reducida la operacion á dividir 36 por 9; lo que da 4 al cociente. La razon de esto es, que 3600 espresa treinta y seis centenas, y 900 espresa nueve centenas; y como el divisor 9 estará contenido en el dividendo 36 el mismo número de veces, ya sea que este número espresé unidades, decenas, centenas, millares, &c. resulta que por este medio se halla el cociente con mas sencillez y con igual exactitud.

Si el dividendo hubiese sido 3647 y el divisor el mismo 900, entónces podríamos descomponer al 3647 en 3600+47; y de dividir el 3600 por 900 resulta 4, y además queda la resta 47 que se ha de dividir por 900; por lo que el cociente es 4 y  $\frac{47}{900}$ .

Si el dividendo fuera 3847, descompuesto en 3800+47; de dividir 3800 por 900, se obtiene 4 y queda 200 por resta; y uniendo á esta las 47 unidades, resulta por resta total 247. Luego el cociente en este caso es 4 y  $\frac{247}{900}$ .

58 Los usos de la division son seis: 1.<sup>o</sup> cuando claramente se dice que se quiere buscar las veces que un número está contenido en otro; 2.<sup>o</sup> cuando hay que repartir entre varias personas cierto número de cosas; 3.<sup>o</sup> cuando

se quiere dividir un número en partes iguales, ó tomar una parte de un número, como mitad, tercio, etc.; 4.º cuando conociendo el valor de muchas unidades, se quiere averiguar el de una; 5.º cuando se quieren reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior; y 6.º cuando se quieren hallar todos los números que dividan exactamente á otro dado.

En el primer caso, se divide el mayor por el menor por el método espuesto (56).

En el 2.º se divide en abstracto el número de las cosas por el de las personas. V. g. un padre al morir ha dejado 8 hijos, y en hacienda, alhajas, casas etc. 7465235 reales; dividiendo el número 7465235 por el de los hijos que es 8, el cociente 933154 $\frac{3}{8}$  espresará los reales que corresponden á cada uno.

En el 3.º se divide el número dado por el que espresa las partes en que se ha de dividir, ó la parte que se quiere tomar. V. g. si quiero dividir en 7 partes iguales el número 1673, dividiré 1673 por 7, y en el cociente 239 tendré el valor de una de estas partes.

En el 4.º caso, se divide el valor de dichas unidades por el número de ellas, y el cociente será el valor de una. V. g. sabiendo que 35 varas de paño han costado 1505 reales; para averiguar á cómo ha costado la vara, dividiré el valor de todas las varas, que es 1505 reales, por el número de ellas 35, y el cociente 43 será el valor de cada vara de paño.

En el 5.º caso, se divide el número de unidades de especie inferior por el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior cabe en la de especie superior. V. g. si quiero reducir 9245 maravedises á reales, dividiré los 9245 maravedises por 34, que son las maravedises que tiene un real, y el cociente 271 $\frac{3}{4}$  serán los reales que componen; pero en estos casos no se pone la resta como ántes (49), sino que se deja conservándole el nombre que tenía el dividendo de que provino; de modo que en vez de decir 271 reales y treinta y un treinta y cuatro avos de real, se dice 271 reales y 31 maravedises.

Esc. Si entre las unidades que se dan, y aquellas á que se quieren reducir, hay otras intermedias, se van redu-

siendo sucesivamente á las de especie superior inmediata hasta llegar á la que se pide. V. g. si quiero reducir 7483506 maravedises á doblones, dividiré primero por 34, para reducirlos á reales; los reales que resulten los dividiré por 15, para reducirlos á pesos; y finalmente, estos pesos los dividiré por 4 para reducirlos á doblones; y tendré en este último cociente, junto con las restas anteriores, los doblones, pesos, reales y maravedises, que hay en el número propuesto. La operacion se ejecutará como aquí se ve:

maravedises.				
74,8,3,5,0,6,		34		
06 8		22,0,1,0,3, rs.	15	
0 3 5		7 0		
1 0 6		1 0 1	14,6,7,3, p. <sup>s</sup>	4
4		1 1 0	0 2 5	
		0 0 5 3	0 2 7	3668 ds.
		8	0 3 3	
			1	

y diré que en 7483506 mrs. hay 3668 doblones, 1 peso, 8 reales y 4 maravedises.

59 Para proceder al sexto uso advertirémos, que cuando un número está contenido en otro un número exacto de veces, se llama al que contiene *múltiplo* del contenido, y al contenido *submúltiplo* ó *parte alicuota* del que contiene; cuando un número no está contenido en otro un número exacto de veces, se dice que es *parte alicuanta* del continente. V. g. el 20 es múltiplo respecto del 4 y del 5; y el 4 y el 5 son submúltiplos ó partes alicuotas del 20; y 4 es parte alicuanta del 21. La parte alicuota se llama tambien *factor*, porque multiplicada por la otra produce el número de que lo es; v. g.  $4 \times 5 = 20$ ; y como si dividimos el 20 por el 4 ó por el 5, dará cociente exacto, se infiere que *parte alicuota*, *factor* ó *divisor de un número*, es cualquier otro que le divide sin dejar resta.

Pero si consideramos el 5 y el 4, que son factores del 20, observarémos que el 5 no se puede dividir exactamente por ningun otro número mas que por él mismo y por la unidad; por lo que este número, y todos los que tienen esta misma propiedad, como 2, 3, 7, 11, 13, 17, etc.

se llaman números *primos ó primeros ó factores simples*. El 4, además de ser divisible por sí mismo y por la unidad, lo es también por 2; por cuya razón este número, y todos los que son divisibles por algún otro además de ellos mismos y la unidad, como 6, 8, 9, 10, 12, etc. se llaman *factores compuestos*. Esto supuesto, para poder encontrar todos los factores simples y compuestos de los números, se debe saber que *todo número que termina en cero ó guarismo par es divisible por 2*. Todo número (v. g. 264) cuyas cifras (2, 6 y 4) sumadas como unidades sencillas, den 3 ó un múltiplo de 3 (que aquí es 12), es divisible por 3.

Como todos los múltiplos de 5 acaban en 0 ó en 5, se conocerá que un número es divisible por 5, si acaba en 0 ó en 5. Esto supuesto, para hallar los factores simples y compuestos de un número cualquiera, se pone el número lo mas alto y hacia la izquierda del papel ó pizarra donde se ejecuta la operación; después se tira una raya de arriba abajo, y á la derecha de esta raya, enfrente del número propuesto, se pone el número primero menor por que sea divisible; esta división, como es sencilla, se va haciendo mentalmente (52) y el cociente se va poniendo debajo del número propuesto. Enfrente de este cociente se pone otra vez el mismo divisor, si es divisible por él, y si no, aquel número primero menor por que sea divisible este cociente; y así se continúa hasta llegar á un cociente que sea número primo, y se dividirá por sí mismo. Después se tira una raya á la derecha de los factores simples; y para formar los compuestos de dos, se multiplica cada uno de los simples por los que tenga debajo de sí, y el producto se pondrá á la derecha de la raya enfrente del factor simple por que se multiplica. Luego, se tira otra raya, y para formar los compuestos de tres, se multiplica cada compuesto de á dos por todos los simples que haya debajo del renglon en que está el compuesto de á dos; y así se procede hasta llegar al último que debe resultar en el renglon inferior é igual con el número propuesto.

1.<sup>er</sup> ejemplo. Si quiero hallar los factores simples y compuestos del número 210, le colocaré lo mas arriba y ha-

cia la izquierda que pueda, y tiraré la raya como aquí se ve:

210	2					
105	3	6				
35	5	10; 15	30			
7	7	14; 21; 35	42; 70; 105	210		
1						

y como el 210 termina en cero, es divisible por 2; pongo el 2 enfrente, y hago la division diciendo: la mitad de 2 es 1, que pongo debajo del 2 del 210; continúo; la mitad de 1 es 0 que pongo debajo del 1 del 210; y me queda 1, que junto con el 0 de arriba da 10; la mitad de 10 es 5, que pongo á la derecha del 0. Como el 105 no es divisible por 2, veo si es divisible por 3, diciendo: 1 y 0 es 1, y 5 son 6; y como 6 es múltiplo de 3, infiero (59) que el 105 se puede dividir por 3; y por lo mismo coloco el 3 á su derecha; y hago la division de este modo: la 3.<sup>a</sup> parte de 1 es 0, que no pongo y sobra 1, que junto con el 0 vale 10; la 3.<sup>a</sup> parte de 10 es 3, que pongo debajo del 0, y queda 1, que junto con el 5 son 15; la 3.<sup>a</sup> parte de 15 es 5, que pongo á la derecha del 3. El 35 no es ya divisible por 3, pero lo es por 5; coloco el 5 á su derecha y digo: la 5.<sup>a</sup> parte de 35 es 7, que pongo debajo del 5; y como el 7 es *número primo* le dividiré por él mismo, diciendo: la 7.<sup>a</sup> parte de 7 es 1, que pongo debajo del 7, y tengo todos los factores simples

Para hallar los factores compuestos de dos simples, tiraré á la derecha de estos una raya, y multiplicaré el 2 por todos los que tenga debajo de sí, diciendo: 2 por 3 son 6, que coloco á la derecha de la raya, enfrente del 3, que es por el que he multiplicado; continúo: 2 por 5 son 10, que pongo enfrente del 5 que es por el que he multiplicado, y continúo: 2 por 7 son 14, que pongo por la misma razon enfrente del 7. Paso á multiplicar el 3 por todos los que tiene debajo, diciendo: 3 por 5 son 15, que pongo enfrente del 5 que es por el que he multiplicado; y para que no se confunda con el 10 que tengo en el mismo renglon, los separo poniendo entre ellos punto y coma; continúo diciendo: 3 por 7 son 21, que pongo enfrente del 7, al lado del 14, separándolos con punto y coma; despues paso á multiplicar el 5 por todos los que tenga debajo de sí, diciendo: 5 por 7 son 35, que pongo enfrente del 7 al lado del 21. Como el 7 no tiene ninguno debajo de sí, no puedo ya sacar mas factores de á dos.

Paso á los de á tres, para lo cual tiro una raya y multiplico el 6, primer factor de á dos, por el 5 y por el 7, que son los simples que hay debajo del renglon donde se halla el 6, diciendo; 6



blemas, se llaman *datos*; y lo que se halla por medio de ellas, se llama *resultado*. Así, en la adición los datos son los sumandos; y la suma es el resultado, etc. Vamos, pues, á ver las alteraciones que deben sufrir los resultados en variando los datos.

1.º Pues que sumar es reunir en un número el valor de muchos, resulta que *la suma crecerá ó menguará tanto como crezcan ó mengüen los sumandos; y una suma permanecerá la misma, si á un sumando se le añade un número cualquiera y á otro se le quita el mismo número.*

2.º Como en la resta se quita el sustraendo del minuendo, se infiere que *cuanto mayor ó menor sea el minuendo, permaneciendo el mismo sustraendo, tanto mayor ó menor (se entiende por vía de suma ó resta) será la resta; y cuanto mayor ó menor sea el sustraendo, permaneciendo el mismo minuendo, tanto menor ó mayor será la resta*; lo que manifiesta que la resta puede crecer, ó aumentando el minuendo, ó disminuyendo el sustraendo; y puede menguar, disminuyendo el minuendo, ó aumentando el sustraendo; ó lo que es lo mismo, á la resta le sucede lo mismo que al minuendo, y lo contrario que al sustraendo; y *una resta no se alterará ó permanecerá la misma, añadiendo ó quitando una misma cantidad al minuendo y sustraendo.*

Tambien resulta de esto mismo, que *si dos restas tienen un mismo minuendo es mayor la que tiene menor sustraendo*; porque, siendo la resta lo que falta al sustraendo para convertirse en el minuendo, siendo aquí el minuendo el mismo, al sustraendo menor le faltará mas que al mayor para convertirse en el minuendo. Esta consecuencia tambien se enuncia de este modo: *si de cantidades iguales, se quitan ó restan cantidades desiguales, será mayor el resultado que provenga de restar la menor cantidad.*

3.º Pues que multiplicar es tomar tantas veces el multiplicando como unidades tiene el multiplicador, resulta que *cualquiera de los factores que crezca ó mengüe, debe causar incremento ó decremento en el producto. Si el multiplicando se hiciese el duplo, el triplo etc. de lo que era (permaneciendo el multiplicador el mismo), el producto*

*deberá ser el duplo, el triplo etc. del que se sacó ántes. Si se hiciese la mitad, tercera, cuarta etc. parte (quedando uno mismo el multiplicador), el producto será la mitad, tercera, cuarta, etc. parte del que se tenía ántes.*

Lo mismo decimos respecto del multiplicador, permaneciendo el mismo el multiplicando; de donde se infiere que un producto permanecerá el mismo si un factor se parte por el mismo número que se multiplique el otro; y que si al multiplicando se le multiplica por un número cualquiera 3, y al multiplicador se le multiplica por un número tambien cualquiera, por ejemplo 2, el producto resultará tantas veces mayor como espese el producto de dichos números, que aquí es 6 veces mayor.

4<sup>o</sup> Hemos visto, que dividir es averiguar las veces que el divisor está contenido en el dividendo, ó quitar aquel de este todas las veces que se pueda; luego si el dividendo crece ó mengua, deberá crecer ó menguar el cociente; y si crece ó mengua el divisor deberá menguar ó crecer el cociente. Esto es en general; pero si el dividendo se hace el duplo, el triplo, etc. (quedando uno mismo el divisor), el cociente será el duplo, el triplo, etc. de lo que era ántes; y si el dividendo se hace la mitad, tercera parte, etc., el cociente será la mitad, tercera parte, etc. de lo que era ántes. Si el divisor se hace el duplo, el triplo etc. (quedando uno mismo el dividendo), el cociente será la mitad, tercera parte, etc. de lo que era ántes; pues para cada unidad que les tocase ántes, habrá ahora dos, tres, etc. entre que repartirla, y si el divisor se hiciese la mitad, tercera parte, etc. el cociente será el duplo, el triplo, etc. de lo que era ántes; pues para cada dos, tres, etc. unidades que les tocase ántes, no habrá ahora mas de uno entre que repartirlas. De donde se infiere, que un cociente no se altera aunque se multipliquen ó partan los dos términos de la division por un mismo número. Porque lo que aumenta ó disminuye por razon del dividendo, lo disminuye ó aumenta por razon del divisor, de modo que hay una exacta compensacion.

*De los quebrados ó fracciones; de su expresion, reduccion á un comun denominador, y simplificacion.*

62 Hemos dicho (22), que quebrados son aquellos números, que espresan parte ó partes de la unidad. Para formarse una idéa exacta del quebrado, es necesario atender al número de partes que se toman de la unidad, que se llama *numerador* (porque las cuenta ó numera), y á la clase de partes que se toman, esto es, en cuántas partes está dividida la unidad; y al número que las espresa se llama *denominador* (porque da nombre al quebrado). V. g. en el quebrado *tres cuartos ó tres cuartas partes de una unidad*, como una manzana, una naranja, etc. el numerador es *tres*, y el denominador *cuatro*. El numerador y denominador juntos, se llaman *términos* del quebrado.

63 Teor. *Todo quebrado es una division indicada del numerador por el denominador.*

*Espl.* Si tenemos que dividir 11 manzanas entre 4, dará el cociente 2, y 3 de resta, que se han de repartir entre los mismos 4; y lo que vamos á demostrar es que el repartir estas tres manzanas entre 4, equivale á tomar tres cuartas partes de una manzana sola.

*Dem.* Para esto, lo mas natural es dividir cada manzana en cuatro partes iguales, y dar una de estas cuartas partes á cada uno; pero como las unidades ó manzanas son iguales, en lugar de dar á cada uno, una cuarta parte de la primera, otra cuarta parte de la segunda y otra de la tercera, le podremos dar tres de la primera, ó de cualquiera de ellas, que era L. Q. D. D.

Por esta razon se escriben y leen los quebrados del modo dicho (49); v. g. el quebrado anterior se escribe  $\frac{3}{4}$ , y el quebrado  $\frac{12}{4}$ , se lee: *diez y nueve veinte y cuatro avos*. Como el numerador denota las partes que se toman de la unidad, y el denominador en cuántas se considera dividida la misma unidad, ó cuántas componen una unidad, se infiere que cuando el numerador sea igual al denominador, el quebrado equivaldrá á la unidad; y

así tendremos que  $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{40}{40} = \frac{1000}{1000}$  etc.

En este caso, se dice que *la unidad se ha puesto en forma de quebrado*; y cuando el numerador sea mayor que el denominador, el quebrado se llama *impropio*. V. g.  $\frac{7}{4}$ ,  $\frac{8}{5}$ , etc. etc.

64 Teor. *Si una unidad se divide en un número cualquiera 3 v. g. de partes iguales, y la misma unidad se divide en otro número 5 de partes iguales, cada parte que resulte de dividirla en 5, será menor que la que resulte de dividirla en 3; y si se dividiera en 6, que es duplo de 3, cada parte que resulte de dividirla en 6, será la mitad de la que resultó dividiéndola en 3.*

*Dem.* Estando la unidad en el primer caso dividida en tres partes, equivaldrá al conjunto de ellas; y por la misma razon la misma unidad equivaldrá en el segundo caso al conjunto de las cinco partes; luego (intr. ax. 5.º) el conjunto de las tres partes primeras equivaldrá al conjunto de las cinco segundas; luego si se necesitan 5 segundas para componer 3 primeras, no bastarán 3 segundas para componer 3 primeras; luego cada segunda será menor que cada primera. L. 1.º Q. D. D.

Quando se divide en 6, tendremos, discurriendo del mismo modo, que las tres partes primeras equivaldrán al conjunto de las 6 segundas; luego si se necesitan 6 segundas para componer 3 primeras, cada 2 segundas pondrán 1 primera; luego cada segunda será la mitad de cada primera. L. 2.º Q. D. D.

65 Teor. *Si permaneciendo uno mismo el denominador de un quebrado, aumenta ó disminuye su numerador, aumentará ó disminuirá del mismo modo el quebrado; y si aumenta por vía de multiplicacion ó disminuye por vía de division, lo hará del mismo modo el quebrado.*

*Dem.* Por no alterarse el denominador, no se altera el valor de cada parte; luego cuando se tomen mas partes, que es cuando crece el numerador, se tendrá un quebrado mayor; y cuando se tomen ménos, que es cuando disminuye el numerador, se tendrá un quebrado menor. L. 1.º Q. D. D.

Si el número de partes que se tomó, fué el duplo, el triplo etc., el valor del quebrado que nos resulte, será el

duplo, el triplo, etc., y si fué el subduplo, el subtriplo etc. el valor del quebrado que nos resulte, lo será igualmente. L. 2.º Q. D. D.

*Esc.* Hé aquí quebrados con esta condicion

$\frac{8}{17}, \frac{9}{17}, \frac{7}{17}, \frac{16}{17}, \frac{4}{17}$ ; y manifiestan que de quebrados que tienen un mismo denominador, *aquel es mayor que tiene mayor numerador*; y que para multiplicar ó dividir un quebrado por un número cualquiera, basta *multiplicar ó dividir su numerador por dicho número*.

66 Teor. Si permaneciendo uno mismo el numerador de un quebrado, aumenta ó disminuye su denominador, disminuirá ó aumentará el quebrado. Si el denominador aumenta por vía de multiplicacion, el quebrado disminuirá por vía de division; y si el denominador disminuye por vía de division, el quebrado aumentará por vía de multiplicacion.

*Dem.* Como el numerador permanece el mismo, se toma siempre un mismo número de partes; luego el valor del quebrado será mayor ó menor, segun lo sean las partes que espresé; pero mientras mayor sea el número de partes en que se divida una unida<sup>d</sup> cualquiera, será (64) menor el valor de cada una; luego mientras mayor sea el denominador, será menor el valor de cada parte, y por consiguiente el valor de un número cualquiera de ellas. L. 1.º Q. D. D.

Si el denominador se hiciese dos ó tres, etc. veces mayor, el valor de cada parte se haría (64) dos ó tres, etc. veces menor; luego un número cualquiera de ellas será tambien dos ó tres, etc. veces menor que lo que era ántes. Si el denominador disminuye por vía de division, entónces el valor de cada parte aumentará por via de multiplicacion. L. 2.º Q. D. D.

*Esc.* Hé aquí quebrados que satisfacen á estas condiciones  $\frac{7}{15}, \frac{7}{17}, \frac{7}{25}, \frac{7}{31}, \frac{7}{39}$ ; y manifiestan que de quebrados que tienen un mismo numerador, *es mayor el que tiene menor denominador, y al contrario*; y que para multiplicar ó dividir un quebrado por un número cualquiera, basta *dividir ó multiplicar su denominador por dicho número*.

*Cor.* De aquí se sigue, que para multiplicar un que-

brado por su denominador basta suprimir este, y el producto será igual al numerador.

Así  $\frac{5}{8} \times 8 = 5$ ,  $\frac{6}{11} \times 11 = 6$ ,  $\frac{8}{13} \times 13 = 8$ , etc. etc.

67 Teor. Un quebrado no se altera, aunque sus dos términos se multipliquen ó partan por un mismo número.

Dem. Cuando se multiplican ambos términos por un mismo número, tenemos que con multiplicar el numerador, se hace al quebrado tantas veces mayor (65) como unidades tiene el número por que se multiplica; pero con multiplicar el denominador por el mismo número, se le hace este mismo número de veces menor (66); luego no se altera su valor, ó queda conforme estaba. L. 1.º Q. D. D.

Si se dividen por un mismo número, con dividir el numerador hacemos al quebrado tantas veces menor como unidades tiene el número por el que se divide (65); y con dividir su denominador por el mismo número, se le hace el mismo número de veces mayor (66); luego queda conforme estaba. L. 2.º Q. D. D.

Esc. Hé aquí quebrados iguales que satisfacen al teorema  $\frac{8}{14} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} = \text{etc.}$  y es digna de notarse la conformidad de estos resultados con los deducidos para la division (61, 4.º).

68 En la primera parte del teorema anterior, se funda la reduccion de los quebrados á un comun denominador; y en la segunda su simplificacion.

Quando dos ó mas quebrados tienen un mismo denominador, se dice que le tienen comun; muchas veces se necesita que le tengan, y para conseguirlo se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demas. En este caso no se altera el valor de ningun quebrado, porque sus dos términos se multiplican por un mismo número; y sale el mismo denominador (36 esc.), porque resulta de la multiplicacion de los denominadores de todos los quebrados. V. g. Si quiero reducir á un comun denominador los quebra-

dos  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{5}{7}$ , los pondré como aquí se ve:  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}, \frac{5}{7} \\ \frac{14}{21}, \frac{15}{21} \end{array} \right.$

Multiplicaré los dos términos del  $\frac{2}{3}$  por 7, que es el denominador del otro quebrado, diciendo; 2 por 7 son 14, que pon-

go por numerador del nuevo quebrado, debajo de su correspondiente  $\frac{2}{3}$ ; tiraré la raya y diré: 3 por 7 son 21, que pongo debajo de la raya. Paso al segundo quebrado  $\frac{5}{7}$  y digo: 5 por 3 son 15, que pongo debajo del  $\frac{5}{7}$ ; tiro la raya y despues pongo debajo 21, producto de 3 por 7; con lo que tengo los quebrados  $\frac{14}{21}$ ,  $\frac{15}{21}$ , que son iguales cada uno con su correspondiente, y tienen un mismo denominador.

Cuando los denominadores tienen algun factor comun, quedan reducidos á un comun denominador, si son dos, multiplicando los dos términos de cada quebrado, solo por el factor que no es comun en el otro. V. g. si los quebrados fuesen  $\frac{5}{6}$  y  $\frac{3}{8}$ , bastaría multiplicar los dos términos del primero por 4, y los del segundo por 3; y ejecutándolo se convierten en  $\frac{20}{24}$  y  $\frac{9}{24}$ ; que en efecto tienen un mismo denominador, y su valor permanece el mismo (67).

Si los quebrados fuesen  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{4}{3}$ , multiplicaría los dos términos del primero  $\frac{5}{6}$  por 10, producto de 2 por 5, que son los denominadores de los demás, y tendría que el primer quebrado se convertiría en  $\frac{50}{60}$ ; pasaría al segundo  $\frac{1}{2}$ , cuyos términos los multiplicaría por 30, producto de 6 y 5, denominadores de los demás, y se convertiría en  $\frac{30}{60}$ ; y luego los dos términos del tercero  $\frac{4}{3}$ , los multiplicaría por 12, producto de 6 por 2, denominadores de los demás, lo que da  $\frac{48}{60}$ ; con lo que tengo los tres quebrados  $\frac{50}{60}$ ,  $\frac{30}{60}$ ,  $\frac{48}{60}$ , que son iguales con los primitivos y tienen un mismo denominador.

Y si se observa que los denominadores 6 y 2 de los dos primeros, tienen comun el factor 2, bastaría para que los tres quedasen reducidos al mismo denominador, multiplicar los dos términos del primero solo por 5, los dos términos del segundo por el producto de 3, que es el factor que contiene el 6, además del 2, por 5, esto es, por 15; y los dos términos del tercero por 6, con lo cual se convertirían en  $\frac{25}{30}$ ,  $\frac{15}{30}$ ,  $\frac{24}{30}$ , que tienen el mismo denominador y son mas sencillos.

Como el denominador comun resulta de la multiplicacion de todos los denominadores, no se necesita mas que multiplicarlos una vez entre sí; por lo que, la regla general para no tener que hacer mas ni ménos de lo indispensable, es la siguiente: *multiplíquese cada numerador por el producto de los denominadores de los demás, y se tendrán de este modo los numeradores de los quebrados que han de quedar reducidos á un mismo denominador; y para encontrar el denominador, se mul-*

tiplicarán entre sí todos los denominadores.

Ejemplo  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{5}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{3}, \\ \text{dan } \frac{72}{120}, \quad \frac{60}{120}, \quad \frac{90}{120}, \quad \frac{40}{120}. \end{array} \right.$

Y si se tiene en consideracion, que el denominador del 2.<sup>o</sup> y 3.<sup>o</sup> tienen por factor comun el 2, se deberían multiplicar los dos términos del 1.<sup>o</sup> por 12; los del 2.<sup>o</sup> por 30; los del 3.<sup>o</sup> por 15 y los del 4.<sup>o</sup> por 20 y quedarían reducidos á  $\frac{36}{60}$ ,  $\frac{30}{60}$ ,  $\frac{45}{60}$ ,  $\frac{20}{60}$ .

Mr. Bourdon, en la página 58 de la undécima edición de su Aritmética, impresa en París el año de 1833, se propone reducir á un comun denominador los cinco quebrados  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{7}{11}$ ,  $\frac{10}{13}$ ,  $\frac{23}{25}$ ,  $\frac{29}{43}$ ; y dice: "Después de haber formado el producto de los cinco denominadores 8, 11, 13, 25, 43, lo que da el producto 1229800, se divide sucesivamente este producto por cada uno de los denominadores, y se obtienen los cinco cocientes 153725, 111800, 94600, 49192, 28600, que se colocan respectivamente debajo de las cinco fracciones propuestas; después de lo cual, se multiplican los dos términos de cada fracción por el cociente que le corresponde; y todas las fracciones están así reducidas al mismo denominador.....Este medio es por otra parte, sin contradicción, mucho mas expedito, que si para cada fracción, se efectuase la multiplicación de los denominadores de los otros cuatro. Deberá emplearse siempre que se tienen que reducir mas de tres fracciones al mismo denominador."

Esta regla de Mr. Bourdon, conforme la propone, es mucho mas complicada que la nuestra última. 1.<sup>o</sup> Porque en lo que dice "se multiplican los dos términos de cada fracción por el cociente que le corresponde, es inútil absolutamente el multiplicar el denominador por el cociente, puesto que ha de ser el mismo que el producto de todos los denominadores, que ya se suponen hallados; 2.<sup>o</sup> porque aunque se pusiese en la frase mencionada, se multiplicaba el numerador de cada quebrado por el cociente, resultaba mas embarazo por la regla de Mr. Bourdon, que por la nuestra, á causa de que la operación de dividir es mucho mas engorrosa que la de multiplicar, y está espuesta á mas equivocaciones; y 3.<sup>o</sup> porque la materialidad de las operaciones, prescindiendo del mayor cuidado intelectual que es necesario poner en la división que en la multiplicación, hay que escribir muchos mas guarismos en la regla de Mr. Bourdon, que en la nuestra.

Así es, que aplicadas ambas reglas á los quebrados propuestos, resulta que por la regla de Mr. Bourdon se necesita escri-

bir la séptima parte mas de guarismos que por la nuestra; y el resultado que por ambas hemos obtenido, es

$$\frac{461175}{1229800}, \frac{782600}{1229800}, \frac{946000}{1229800}, \frac{1131416}{1229800}, \frac{829400}{1229800}.$$

69 Esta operacion convierte los quebrados en otros de igual valor, pero mas complicados; y así, solo se ejecuta como auxiliar de otras; pero la que se debe hacer en todos los resultados donde haya quebrados, es *simplificarlos*. Se dice que se simplifica un quebrado *cuando se convierte en otro de igual valor, y cuyos términos son menores*.

Para esto, se dividen sus dos términos por 2 todas las veces que se pueda; luego por 3, y por los demás números primos, lo cual se conoce por lo dicho (59). Así, si quiero simplificar el quebrado  $\frac{72}{120}$ ; veo que sus dos términos se pueden dividir por 2: lo hago y tengo  $\frac{36}{60}$ , que es igual con  $\frac{72}{120}$ , y que se puede aun simplificar por 2; lo hago y tengo  $\frac{18}{30}$ , que aun se puede simplificar por 2; lo hago y tengo  $\frac{9}{15}$ , que no se puede simplificar por 2, pero sí por 3 (§ 59); lo hago y tengo  $\frac{3}{5}$ , que es igual con el  $\frac{72}{120}$  que se nos dió. En efecto, el  $\frac{72}{120}$  es el que provino (en el ejemplo de ántes) del  $\frac{3}{5}$ , al reducir los quebrados á un mismo denominador; y como ahora deshacemos lo que ántes hicimos, ha de resultar lo mismo que había.

Los principiantes deben simplificar todos los puestos anteriormente, como se ve en el que aquí se presenta.

$$\frac{9900}{13860} = \frac{4950}{6930} = \frac{2475}{3465} = \frac{825}{1155} = \frac{275}{385} = \frac{55}{77} = \frac{5}{7}.$$

*Sumar, restar, multiplicar y dividir quebrados.*

70 Los quebrados tambien se *suman, restan, multiplican y dividen*.

Para sumarlos se *reducen á un mismo denominador* (si no le tienen); *despues se suman los numeradores; á esta suma se le pone por denominador el denominador comun; y si este quebrado es impropio, esto es, si su numera-*

dor es mayor que su denominador, se divide el numerador por el denominador para sacar los enteros que contenga, y se simplifica si se puede.

Si quiero sumar  $\frac{3}{4}$  con  $\frac{2}{5}$ , los reduciré á un comun denominador (68), y se convertirán en  $\frac{15}{20}$ ,  $\frac{8}{20}$ ; despues sumaré los numeradores 15 y 8, y á la suma 23 le pondré por denominador el 20, que es el comun, y la suma será  $\frac{23}{20}$ ; que sacando los enteros será  $1\frac{3}{20}$ .

La operacion se indica así:  $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$ .

Aplicando la regla á estos ejemplos, se hallará

$$1.^\circ \quad \frac{3}{5} + \frac{2}{9} + \frac{4}{7} = \frac{189}{315} + \frac{70}{315} + \frac{180}{315} = \frac{439}{315} = 1\frac{124}{315};$$

$$2.^\circ \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{60}{90} + \frac{72}{90} + \frac{75}{90} = \frac{207}{90} = 2\frac{27}{90} = 2\frac{3}{10} = 2\frac{3}{10}$$

*Dem.* Se reducen á un comun denominador, porque no son homogéneos si no le tienen; despues se suman los numeradores, porque en ellos está el valor de los quebrados; y á esta suma se le pone por denominador el comun, para saber el nombre de aquellas partes. La simplificacion que despues se hace, es porque en todas las operaciones se deben presentar los resultados con la mayor sencillez. L. Q. D. D.

71 Al sumar quebrados pueden ocurrir tres casos: *sumar quebrados con quebrados*, que es lo que acabamos de ejecutar; *sumar un entero con un quebrado*; y *sumar números mistos con números mistos*.

La cuestion que conduce á sumar un entero con un quebrado, se presenta cuando se tiene un número misto, tal como  $4\frac{3}{5}$ , y se quiere saber cuántos quintos compone el entero junto con el quebrado. En este caso, se dice que *se reduce el entero á la especie del quebrado que le acompaña*; para lo cual *se multiplica el entero por el denominador del quebrado*; á esto *se añade el numerador*; y á la suma se le pone por denominador el denominador del quebrado. De manera, que para aplicarlo á  $7\frac{3}{5}$ , multiplicaré el 7 por el 5, al producto 35 le añadiré el numerador 3 del quebrado, y á la suma 38 le pondré por denominador el 5 del quebrado, y tendré en  $\frac{38}{5}$  ejecutada la operacion que se me pedía. Porque en este caso cada unidad vale cinco partes; luego 7 unidades

valdrán siete veces cinco ó 35 partes, y las 3 que se tenían serán 38 de estas partes, esto es, 38 quintas partes ó  $\frac{38}{5}$ , que es L. Q. D. D.

Del mismo modo se tiene  $14 \frac{5}{8} = \frac{117}{8}$ ;  $12 \frac{7}{11} = \frac{139}{11}$ .

72 Para sumar números mistos con números mistos, se suman los quebrados con los quebrados, y los enteros con los enteros, cuidando de sumar con estos los que resulten de la suma de los quebrados y se simplifica si se puede.

1.<sup>er</sup> ejem. Si quiero sumar  $45 \frac{3}{7}$  con  $27 \frac{4}{7}$  y con  $6 \frac{5}{7}$ , los pondré los unos debajo de los otros en esta forma.

Como los quebrados tienen un mismo denominador, sumaré los numeradores, pondré á esta suma el denominador común, y saco de la suma de los quebrados  $\frac{12}{7}$ ; pero en  $\frac{12}{7}$  hay un entero y  $\frac{5}{7}$ ; borro el  $\frac{12}{7}$ , y pongo debajo el  $\frac{5}{7}$ ; el 1 le coloco sobre los enteros, separándole con una media luna para que se conozca que ha provenido de la suma de los quebrados; sumo después los enteros y saco 79; por lo que la suma pedida es  $79 \frac{5}{7}$ .

$$\begin{array}{r} (1 \\ \hline 45 \frac{3}{7} \\ 27 \frac{4}{7} \\ 6 \frac{5}{7} \\ \hline 79 \frac{5}{7} \end{array}$$

2.<sup>o</sup> ejem. Si quiero sumar los números  $47 \frac{2}{5}$ ,  $9 \frac{1}{3}$  y  $138 \frac{3}{4}$ , primero reduciré los quebrados á un comun denominador, y ejecutaré la operación como aquí se ve: y saco la suma  $195 \frac{29}{60}$ .

$$\begin{array}{r} (1 \\ \hline 47 \frac{2}{5} \dots \frac{24}{60} \\ 9 \frac{1}{3} \dots \frac{20}{60} \\ 138 \frac{3}{4} \dots \frac{45}{60} \\ \hline 195 \frac{89}{60} \end{array}$$

73 Para restar quebrados se reducen á un comun denominador (si no le tienen), después se restan los numeradores; y á la resta se le pone por denominador el denominador común, y se simplifica si se puede.

1.<sup>er</sup> ejem. Si quiero restar  $\frac{2}{5}$  de  $\frac{3}{4}$ , los reduciré á un comun denominador (68), y se convertirán en  $\frac{8}{20}$  y  $\frac{15}{20}$ ; restando el 8 numerador del quebrado  $\frac{8}{20}$  correspondiente al sustraendo  $\frac{2}{5}$ , del 15 numerador del  $\frac{15}{20}$  correspondiente al minuendo  $\frac{3}{4}$ , y poniendo á la diferencia 7 el denominador comun 20, tendré la resta  $\frac{7}{20}$ , que no se puede simplificar.

La operación se indica así:  $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$ .

2.<sup>o</sup>  $\frac{13}{15} - \frac{5}{9} = \frac{117}{135} - \frac{75}{135} = \frac{42}{135} = \frac{14}{45}$ .

Dem. Se reducen á un comun denominador, porque en la resta los datos deben ser homogéneos; después se han de restar los numeradores, porque en ellos está el valor de los quebrados; y finalmente se ha de poner á

la resta el denominador común, porque es el que da nombre al quebrado. L. Q. D. D.

74 Al restar quebrados, pueden ocurrir tres casos: *restar un quebrado de otro*, que es lo que se acaba de hacer; *restar un quebrado de un entero*, y *restar un número misto de otro número misto*.

Para restar un quebrado de un entero, se le quita al entero una unidad; al lado de este entero, después de rebajada la unidad, se pone un quebrado cuyo numerador es igual á la diferencia que hay entre el denominador y el numerador del quebrado dado, y el denominador es el mismo que el del quebrado que se da; con lo que está hecha la resta.

Aplicando esta regla á los ejemplos siguientes, se encontrarán los resultados que ellos manifiestan.

1.º  $8 - \frac{3}{5} = 7\frac{2}{5}$ ; 2.º  $14 - \frac{2}{9} = 13\frac{7}{9}$ ; 3.º  $29 - \frac{14}{23} = 28\frac{9}{23}$ ; porque haciendo en todos una descomposición semejante á esta  $8 - \frac{3}{5} = 7 + \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = 7 + \frac{2}{5} = 7\frac{2}{5}$ , nos resulta L. Q. D. D.

75 Para restar un número misto de otro, se resta el quebrado del quebrado, y el entero del entero. Si después de reducidos á un mismo denominador, si no le tienen, el quebrado del sustraendo es mayor que el del minuendo, para poder restar se toma una unidad del minuendo, la cual se reduce á la especie del quebrado que le acompaña (lo que se consigue sumando el numerador del quebrado con el denominador, y á esto poniendo por denominador el común); de este quebrado que será impropio, se resta el del sustraendo, y luego al ejecutar la resta con los enteros, se debe advertir que al minuendo se le ha quitado una unidad.

1.º ejemplo. Si quiero restar  $18\frac{5}{7}$  de  $33\frac{8}{9}$ , los colocaré como aquí se ve:

reduciré á un común denominador los quebrados; y como sale el del sustraendo menor que el del minuendo, paso á restar el quebrado del quebrado y el entero del entero y sacó  $15\frac{11}{63}$ .

$$\begin{array}{r} 33\frac{8}{9} \dots \frac{56}{63} \\ 18\frac{5}{7} \dots \frac{45}{63} \\ \hline 15\frac{11}{63} \end{array}$$

2.º ejem. Si quisiera restar  $24\frac{7}{8}$  de  $45\frac{6}{11}$ , los colocaría como aquí se ve;

reduciendo los quebrados á un común denominador, sale menor el del minuendo; tomo una unidad del entero, que en este caso

$$\begin{array}{r} 45\frac{6}{11} \dots \frac{48}{88} \dots \frac{136}{88} \\ 24\frac{7}{8} \dots \frac{77}{88} \dots \frac{77}{88} \\ \hline 20\frac{59}{88} \end{array}$$

vale  $\frac{88}{88}$ , y sumada con los  $\frac{48}{88}$  me da  $\frac{136}{88}$ ; paso despues á la resta considerando al 5 del 45 como 4; y tengo por último 20  $\frac{59}{88}$ .

76 Para multiplicar un quebrado por otro se *multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador*, y se simplifica. V. g. si quiero multiplicar  $\frac{2}{5}$  por  $\frac{4}{7}$  diré: 2 por 4 son 8; 5 por 7 son 35; poniendo por numerador el producto de los numeradores, y por denominador el de los denominadores, tendré en  $\frac{8}{35}$  el producto pedido.

*Dem.* Porque si tuviera que multiplicar el  $\frac{2}{5}$  por 4, estaba reducida la operacion (65) á multiplicar su numerador por 4; y en este caso el producto sería  $\frac{8}{5}$ ; pero de multiplicar el  $\frac{2}{5}$  por un número siete veces menor que 4, esto es por  $\frac{4}{7}$ , ha de resultar un producto (61, 3<sup>o</sup>) siete veces menor que  $\frac{8}{5}$ ; y como esto se consigue (66) multiplicando su denominador por 7, resulta, ejecutándolo, que  $\frac{8}{35}$  es el producto verdadero. L. Q. D. D.

Del mismo modo  $\frac{7}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$ ;  $\frac{8}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{40}{90} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$ .

*Esc.* Cuando el multiplicador sea un quebrado *propio*, esto es, que su numerador sea menor que su denominador, *el producto que resulte será menor que el multiplicando*; porque el numerador de este se multiplica por un número menor que el número por que se multiplica su denominador. Cuando el multiplicador sea un quebrado *impropio*, *el producto será mayor que el multiplicando*; porque el numerador de este se multiplica por un número mayor que el número por que se multiplica el denominador; y cuando el multiplicador sea la unidad en forma de quebrado, el producto será igual con el multiplicando; porque su numerador y denominador se multiplican por un mismo número.

77 Al multiplicar quebrados pueden ocurrir tres casos: *multiplicar un quebrado por otro*, que es lo que acabamos de explicar; *multiplicar un entero por un quebrado* ó *un quebrado por un entero*; y *multiplicar un número misto por otro misto*.

Para multiplicar un entero por un quebrado ó un quebrado por un entero, *se multiplica el entero por el numerador del quebrado, y al producto se le pone por denominador el denominador del quebrado, y se simplifica si se puede*.

1.<sup>er</sup> Ej. Si quiero multiplicar 4 por  $\frac{5}{7}$ , multiplicaré el 4 por 5, al producto 20 le pondré por denominador el denominador 7 del quebrado, y tendré que el producto será  $\frac{20}{7}$ ; que sacando los enteros se convierte en  $2\frac{6}{7}$ .

La operacion se indica así:  $4 \times \frac{5}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$ .

Del mismo modo  $7 \times \frac{3}{14} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ .

*Dem.* Esta regla está fundada en lo dicho (65 esc.), y tambien se deduce del caso anterior, poniendo al entero la unidad por denominador.

78 Para multiplicar un número misto por otro misto, se reduce el entero á la especie del quebrado que le acompaña en cada factor, y despues se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

Ej. Si quiero multiplicar  $3\frac{2}{5}$  por  $2\frac{4}{7}$ , reduciré en ambos factores el entero á la especie del quebrado que le acompaña, y tendré que multiplicar  $\frac{17}{5}$  por  $\frac{18}{7}$ ; y ejecutando la operacion (76), tendré

$$3\frac{2}{5} \times 2\frac{4}{7} = \frac{17}{5} \times \frac{18}{7} = \frac{306}{35} = 8\frac{26}{35}.$$

Del mismo modo

$$28\frac{8}{9} \times 24\frac{3}{4} = \frac{260}{9} \times \frac{99}{4} = \frac{25740}{36} = \frac{12870}{18} = \frac{6435}{9} = \frac{2145}{3} = 715.$$

79 Para dividir un quebrado por otro, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y este será el numerador del cociente: y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, y este producto será el denominador del cociente, y se simplifica.

Ej. Si quiero dividir  $\frac{3}{4}$  por  $\frac{2}{7}$ , multiplicaré el numerador 3 del dividendo por el denominador 7 del divisor, y el producto 21 será el numerador del cociente; despues multiplicaré el denominador 4 del dividendo por el numerador 2 del divisor, y el producto 8 será el denominador del cociente, el cual será  $2\frac{1}{8}$  ó  $2\frac{1}{8}$ .

Del mismo modo  $\frac{4}{9} : \frac{8}{15} = \frac{60}{72} = \frac{30}{36} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$ .

*Dem.* Porque si solo tuviese que dividir el  $\frac{3}{4}$  por 2, estaba reducida la operacion (66) á multiplicar su denominador por 2; de manera que  $\frac{3}{8}$  sería el cociente; luego de dividir el  $\frac{3}{4}$  por un número siete veces menor que 2, esto es por  $\frac{2}{7}$ , ha de resultar (6r, 4.<sup>o</sup>) un cociente siete veces mayor que  $\frac{3}{8}$ ; y como esto se consigue (65) multiplicando su numerador 3 por 7, resulta, ejecutándolo, que

el verdadero cociente será  $2\frac{1}{8}$ , ó lo que es lo mismo  $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = 2\frac{1}{8} = 2\frac{5}{8}$ , que era L.Q. D. D.

80 Al dividir quebrados pueden ocurrir cuatro casos: *dividir un quebrado por otro*, que es lo que se acaba de hacer; *dividir un entero por un quebrado*; *dividir un quebrado por un entero*; y *dividir un número misto por otro misto*.

Para dividir un entero por un quebrado, *se multiplica el entero por el denominador del quebrado, á este producto se le pone por denominador el numerador del quebrado, y se simplifica si se puede*.

Ej. Si quiero dividir 7 por  $\frac{2}{5}$ , multiplicaré el entero 7 por el denominador 5, y tendré 35; á este producto le pondré por denominador el numerador 2 del quebrado, y tendré  $\frac{35}{2}$ , ó sacando los enteros  $17\frac{1}{2}$ .

$$\text{Del mismo modo } 9 : \frac{6}{7} = \frac{63}{6} = 10\frac{3}{6} = 10\frac{1}{2}.$$

81 Para dividir un quebrado por un entero *se multiplica el denominador del quebrado por el entero, y queda hecha la division*.

V. g. si quiero dividir  $\frac{3}{5}$  por 6, multiplicaré el denominador 5 por el entero 6, y tendré por cociente  $\frac{3}{30}$ , ó  $\frac{1}{10}$  despues de simplificado.

$$\text{Del mismo modo } \frac{6}{13} : 4 = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}; \quad \frac{15}{17} : 9 = \frac{15}{153} = \frac{5}{51}.$$

*Dem.* Poniendo en este caso y el anterior, al entero la unidad por denominador, la demostracion se reduce á la dada (79), ó se puede deducir de lo dicho (61, 4º y 66 esc.).

82 Para dividir un número misto por otro misto; *se reduce cada entero á la especie del quebrado que le acompaña, y despues se divide como un quebrado por otro*.

V. g. quiero dividir  $5\frac{2}{3}$  por  $2\frac{5}{7}$ ; primero reduciré cada entero á la especie de su quebrado, y tendré que dividir  $\frac{17}{3}$  por  $\frac{19}{7}$ ; que (79) dará  $\frac{17}{3} : \frac{19}{7} = \frac{119}{57} = 2\frac{5}{57}$ .

$$\text{Del mismo modo } 9\frac{5}{7} : 4\frac{6}{11} = \frac{68}{7} : \frac{50}{11} = \frac{748}{350} = \frac{374}{175} = 2\frac{24}{175}.$$

*Esc.* Ademas puede ocurrir el dividir un quebrado

ó un entero por un número misto, y al contrario; pero reduciendo el entero á la especie del quebrado, se tienen los casos anteriores, que se practican como se ve en estos ejemplos.

$$1.^\circ \quad \frac{3}{7} : 2\frac{4}{5} = \frac{3}{7} : \frac{14}{5} = \frac{15}{98}; \quad 2.^\circ \quad 9 : 5\frac{3}{4} = 9 : \frac{23}{4} = \frac{36}{23} = 1\frac{13}{23};$$

$$3.^\circ \quad 5\frac{3}{7} : 4 = \frac{38}{7} : \frac{4}{9} = \frac{342}{28} = \frac{171}{14} = 12\frac{3}{14};$$

$$4.^\circ \quad 6\frac{2}{3} : 5 = \frac{20}{3} : 5 = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

*De la valuacion de los quebrados.*

83 Valuar un quebrado es hallar su valor en unidades de especie inferior á la que se refiere. V. g. en  $\frac{1}{3}$  de vara no hay ninguna vara; pero como la vara tiene 3 pies, 1 pie será la tercera parte de la vara, y por lo mismo (intr. ax. 5.<sup>o</sup>)  $\frac{1}{3}$  de vara = 1 pie, y está valuado el quebrado.

Para valuar un quebrado, se multiplica el numerador por el número que expresa las veces que la unidad en que se quiere valuar el quebrado, está contenida en aquella á que se refiere el quebrado, y esto se parte por el denominador; si de la division resulta un número misto, y hay todavía unidades de especie inferior, se hace con el quebrado lo mismo; y así se continúa hasta que no haya mas unidades de especie inferior; en cuyo caso, si queda todavía quebrado, se desprecia si el numerador no llega á ser la mitad del denominador: y se añade en vez del quebrado una unidad á las unidades anteriores, si el numerador llega ó pasa de la mitad del denominador.

Así, si quiero saber cuánto valen  $\frac{3}{7}$  de doblon, multiplicaré el numerador 3 por 4, que son los pesos que tiene el doblon, y dividiré el producto 12 por 7, lo que da 1 peso y  $\frac{5}{7}$  de peso. Para averiguar los reales que hay en  $\frac{5}{7}$  de peso, multiplicaré el numerador 5 por 15, que son los reales que contiene un peso, y dividiré el producto 75 por 7, y tendré 10 reales y  $\frac{5}{7}$  de real; para

averiguar los maravedises que hay en  $\frac{5}{7}$  de real, multiplicaré el numerador 5 por 34, que son los maravedises que tiene un real, y dividiré el producto 170 por 7, y tendré 24 maravedises y  $\frac{2}{7}$  de maravedí, que como no hay unidad inferior al maravedí, y el numerador 2 no es la mitad del denominador 7, le desprecio: y tengo que los  $\frac{3}{7}$  de doblon valen 1 peso, 10 reales y 24 maravedises.

*Dem.* La razon de esto es que  $\frac{3}{7}$  de doblon es lo mismo (63) que 3 doblones repartidos entre 7; y como no les toca á doblon, se reducen á pesos, estos á reales, y los reales á maravedises, para ver á cómo les toca en estas unidades de especie inferior.

*De los quebrados ó fracciones decimales.*

---

84 La teoría de los quebrados acabada de explicar, embaraza mucho los cálculos, en razon de la ninguna ley que siguen los denominadores, que van variando en cada quebrado. Para evitar este inconveniente, y facilitar y uniformar todas las operaciones, se han inventado las *fracciones decimales*; las que al mismo tiempo que son un caso particular de los quebrados comunes, llenan todos los objetos mencionados.

Son, pues, las decimales, *unos quebrados que tienen por denominador 10; 100; 1000; etc. y en general la unidad seguida de ceros.* Para formarnos una idéa exacta de las decimales, concebirémos dividida la unidad en diez partes iguales, que se llaman *décimas*; concibiendo dividida cada décima en diez partes iguales, la unidad tendrá ciento, y por lo mismo se llaman *centésimas* partes de la unidad; concibiendo cada centésima dividida en diez partes; estas serán *milésimas* de la unidad; y continuando dividiendo en otras diez cada una que vaya saliendo, resultarán las *diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, diezmillonésimas, cienmillonésimas, milmillonésimas, diezmilmillonésimas, cienmilmillonésimas, biltonésimas, diezbillonésimas etc.*

Por la uniformidad de los denominadores, y la ley que sigue cada parte de ir siendo diez veces menor, no se escribe el denominador de estos quebrados, sinó que *se po-*

nen, á la derecha de las unidades, las décimas; á la derecha de estas, las centésimas; despues las milésimas, luego las diezmilésimas, cienmilésimas, etc. Y para conocer el guarismo que espresa las unidades, se pone entre él y las décimas una coma; y si no hay unidades, se pone 0 ántes de la coma, para que ocupe el lugar de las unidades.

V. g. si quiero espresar *cuarenta y cinco enteros y seis décimas*, escribiré así: 45,6; y la coma da á entender que el guarismo 5 espresa las unidades, y el 6 las décimas; si solo hubiera querido escribir *seis décimas*, hubiera puesto 0 en lugar de las unidades, y tendría escritas las *seis décimas*, de este modo: 0,6.

Si se quiere espresar el denominador, se puede poner  $\frac{6}{10}$  en vez de 0,6, y  $45\frac{6}{10}$  en vez de 45,6; donde se debe advertir que la coma hace oficios de denominador; y que cuando se quiera espresar este, se pondrá la unidad seguida de tantos ceros como guarismos hay despues de la coma. Por ejemplo

$$3,507 = 3\frac{507}{1000}, \text{ y } 0,0039 = \frac{39}{10000}.$$

85 Un número que lleva enteros y decimales, es un verdadero número misto: y así, para leerle, se leerá primero el entero (13), y luego los guarismos decimales del mismo modo, pronunciando, despues de estas, la denominacion que les corresponda: la cual si no se conoce al golpe por haber muchos guarismos decimales, se averigua diciendo desde la coma á la derecha, en el primer lugar décimas, en el segundo centésimas, y así sucesivamente, hasta el último guarismo, cuyo nombre se apunta si es complicado el número. Para que no se confundan las comas de la division de periodos con la de las decimales, se hace esta mayor que aquellas.

Así, si quisiera leer el número

$$7056403274,3509053405703364;$$

averiguaría la especie de unidades del último guarismo 4, y hallaría ser *diezmilbillonésimas*. Despues, le prepararé (13) en esta forma: 7,056,403,274,3,509,053,405,703,364;

y se lee así: *siete mil cincuenta y seis millones, cuatrocientos tres mil, doscientos setenta y cuatro unidades ó enteros: tres mil quinientos nueve billones, cincuenta y tres mil cuatrocientos cinco millones, setecientos tres mil trescientas sesenta y cuatro diezmilbillonésimas.*

86 El valor de las decimales no se altera cuando se ponen ó quitan ceros á continuacion de los guarismos signi-

*ficativos.* V. g.  $0,7=0,70=0,700=0,7000=0,70000$  etc.

Porque como  $0,7=\frac{7}{10}$ , multiplicando sus dos términos por 10, por 100, por 1000, etc. no se alterará el quebrado (67), y se tendrá que

$$0,7=\frac{7}{10}=\frac{70}{100}=\frac{700}{1000}=\frac{7000}{10000}=\text{etc.}$$

ó  $0,7=0,70=0,700=0,7000=\text{etc.}$

Si teniendo ceros al fin, se quitan, resultan los dos términos divididos por un mismo número, lo que (67) tampoco altera el quebrado. L. Q. D. D.

87 Si los ceros se colocan entre la coma y los guarismos significativos, *se hace el quebrado tantas veces menor como expresa la unidad seguida de tantos ceros como se han puesto entre la coma y los guarismos significativos*; porque en este caso se hace diez, ciento, mil, etc. veces menor el valor de cada parte, y no se hace diez, ciento, mil, etc., veces mayor el número de ellas.

Del mismo modo, si en un número que lleva enteros con decimales, se corre la coma un lugar hacia la izquierda, como el guarismo que ántes espresaba unidades, ahora espresará décimas; el que ántes décimas, ahora centésimas; y así sucesivamente; resulta que cada parte se ha hecho diez veces menor, y por lo mismo esta mutacion de la coma habrá convertido al número propuesto en otro diez veces menor. Si se hubiera corrido la coma dos lugares hacia la izquierda, hubiéramos hecho cien veces menor á dicho número; y en general, *con correr la coma un número cualquiera de lugares hacia la izquierda, se hace al número tantas veces menor, como expresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.*

Por el contrario, *corriendo la coma un número cualquiera de lugares hacia la derecha, quedará hecho el número tantas veces mayor, como expresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.*

Así, si en el número 8532,74914 coloco la coma entre el 5 y el 3, tendré 85,3274914, que será cien veces menor que el propuesto; y si la pusiera entre el 9 y el 1 tendría 8532749,14, que es mil veces mayor que el propuesto.

88 Puesto que las decimales siguen la misma ley que los enteros, y se escriben y leen lo mismo que ellos, es un punto de la mayor importancia el sustituir los que-

brados decimales á los comunes, lo que se consigue convirtiendo en decimales los quebrados que hayan de entrar en los cálculos. Para esto, se toma el numerador del quebrado por dividendo y el denominador por divisor, y se divide el uno por el otro; mas si el quebrado es propio, no cabrá el divisor en el dividendo; y así, se pone 0 en el cociente, y despues se añade un 0 al dividendo y se divide por el divisor; el cociente se pone á la derecha de la coma; se multiplica por el divisor y se resta. A la resta se añade otro cero y se divide por el divisor; lo que resulta se pone en el cociente á la derecha del guarismo anterior, se multiplica y resta. A la resta se añade otro cero, y se continúa añadiendo un cero por cada guarismo decimal que se quiera sacar: observando que si, despues de añadir un cero no cabe el divisor en el dividendo, se pone cero al cociente y se añade otro cero al dividendo.

1.<sup>er</sup> ej. Quiero sacar con tres decimales el valor de  $\frac{5}{17}$ ; ejecutaré la operacion como aquí se ve:

Tomo el 5 por dividendo y el 17 por divisor; veo que 17 no cabe en 5; y por lo mismo pongo 0 en el cociente, y despues la coma; añado un

$$\begin{array}{r|l} 50 & 17 \\ 160 & 0,294 \\ 0070 & \\ 02 & \end{array}$$

0 al 5, y veo que 50 entre 17 les toca á 2, que pongo en el cociente despues de la coma; multiplico este cociente por el divisor, le resto del dividendo 50 y saco la resta 16. A esta añado un cero, y veo que 160 entre 17 les cabe á 9; que pongo en el cociente; multiplico por el divisor, y resto del dividendo 160. Al lado de la resta 7 pongo otro cero, veo que 70 entre 17 les toca á 4 que pongo en el cociente; multiplico por el divisor y resto. Del mismo modo continuaría si quisiera sacar mas de los tres guarismos decimales que me propuse; con lo cual tengo reducido el quebrado  $\frac{5}{17}$  á quebrado decimal, aproximado hasta milésimas.

2.<sup>o</sup> ej. Si quiero reducir á quebrado decimal  $\frac{8}{943}$ ; lo ejecutaré como aquí se ve.

Tomaré el 8 por dividendo, el 943 por divisor, y pongo en el cociente cero y coma; añado un cero al 8, y como 80 no contiene al divisor 943, pongo 0 en el cociente; añado otro al dividendo, y pongo tambien 0 al cociente; añado otro 0 al dividendo, y veo que 943 en 8000 ó 9 en 80 cabe 8 veces; pongo 8 en

$$\begin{array}{r|l} 8000 & 943 \\ 04560 & 0,008483 \\ 07880 & \\ 03360 & \end{array}$$

el cociente despues de los dos ceros; multiplico por el divisor y resto; á la resta le añado un cero, y así continuare hasta sacar los guarismos que necesite, que supongo aquí que son seis, y tengo el quebrado  $0,008483$ , que es el mismo que el  $\frac{8}{943}$ , con diferencia de ménos de una millonésima parte de la unidad.

*Dem.* Como de tomar el numerador por dividendo y el denominador por divisor, no puede salir ningun entero, se pone cero y coma en el cociente; añadiendo un cero al dividendo, se convierte en 80, que para que no se altere su valor, deben considerarse como décimas; y por lo mismo se vé si les toca á alguna; y si no, se pone tambien cero en el cociente en el lugar de las décimas; y continuando el mismo racionio respecto de todo lo demas de la regla, resulta L. Q. D. D.

89 Al convertir los quebrados en decimales resulta *cociente exacto*, cuando el denominador no tiene mas factores simples que el 2 y el 5, como 8; 16; etc. etc. 25; 125, etc.

V. g. si convierto en decimales los quebrados  $\frac{5}{8}$ ;  $\frac{7}{25}$ ;  $\frac{14}{125}$ , lo haré como se ve en (A), (B), (C).

(A)	(B)	(C)
$\begin{array}{r} 50 \\ 20 \\ 40 \\ 0 \end{array} \left  \begin{array}{r} 8 \\ 0,625 \end{array} \right.$	$\begin{array}{r} 70 \\ 200 \\ 000 \end{array} \left  \begin{array}{r} 25 \\ 0,28 \end{array} \right.$	$\begin{array}{r} 140 \\ 150 \\ 0250 \\ 000 \end{array} \left  \begin{array}{r} 125 \\ 0,112 \end{array} \right.$

y obtengo cociente exacto; por lo que diré, que

$$\frac{5}{8} = 0,625; \quad \frac{7}{25} = 0,28, \quad \text{y} \quad \frac{14}{125} = 0,112.$$

Si no sale cociente exacto, sucederá que como la resta ha de ser siempre menor que el divisor, así que se hayan sacado tantas restas diferentes como unidades tiene el divisor ménos una, la siguiente deberá ser una de las anteriores ó el mismo numerador; de donde se sigue que añadiendo un 0, dará el mismo cociente y resta que dió ántes; á esta le sucederá lo mismo; y así, se pondrán aquellos guarismos las veces que se quiera. Estas fracciones se llaman *periódicas*.

Así, si convierto en decimal el quebrado  $\frac{5}{7}$ , tendré (A) que al

sesto guarismo hallo la resta 5, que es el mismo numerador;

$$\begin{array}{r}
 \text{(A)} \\
 \begin{array}{r}
 50 \\
 10 \\
 30 \\
 20 \\
 60 \\
 40 \\
 5
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 7 \\
 \hline
 0,714285
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{(B)} \\
 \begin{array}{r}
 40 \\
 70 \\
 40 \\
 7
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 11 \\
 \hline
 0,3636
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

por lo que se repetirán los mismos guarismos, y tendré

$$\frac{5}{7}=0,714285714285714285 \text{ etc.}$$

Si convierto en decimal el quebrado  $\frac{4}{11}$ , encuentro (B) que al segundo guarismo se repite el numerador; por lo que

$$\frac{4}{11}=0,363636363636 \text{ etc.}$$

Si convierto el  $\frac{2}{3}$ , tendré que  $\frac{2}{3}=0,666666 \text{ etc.}$

Si la resta, que se repite, no es el mismo numerador del quebrado, entónces la fracción es *en parte periódica*, y *en parte no*, como se verá en estos quebrados

$$\frac{7}{12} \text{ y } \frac{593}{925} \text{ que dan } \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{7}{12}=0,58333 \text{ etc.} \\
 \text{y } \frac{593}{925}=0,64108108108108 \text{ etc.}
 \end{array} \right.$$

*Sumar, restar, multiplicar y dividir decimales.*

90 Para sumar las decimales se ponen los sumandos los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan las décimas debajo de las décimas, las centésimas debajo de las centésimas etc. esto es, que la coma en todos los sumandos forme columna; despues se tira una raya y se suman exactamente como si fuesen enteros, teniendo cuidado de poner la coma en la suma, de modo que forme columna con las de los sumandos.

1.<sup>er</sup> ejemplo. Si quiero sumar 0,027 con 35,46, con 783,0639,

con 0,3, con 9,53 y con 32,0757, los pondré los años debajo de los otros como aquí se ve :

Y despues de tirada la raya, empiezo por la derecha diciendo: 9 y 7 son 16, pongo 6 debajo de la	0,027
raya, y paso á la columna siguiente donde digo: 7 y	35,46
1 que llevo son 8, y 3 son 11, y 5 son 16, pongo 6	783,0639
y llevo 1 para añadirla á la suma de la columna si-	0,3
guiente; y continúo la operacion como si fuesen en-	9,53
teros (26), teniendo cuidado de poner la coma en la	32,0757
suma debajo de las de los sumandos, esto es entre el	<hr style="width: 100%;"/>
0 y el 4, y digo que la suma es 860,4566.	860,4566

2.<sup>o</sup> ej.  $85,37+9,0345+0,6382+42,085=137,1277$ .

*Dem.* Como haciendo la colocacion dicha, y sumando en columna, sumamos todas las unidades de una misma especie, y todas las sumas parciales las reunimos en una sola al mismo tiempo que las vamos sacando, resulta (intr. ax. 3.<sup>o</sup>) L. Q. D. D.

91 Para restarlas, se pone el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de cada especie, esto es, que la coma del sustraendo corresponda debajo de la del minuendo; se tira una raya, y se resta como en los números enteros, poniendo la coma en la resta, formando columna con las de arriba.

Aquí puede ocurrir que no tengan un mismo número de guarismos decimales el minuendo y sustraendo: si el sustraendo tiene ménos, se ponen aquellos guarismos que tiene de mas el minuendo, y luego se restan los del sustraendo de los que quedan en el minuendo; si el minuendo tiene ménos que el sustraendo, se resta el guarismo de la derecha del sustraendo de 10, y todos los demas de 9, hasta llegar al primer guarismo del minuendo, el cual se considera con una unidad ménos.

1.<sup>er</sup> ejemplo. Quiero restar de 625,4685 el número 354,8796; pondré el sustraendo 354,8796 debajo del minuendo como he dicho y se ve en (A):

(A)	(B)	(C)
625,4685	8375,75426392	475,36
354,8796	789,4358	287,4753825
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
270,5889	7586,31846392	187,8846175

y despues de tirada la raya, resto como si fuesen enteros (31), cuidandó de poner la coma entre el 0 y el 5, y saco la resta 270,5889.

2.<sup>o</sup> *ej.* Si quisiera restar de 8375,75426392 el número 789,4358, los colocaría como se ve en (B).

Y como el sustraendo tiene ménos guarismos decimales que el minuendo, pongo debajo de la raya los cuatro guarismos 6392 del minuendo, que no tienen correspondientes en el sustraendo, y despues resto como ántes, y saco 7586,31846392.

3.<sup>er</sup> *ej.* Si de 475,36 quisiera restar 287,4753825, los pondría como se ve en (C).

Y como el sustraendo tiene mas guarismos que el minuendo, diría: de 5 a 10 van 5 que pongo; de 2 á 9 van 7; de 8 á 9 va 1; de 3 á 9 van 6; de 5 á 9 van 4; ahora debo considerar al 6 del minuendo con una unidad ménos, y digo: de 7 á 15 van 8, y de 15 llevo una; y continuando la operacion como ántes saco la resta 187,8846175.

*Dem.* En los dos primeros casos es la misma (29); en el tercero, es porque se pueden considerar despues de los guarismos decimales los ceros que se deséen sin alterar su valor (86), y queda rēducida la operacion á la espuesta (32), que por comodidad en este caso se practica del modo que hemos dicho. L. Q. D. D,

92 Para multiplicar las decimales no se hace caso de la coma, se multiplican como si fuesen números enteros, y luego en el producto se separan con la coma tantos guarismos de derecha á izquierda como decimales había en ambos factores juntos; y si no hay bastantes, se completarán con ceros á la izquierda.

1.<sup>er</sup> *ej.* Quiero multiplicar 5,37 por 6,3; tomaré por multiplicador el 6,3, y le pondré debajo del multiplicando como si no hubiese coma, conforme se ve en (A):

(A)	(B)	(C)	(D)
5,37	0,35	0,29	0,0273
6,3	0,4	0,3	0,0026
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
1611	0,140	0,087	163 <sup>s</sup>
3222			546
<hr style="width: 100%;"/>			<hr style="width: 100%;"/>
33,831			0,0007098

Después de tirada la raya, multiplicaré (44) el 5,37 por el 6,3 sin hacer caso de la coma, y separando en el producto 33831 tres guarismos de derecha á izquierda, que son los decimales que había en ambos factores, saco 33,831 que es el producto verdadero.

2.<sup>o</sup> *ej.* Si quiero multiplicar 0,35 por 0,4, ejecutaré la operación como se ve en (B).

Multiplicaré el 35 por 4, lo que me da el producto 140; y como debo separar tres guarismos, que son los que hay en ambos factores juntos, pondré ántes un cero y tendré 0,140; pero como los ceros, después de los guarismos decimales, no les aumentan ni les disminuyen (86), borraré el cero que hay después del 4, y diré que el producto es 0,14.

3.<sup>er</sup> *ej.* Si quiero multiplicar 0,29 por 0,3, ejecutaré la operación como se ve en (C).

Multiplicaré el 29 por 3; y como el producto 87 no tiene más de dos guarismos, y debo separar tres, supliré con ceros los guarismos que me falten, y tendré el producto 0,087.

Por último, si quisiera multiplicar 0,0273 por 0,0026, haría la operación como se ve en (D), y tendría el producto 0,00007098.

*Dem.* Con prescindir de la coma en el multiplicando, le hacemos tantas veces mayor como espresa la unidad seguida de tantos ceros como guarismos decimales tiene (87); y con prescindir de ella en el multiplicador, le hacemos tantas veces mayor como espresa la unidad seguida de tantos ceros como guarismos decimales hay en él; luego (61, 3.<sup>o</sup>) el producto debe salir tantas veces mayor como espresa el producto de estos dos números; luego para obtener el verdadero, se deberá hacer este mismo número de veces menor: lo que se consigue (87), separando con la coma tantos guarismos como decimales hay en ambos factores juntos. (\*)

---

(\*) Como en el producto se han de hallar tantos guarismos decimales como hay en los dos factores, y en muchas ocasiones no interesa el sacar exactos sino unos cuantos, es de la mayor importancia manifestar el modo de abreviar esta operación; lo cual se consigue por la siguiente regla: *Colóquese el multiplicador debajo del multiplicando, de modo que se correspondan en columna las comas. Véase cuál es el guarismo de especie superior del multiplicador; si está en el lugar de las unidades, tómense en el multiplicando tan-*

93 De lo dicho (87) se deduce, que un número, que lleva enteros y decimales ó decimales solas, se multiplica por 10, corriendo la coma un lugar hacia la derecha;

tos guarismos decimales como se quieran en el producto, separando los otros con una raya si hay mas, ó añadiendo los ceros que se necesiten si hay menos. Si dicho guarismo se halla á la derecha de la coma, vease qué lugar ocupa despues de ella; el número, que espresa este lugar, se restará del que espresa los guarismos que se quieren sacar; y se tomarán en el multiplicando tantos guarismos decimales como unidades tenga dicha resta, separando los otros con una raya si hay mas, ó añadiendo ceros si hay menos. Si el espresado guarismo se halla á la izquierda de las unidades, se verá qué lugar ocupa despues de ellas; el número que espresese este lugar se sumará con el que espresa los guarismos que se quieren sacar; y se tomarán en el multiplicando tantos guarismos decimales como unidades tenga esta suma, separando los otros si hay mas, ó añadiendo ceros si hay menos. Hecha ya esta separacion, multiplíquese todo lo que queda del multiplicando á la izquierda de la raya, por dicho guarismo de especie superior del multiplicador; póngase un punto sobre el último guarismo del multiplicando, y otro debajo del guarismo del multiplicador por el que se acaba de multiplicar; pásese á multiplicar todo el multiplicando, menos el guarismo apuntado, por el segundo guarismo del multiplicador, contando de izquierda á derecha, y su producto póngase debajo del anterior, de manera que se correspondan en columna los últimos guarismos. Señálase igualmente con un punto el último guarismo del multiplicando, que hemos considerado, y el del multiplicador por el cual hemos multiplicado; multiplíquese por el siguiente guarismo, y colóquese el producto debajo de los anteriores sin correrle ningun lugar; y continúese del mismo modo hasta que no haya mas guarismos que apuntar en el multiplicando ó multiplicador; despues se suma todo esto, y en la suma se separan tantos guarismos como se queria que resultasen en el producto.

Al ejecutar esta operacion, conviene multiplicar tambien el último ó dos últimos guarismos apuntados del multiplicando por el guarismo del multiplicador que hace de nuevo multiplicador parcial, con el objeto de saber las que se llevan para añadirlas al producto del primer guarismo del multiplicando; pero, lo mejor es hacer la operacion como si quisieramos hallar un guarismo ó dos guarismos mas en operaciones bastante grandes.

1.<sup>er</sup> Ej. Si tuviera que multiplicar 27,452895297 por 5,6029688752, obtendria en el producto diez y nueve guarismos decimales; y si por la naturaleza de la operacion me bastan solo cuatro guarismos exactos, perdía todo el tiempo que gastaba en sacar los quince guarismos restantes, que, despues de hecha la multiplicacion, habia de despreciar.

Para encontrar exactos los cuatro guarismos decimales, sin que en ningun caso puedan dejar de serlo, conviene hacer la operacion como para encontrar seis guarismos decimales. Para conseguirlo, coloco los

por 100 corriéndola dos; por 1000 corriéndola tres; y en general; para multiplicar por la unidad seguida de cierto número de ceros, se correrá la coma tantos lugares

factores como dice la regla en esta forma:

Y como el guarismo de especie superior del multiplicador es el 5, y ocupa el lugar de las unidades, debo tomar en el multiplicando los seis guarismos que deséo en el producto; y por consiguiente separo con una raya los tres últimos guarismos del multiplicando, del modo que allí se ve: multiplico todo lo que hay á la izquierda de dicha raya por el 5, y el producto lo coloco de modo que el último guarismo caiga debajo del 5, del multiplicando diciendo: 5, guarismo de especie superior del multiplicador, por 5, último guarismo del multiplicando que considero, son 15; pongo el 5 de modo que se corresponda debajo del 5 del multiplicando, y guardo la una que llevo para añadirla al producto del 9 por 5, y continúo la multiplicacion parcial hasta que obtengo el producto 157264465 sin hacer caso de la coma en ninguno de los factores.

.....	27,452895   297
.....	5,602968 8732
.....	.....
.....	157264465
.....	16471754
.....	54904
.....	24705
.....	1644
.....	216
.....	16
.....	1
.....	155,817685

Hecho esto, pongo un punto encima del 3 del multiplicando, y otro punto debajo del 5 del multiplicador para que me indiquen que ya no debo contar con dichos guarismos para nada. Ahora debo multiplicar por el 6, segundo guarismo del multiplicador, contando de izquierda á derecha por todo lo que queda en el multiplicando á la izquierda del 3 apuntado, que es 2745289, diciendo: 6 por 9 son 54, pongo el 4 debajo del último guarismo 5 del producto parcial anterior, y guardo las 5 que llevo para añadirlas al producto de 6 por 8; y continuando de este modo, hallo por segundo producto parcial 16471734. Señalo el guarismo 9 con un punto encima, y el 6 con un punto abajo. Ahora debo multiplicar por el tercer guarismo del multiplicador todo lo que hay en el multiplicando á la izquierda del 9; pero como cualquier número multiplicado por 0 da 0, escuso esta multiplicacion; pero señalo con puntos el 8 del multiplicando y el 0 del multiplicador, para dar á entender, que ya no debo contar con ellos para nada. En seguida, debo multiplicar todo lo que hay á la izquierda del 8 por el 2, que es el cuarto guarismo del multiplicador contando de izquierda á derecha; y el producto 54904 lo pongo debajo de los anteriores, de modo que se correspondan sus últimos guarismos á la derecha en columna. Señalo con puntos el 2 del multiplicando por donde he principiado la multiplicacion y el 2 del multiplicador, y paso á multiplicar lo que queda á la izquierda en el multiplicando, que es 2745 por el 9 del multiplicador, y el producto 24705 lo pongo debajo de los anteriores, de modo que formen columna hacia la derecha. Señalo con puntos el 5 del multiplicando y el 9 del multiplicador, y paso á multiplicar el 274 por 6; y el producto 1644 lo coloco debajo de los anteriores formando columna hacia la derecha. Señalo con puntos el 4 del multiplicando y el 6 del multiplicador, y paso á multiplicar lo que queda del multiplicando, que es 27, por el primer 8 que hay en el multiplicador; y el producto 216, que obtengo, lo pongo en columna debajo de los anteriores. Señalo el 7 del multiplicando y el espresado 8 del multiplicador,

*hacia la derecha como ceros hay despues de la unidad.*

94 Para dividir las decimales *se completarán*, esto es, *se hará que ambos términos tengan un mismo número de*

y tengo que multiplicar el 2 que queda en el multiplicando por el segundo 3 del multiplicador; el producto 16, que obtengo, lo pongo debajo de los anteriores, como allí se ve. Apunto el 2 del multiplicando y el segundo 8 del multiplicador, y no quedando ya ningun guarismo en el multiplicando, parece deberíamos cesar en la operacion; pero si queremos proceder con mayor rigor, deberíamos multiplicar el último guarismo 2 apuntado en el multiplicando, por el 7 que sigue en el multiplicador, para ver si se lleva alguna; y en efecto, multiplicando el 2 por 7, resultan 14; y como de 14 se lleva 1, esto corresponde ponerse en columna debajo del 6. Sumo ahora todos estos productos; y obtengo la suma 153817685. Ahora, en esta suma, separo seis guarismos de derecha á izquierda con la coma, y el producto aproximado es 153,817685. Los dos últimos guarismos no son exactos y los debemos suprimir; pero como el primero que se suprime es 8, que ya vale mas de 5, en vez de ellos, añadiré al guarismo 5 una unidad, y tendré que el producto será 153,8177; en el cual salen exactos los cuatro guarismos decimales, como podrá comprobarse que guste haciendo la operacion por el método ordinario del texto.

2.º *Ej.* Si quisiera multiplicar 4752,658, por 0,605210725, los colocaré como aquí se ve:

y suponiendo que deséo encontrar tres guarismos exactos, haré la operacion como para encontrar cinco; y como el guarismo de especie superior ocupa el lugar de las décimas, segun la regla, del número 5 de guarismos decimales que quiero sacar, restaré 1, que es el que espresa el lugar que ocupa el guarismo de especie superior del multiplicador; y la resta 4 me indicará los guarismos decimales que debo tomar en el multiplicando; pero como solo hay tres guarismos de estos, añado un cero y practico la regla como allí se ve. Y despreciando los dos últimos guarismos, resulta por producto 2864,255; siendo exactos los tres guarismos decimales, como deberán comprobar los principiantes ejecutando la operacion por el método del texto.	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: auto;"> <tr><td>.....</td></tr> <tr><td>475 2,6580</td></tr> <tr><td>0,605210725</td></tr> <tr><td>.....</td></tr> <tr><td style="border-top: 1px solid black;">2859 5 9480</td></tr> <tr><td>25 6 6525</td></tr> <tr><td>9 4652</td></tr> <tr><td>4752</td></tr> <tr><td>329</td></tr> <tr><td>8</td></tr> <tr><td>1</td></tr> <tr><td style="border-top: 1px solid black;">2864,2 5527</td></tr> </table>	.....	475 2,6580	0,605210725	.....	2859 5 9480	25 6 6525	9 4652	4752	329	8	1	2864,2 5527
.....													
475 2,6580													
0,605210725													
.....													
2859 5 9480													
25 6 6525													
9 4652													
4752													
329													
8													
1													
2864,2 5527													

§ 5.º *Ej.* Si tuviese que multiplicar 5152,517458213 por 140,5057, los colocaría como aquí se ve:

Si quisiera encontrar dos guarismos exactos, haria la operacion como para sacar cuatro guarismos; y como el guarismo de especie superior del multiplicador está dos lugares á la izquierda de las unidades, añadiré el número 2 al número de los guarismos que se quieren sacar, y resulta que debo tomar seis guarismos decimales en el multiplicando. Por consiguiente, separo los tres últimos con una raya, y practicando la operacion como en los ejemplos anteriores y allí se ve, hallo por producto 720121,4510; y suprimiendo los dos últimos guarismos, que no son exactos, resulta por verdadero producto 720121,45.	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: auto;"> <tr><td>.....</td></tr> <tr><td>5152,51 7458   213</td></tr> <tr><td>140, 5 057</td></tr> <tr><td>.....</td></tr> <tr><td style="border-top: 1px solid black;">5152 51 7458</td></tr> <tr><td>2055 00 6972</td></tr> <tr><td>15 59 7551</td></tr> <tr><td>25 6625</td></tr> <tr><td>5 5924</td></tr> <tr><td style="border-top: 1px solid black;">7201 21,4510</td></tr> </table>	.....	5152,51 7458   213	140, 5 057	.....	5152 51 7458	2055 00 6972	15 59 7551	25 6625	5 5924	7201 21,4510
.....											
5152,51 7458   213											
140, 5 057											
.....											
5152 51 7458											
2055 00 6972											
15 59 7551											
25 6625											
5 5924											
7201 21,4510											

guarismos decimales, añadiendo los ceros que se necesiten al que tenga ménos; entónces se borra la coma, y se ejecuta la division como la de los enteros, sin tener que hacer nada en el cociente. Despues, si la division no sale exacta, aquella resta, que se habla de poner en forma de quebrado, se convierte en quebrado decimal (\*); esto es, se añade á la resta un cero, y se pone la coma en el cociente; se ve cuántas veces cabe el divisor en esta resta, se pone en el cociente despues de la coma este número de veces, ó cero si no cabe; se multiplica por el divisor

La razon de esta práctica, contrayéndonos el primer ejemplo, es qu ocupando el guarismo de especie superior del multiplicando el lugar de las unidades, el producto debe tener tantos guarismos decimales com el multiplicando; y una cosa análoga se verifica en los otros do casos.

(\*) Esta regla es general, é independiente del talento del calculador; es decir, que tanto los discípulos de mucho como de poco talento, pueden aplicarla sin dificultad; pero en la práctica resulta en algunos casos el tener que escribir guarismos inútilmente. Por esta causa, voy á poner aquí otra regla, que sin faltar á la claridad y exactitud, no exija practicar nada en valde, y es la siguiente:

Tómense en el dividendo, considerado como entero, tantos guarismos como se necesiten para que esté contenido alguna vez todo el divisor, considerado tambien como entero, supliendo con ceros en el dividendo los guarismos que puedan faltar; y hállese el primer guarismo parcial, ó lo que es lo mismo, el primer guarismo ó de especie superior del cociente. Para saber lo que debe representar este primer guarismo, se observará lo que sigue: si para esta division parcial resultan en el dividendo tantos guarismos decimales como en el divisor, contando como decimales los ceros que se añaden, este primer cociente hallado deberá ocupar el lugar de las unidades; si para esta division parcial, hubiese mas guarismos decimales en el dividendo que en el divisor, este primer cociente parcial hallado, deberá estar á la derecha de la coma tantos lugares como guarismos decimales mas haya en el dividendo, respecto de los que hay en el divisor; y si hubiese ménos guarismos decimales en el dividendo parcial, que en el divisor, este primer guarismo se deberá encontrar á la izquierda de las unidades tantos lugares como cifras decimales ménos haya en el dividendo respecto de las del divisor. Conociendo ya el lugar, que ha de ocupar el primer guarismo del cociente, que se fijará poniendo la coma segun convenga en virtud de lo que acabamos de expresar, se practica la division; al lado de la resta, se baja el guarismo siguiente del dividendo, ó se añade un cero, si no le hay; se continúa la division, poniendo los cocientes parciales á la derecha del primero, hasta obtener los guarismos que se apetezcan. Resolvamos por esta regla los mismos ejemplos del testo.

y se resta; y así se continúa añadiendo un cero á la resta por cada guarismo decimal que se quiera sacar.

1.<sup>er</sup> ej. Quiero dividir 0,6 por 0,15; añadiré al dividendo un cero y se convertirá en 0,60; despues borro la coma en el dividendo y divisor, y queda reducida la operacion á dividir 60 por 15; lo que, ejecutado como

$$\begin{array}{r} 60 \quad 15 \\ \hline 00 \quad 4 \end{array}$$

aquí se ve: da 4 por cociente; y digo que 0,15 está contenido cuatro veces en 0,6.

2.<sup>o</sup> ej. Si quiero dividir 43 por 12,5, como el divi-

Respecto al 1.<sup>o</sup> veo que para que el divisor 0,15 considerado como entero, quepa en 0,6 considerado tambien como entero, necesito añadir un 0 al 0,6; lo que da

$$\begin{array}{r} 0,60 \quad 0,15 \\ \hline 00 \quad 4 \end{array}$$

Hallo el cociente 4 sin dejar resta, y como en el dividendo parcial 0,60 hay dos guarismos decimales, así como en el divisor, resulta que este 4 debe ocupar el lugar de las unidades. Esto debe ser así, pues 15 centésimas deben estar contenidas en 60 centésimas, el mismo número de veces que 15 unidades en 60 unidades.

En el 2.<sup>o</sup> ejemplo, para poder dividir 45 por 12,5, necesito añadir un 0 al 45 y se me convierte en 450, que dividido por 125 considerado como entero, sacó por primer cociente 3; y como en el divisor hay un guarismo decimal, y en el dividendo para encontrar el primer cociente parcial, he tenido que añadir un cero, resulta que el cociente 3 debe ocupar el guarismo de las unidades. Luego, pongo la coma, añado ceros á la resta, y despues de puesta la coma, continúo sacando los guarismos necesarios. En este caso, tampoco hay nada de particular.

Pasémos al 3.<sup>er</sup> ejemplo. Aplicando esta regla, deberémos tomar por dividendo parcial los tres primeros guarismos de la izquierda del dividendo, los cuales considerados como enteros componen 375; y partiendo por el divisor, que considerado como entero es 85, da por cociente 4, el cual, como para encontrarle, he tomado en el dividendo parcial un guarismo decimal, y en el divisor había solo un guarismo decimal, debe ocupar el lugar de las unidades; por consiguiente, despues del 4 pondré la coma; iré bajando guarismos decimales: y poniendo los cocientes unos á la derecha de los otros, segun vayan saliendo, se obtendrá el cociente pedido. En este ejemplo, resulta por nuestra regla mucho mas sencilla la práctica; pues no hay mas que señalar con un punto los guarismos que se necesitan en el dividendo, sin borrar comas ni nada, segun aquí se presenta:

$$\begin{array}{r} 57,54.2.1 \quad 8,5 \\ 4 \quad 5 \quad 4 \quad \hline 1 \quad 9 \quad 2 \quad \hline 2 \quad 6 \quad 1 \quad \hline 1 \quad 2 \quad 0 \quad \hline 5 \quad 7 \quad 0 \quad \hline 5 \quad 8 \end{array}$$

Donde veo que en esta operacion resultan 51 guarismos; y en la del testo son 57, que viene á ser un aumento de trabajo de un quinto, lo cual repetido en muchos ejemplos, es de consideracion.

4.<sup>o</sup> Ej. Si tuviera que dividir 0,00576829 por 0,0526; colocaría los números como aquí se presentan:

$$0,00576829 \quad \hline 0,0526$$

dendo no tiene ningun guarismo decimal, le añado un cero; y borrando la coma en el divisor, queda reducida la operacion á dividir 430 por 125; la que ejecutada como aquí se presenta:

da 3 por cociente y 55 por resta, la que reduciré á decimales añadiéndole un cero, poniendo la coma despues del 3, y continuando la division; para esto, veo que

$$\begin{array}{r} 430 \quad \left| \begin{array}{l} 125 \\ 3,44 \end{array} \right. \\ 550 \\ 500 \\ 00 \end{array}$$

el 125 está contenido 4 veces en 550, pongo este 4 despues de la coma, multiplico por el divisor y resto; á la resta 50 añado otro cero, veo que está contenido cuatro

Para que el divisor, que considerado como entero, es 526, se halle contenido alguna vez en el dividendo parcial, debemos tomar los cuatro guarismos significativos 5768; por consiguiente, pondremos el punto á la derecha del 8: haremos la division del 5768 por el 526 como si fuesen enteros; pero sin necesidad de tocar á la coma ni nada; y se halla 7 por primer cociente. Ahora, para saber el lugar que debe ocupar este 7, observaré, que, hallándose el último guarismo 8 en el sexto lugar, y el 6 del divisor en el cuarto, hay dos guarismos decimales mas en el dividendo; luego el 7 que resulta en el cociente debe ocupar segun la regla, el segundo guarismo decimal, esto es, deberá ponerse el cociente, de este modo 0,07; y luego continuar la operacion como aquí se presenta.

$$\begin{array}{r} 0,005768.2.9 \quad \left| \begin{array}{l} 0,0526 \\ 0,0716404 \end{array} \right. \\ 00862 \\ 5569 \\ 02150 \\ 002600 \\ 0406 \end{array}$$

5.º Ej. Si tuviese que dividir 0,0000059525 por 0,0008, practicaria la operacion como aquí se ve:

$$\begin{array}{r} 0,0000059.5.2.5 \quad \left| \begin{array}{l} 0,0008 \\ 0,007415625 \end{array} \right. \\ 53 \\ 12 \\ 45 \\ 50 \\ 20 \\ 40 \end{array}$$

6.º Ej. Si quisiera dividir 0,00000004972 por 0,0025, practicaria la operacion del modo que aquí se presenta:

Y resulta 0,000021617.

$$\begin{array}{r} 0,000000049.7.2 \quad \left| \begin{array}{l} 0,0025 \\ 0,000021617 \end{array} \right. \\ 57 \\ 142 \\ 40 \\ 170 \\ 9 \end{array}$$

7.º Ej. Si quisiera dividir 0,00229253 por 0,00000000637, practicaria la operacion como aquí se manifiesta:

Y como hay cinco guarismos decimales mas en el divisor que en el dividendo parcial, infero, que el primer guarismo del cociente, que es 5, debe hallarse cinco lugares mas á la izquierda que las unidades.

Y resulta que el cociente es 559894,8.

$$\begin{array}{r} 0,002292.5.3 \quad \left| \begin{array}{l} 0,00000000637 \\ 559894,8 \end{array} \right. \\ 5815 \\ 6303 \\ 5700 \\ 6040 \\ 3070 \\ 5220 \\ 124 \end{array}$$

veces el divisor, pongo 4 en el cociente; y así continúo hasta sacar los guarismos decimales que desée, que aquí solo son dos, porque da cociente exacto.

3.<sup>er</sup> ej. Si quisiera dividir  $37.5421$  por  $8,3$ , añadiría al divisor tres ceros, porque le faltan tres para tener tantos decimales como el dividendo; borro despues la coma en ambos, y queda reducida la operacion á dividir  $375421$  por  $83000$ ; y ejecutada la operacion como aquí se ve: saco el cociente 4; y en vez de añadir un cero á la resta, borraré uno en el divisor, pondré coma en el cociente, y averiguaré cuántas veces el  $8300$  está contenido en  $43421$ ; hallo que cabe 5 veces, pongo 5 en el cociente despues de la coma, multiplico por el divisor, y resto; borro otro cero en el divisor, y continúo la operacion, advirtiendome que si despues de borrados los ceros del divisor, quiero sacar mas guaris-

$$\begin{array}{r}
 375421 \overline{) 83000} \\
 43421 \overline{) 452314} \\
 1921 \\
 261 \\
 120 \\
 370 \\
 38
 \end{array}$$

8.<sup>o</sup> Ej. Si quiero dividir  $4,75$  por  $0,0052745$ , haré la operacion como aquí se presenta:

Y saco  $1444,585$ .

$$\begin{array}{r}
 4,7500 \overline{) 0,0052745} \\
 145570 \overline{) 1444,585} \\
 150080 \\
 191080 \\
 275650 \\
 117060
 \end{array}$$

En los seis ejemplos últimos, la regla que acabamos de establecer, conduce al resultado con mas brevedad, y ménos riesgo de equivocarse, que la del texto.

La division de las decimales tambien es susceptible de una abreviacion análoga á la de la multiplicacion, y consiste en ir disminuyendo ó suprimiendo en el divisor un guarismo á cada division parcial, en vez de bajar guarismos del dividendo ó añadir cero, con tal que esta supresion se haga cuando falten hallarse tantos guarismos ménos dos como tenga el divisor.

Así es, que la operacion anterior, quedaria ejecutada con mas sencillez como aquí se ve:

Donde vemos que se obtiene el mismo cociente.

$$\begin{array}{r}
 4,7500 \overline{) 0,0052745} \\
 145570 \overline{) 1444,585} \\
 145980
 \end{array}$$

En operaciones complicadas, cuando se ha fijado bien el lugar de la coma, se puede suprimir en el dividendo y divisor un mismo número de guarismos.

$$\begin{array}{r}
 150080 \\
 19108 \\
 2758 \\
 122 \\
 26
 \end{array}$$

mos decimales, se añaden ceros á la resta como allí se ve.

*Dem.* Con añadir los ceros que se necesiten al término que tiene ménos guarismos decimales, no alteramos de ningun modo su valor (36); y con suprimir la coma en los dos términos, los multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como guarismos decimales hay, lo que (61, 4.º) no altera el cociente. L. Q. D. D.

95 Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros, queda hecha la division, *corriendo la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros acompañan á la unidad, supliendo con ceros á la izquierda si el dividendo no tiene bastantes guarismos*; lo cual está fundado en lo dicho (37). Así, si en el número 8465,379, corro la coma dos lugares hacia la izquierda, resultará dividido por 100, y será 84,65379.

96 Para valuar los quebrados decimales, *se multiplican por el número que expresa las veces que la unidad en que se quiere valuar el quebrado, cabe en aquella á que se refiere el quebrado.*

Si hay unidades de especie inferior todavía, *se vuelve á multiplicar el quebrado que resulte, por el número de veces que la unidad en que se quiere valuar ahora este quebrado, cabe en aquella á que se refiere; y así se continúa hasta que no haya unidades de especie inferior; y si al fin queda quebrado, se desprecia si no llega á cinco décimas; y se añade en vez de él una unidad, si llega ó pasa de cinco décimas.*

*Esc.* No se dice que se divida por el denominador, porque la division se hace al colocar la coma en el producto.

1.<sup>er</sup> *ej.* Si quiero averiguar quanto valen 0,47 de doblon, multiplicaré el 0,47 por 4, que son los pesos que tiene un doblon, y saco como se ve en (A) 1,88 pesos, esto es, un peso y un quebrado de peso; valúo el quebrado de peso en reales; para lo cual coloco el 15 debajo de 1,88, le multiplico sin hacerlo con

el entero 1, y saco 13,20 reales; borro el 0, multiplico las 2 décimas de real por 34, y saco 6,8 maravedises ó 7 maravedises, porque 8 décimas es mayor que 5; por lo que digo que 0,47 de doblon valen 1 peso 13 reales y 7 maravedises.

2.<sup>o</sup> *ej.* Si quisiera averiguar cuánto valían 0,7432 de vara, ejecutaría la operacion como se ve en (B), y hallaría 2 pies; 2 pulgadas y 9 líneas.

*Esc.* La valuacion de este ejemplo supone que las varas son longitudinales, ó varas de largo; pero, si las varas fuesen de las que daremos á conocer en la Geometría con el nombre de *cuadradas ó cúbicas*, se deberá proceder como se explica en las notas de los (§§ 353 y 397).

*Sumar, restar, multiplicar y dividir números denominados.*

97 Se llaman números denominados los que constan de unidades de diferentes especies relativas todas á un mismo género; como 6 varas, 1 pie, 7 pulgadas y 4 líneas, y 5 quintales, 3 arrobas y 8 libras. Para entender las operaciones, que vamos á hacer con estos números, es indispensable tener bien presente la division de las unidades de pesos y medidas (15 al 21).

98 Para sumarlos, se ponen todos los sumandos los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan las unidades de cada especie; se tira una raya, y se empieza á sumar por la especie inferior; si la suma de estas unidades contiene alguna ó algunas de la especie superior inmediata, se guardan para sumarlas con ellas; se suman estas; y así se continúa hasta haber sumado las de especie superior; y el número que resulta debajo de la raya es la suma pedida.

*Ejemplo.* Quiero sumar 38 doblones, 3 pesos, 13 reales y 14 maravedises; con 4 doblones, 1 peso, 3 reales y 6 maravedises; con 49 doblones, 2 pesos, 8 reales y 25 maravedises;

	(A)	(B)
	0,47 dob.	0,7432 varas.
	4	3
	1,88 pes.	2,2296 pies.
	15	12
	440	4592
	88	2296
	13,20 rs.	2,7552 pulg.
	34	12
	6,8 mrs.	15104
		7552
		9,0624 líneas.

y con 53 doblones, 12 reales y 19 maravedises; colocaré todos los sumandos los unos debajo de los otros como aquí se ve:

( 2	( 2	( 1	
38 dob.	3 ps.	13 rs.	14 mrs.
4 "	1 "	3 "	6 "
49 "	2 "	8 "	25 "
53 "	0 "	12 "	19 "
146 "	8	37	64
	0 "	7 "	30 "

Tiraré una raya, y sumando los maravedises tengo 64, que componen 1 real y quedan 30 maravedises; borro el 64, pongo debajo los 30 que quedan, y el 1 real que llevo para la columna inmediata, le pongo encima de los reales separado con una media luna; sumo todos estos reales, y tengo 37, que componen 2 pesos y 7 reales; borro el 37, pongo debajo los 7 reales que quedaron, y los 2 pesos los coloco sobre los pesos; sumo estos y tengo 8 pesos, que componen 2 doblones justos; por lo que borro el 8, pongo debajo 0 y coloco los 2 doblones, en la columna de los doblones, cuya suma da 146 doblones; y tengo por suma de los números propuestos 146 doblones, 0 pesos, 7 reales y 30 maravedises.

*Dem.* Como hemos sumado todas las partes de los sumandos, no queda duda de que hemos sumado los todos. L. Q. D. D.

99 Para restar los números denominados, se pone el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de una misma especie; se tira una raya, y se va restando cada especie de unidades del sustraendo de las correspondientes en el minuendo, empezando por las de la especie inferior. Si alguna especie de unidades del sustraendo es mayor que la correspondiente en el minuendo, se toma de este una unidad de la especie inmediata superior; y si no hubiese en esta se tomara de la otra, ó de la siguiente si tampoco hubiese en esta etc.; y cuando se toma una unidad superior de dos ó tres órdenes, se descompone en las inferiores del modo que se verá en los siguientes ejemplos.

1.º De 295 doblones, 2 pesos, 3 reales y 15 maravedises,

quiero restar 89 doblones, 3 pesos, 2 reales y 5 maravedises; colocaré el sustraendo debajo del minuendo como aquí se ve:

Y despues de tirada la	295 dob.	2 ps.	3 rs.	15 mrs.
raya, empezaré á restar por	89 »	3 »	2 »	5 »
la columna de los maravedi-	<hr/>			
ses, lo que da 10 maravedi-	205 »	3 »	1 »	10 »

ses de resta; paso á restar los reales del sustraendo de los correspondientes del minuendo, y hallo 1 de resta; paso á los pesos, y como de 2 pesos no puedo restar 3, tomo una unidad de los doblones que vale 4 pesos, y con los 2 que hay, hacen 6, de los que restando los 3, quedan 3 por resta; y por último pasando á los doblones, teniendo en consideracion que tomé uno, resulta por resta 205 doblones, 3 pesos, 1 real y 10 maravedises.

2.º Si de 47 quintales quiero restar 23 quintales, 2 arrobas, 9 libras y 14 onzas, los colocaré como aquí se ve:

Y como no puedo restar		3	24	16
14 onzas de donde no hay,	47 qs.	0 ars.	0 lib.	0 onz.
paso á tomar una libra; que	23 »	2 »	9 »	14 »
como tampoco hay, ni arro-	<hr/>			
bas, tomo un quintal que	23 »	1 »	15 »	2 »

tiene 4 arrobas; y como yo solo necesito una libra para restar las onzas, dejo 3 arrobas en el lugar de las arrobas; de la arroba que queda, dejo 24 libras en el lugar de las libras; y de la otra libra que vale 16 onzas, resto las 14 onzas, y continúo la operacion como allí se ve, considerando al 7 de 47 quintales, como 6; y saco por resta 23 quintales, 1 arroba, 15 libras y 2 onzas.

3.º Si restára 327 varas, 2		2	11	12
pies, 6 pulgadas y 5 líneas, de	578 vs.	0 ps.	0 pulg.	0 lín.
578 varas, haría la operacion co-	327 »	2 »	6 »	5 »
mo aquí se ve, y la resta sería	<hr/>			
250 varas, 5 pulgadas y 7 líneas.	250 »	0 »	5 »	7 »

*Dem.* Como restamos todas las partes del sustraendo de todas las del minuendo, y todas las restas parciales las tenemos reunidas en un solo número, este espresará la resta total. L. Q. D. D.

100 En la multiplicacion de los números denominados se pueden seguir varios métodos; aquí sólo pondrémos el que es mas independiente del talento del calculador, y consiste en practicar las tres reglas siguientes: 1.ª redúzcanse el multiplicando y el multiplicador á la menor de sus especies; 2.ª multiplíquense entre sí estos

dos números despues de reducidos; 3.<sup>a</sup> divídase el producto por el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior del multiplicador cabe en la mayor, y el cociente espresará el producto en las unidades de especie inferior del multiplicando; por lo que se deberán reducir á las de especie superior segun las reglas dadas (58.. 5.<sup>o</sup>). En esta cuestion es indispensable conocer cada factor, para practicar la 3.<sup>a</sup> regla; por lo que diremos que el multiplicando es el de la especie que se busca en el producto; y por consiguiente el otro será el multiplicador.

1.<sup>er</sup> ej. Si quiero averiguar quanto valen 7 varas y 1 pie á 9 pesos y 6 reales la vara, observaré que como lo que busco aquí son pesos y reales, el multiplicando es 9 pesos y 6 reales; por lo que los reduciré primero á la menor de sus especies, y tendré reducido el multiplicando á 141 reales, y el multiplicador á 22 pies; multiplico el 141 por 22, y saco el producto 3102; el cual le divido por 3, á causa de que el pie está contenido 3 veces en la vara, lo que me da el cociente 1034 que espresa los reales que valen las 7 varas y 1 pie; y reduciendo estos 1034 reales á pesos (58.. 5.<sup>o</sup>), sacaré 68 pesos y 14 reales.

2.<sup>o</sup> Si quisiera averiguar cuánto valen 6 quintales, 3 arrobas y 8 libras de azucar, á 8 doblones, 2 pesos y 9 reales el quintal, los reduciré á la menor de sus especies, y se me convertirán el multiplicando en 519 reales, y el multiplicador en 683 libras; multiplicaré estos dos números entre sí, y el producto 354477 le dividiré por 100, lo que (95) dará 3544,77 reales, que reducidos á doblones, hacen 59 doblones y 4,77 reales, que (96) vienen á ser 4 reales y 26 maravedises.

Dem. El reducir los factores á su menor especie no influye nada en el resultado; pues lo mismo son (ej. 1.<sup>o</sup>) 7 varas y 1 pie que 22 pies, y 9 pesos y 6 reales lo mismo que 141 reales. Al practicar la segunda regla tomamos el valor de la vara tantas veces como pies hay; esto es, multiplicamos el valor de la vara por un número tres veces mayor que el que debe ser; y como practicando la tercera hacemos el producto tantas veces menor como lo que ántes le habíamos tomado mayor, resulta que este será el verdadero. El convertirle en las unidades de especie superior, es por satisfacer á la cuestion en los mismos términos que venía propuesta.

*Esc.* Puede ocurrir que el multiplicando y el multiplicador sean números denominados que espresen medidas longitudinales, como varas, pies, pulgadas y líneas. En este caso el producto no espresa medidas longitudinales, sino medidas que se llaman *superficiales ó agrarias*; y tambien puede suceder que uno de los factores espresen medidas *superficiales* y el otro medidas longitudinales, en cuyo caso el producto aunque se espresa tambien con el mismo nombre que las medidas del multiplicando y multiplicador, sin embargo son de naturaleza muy diferente; pues que no son *medidas superficiales, ni longitudinales*, sino medidas que se denominan *cúbicas*, ó de *volúmen* ó de *capacidades*. Estos casos solo ocurren en las aplicaciones de la Geometría; y por lo mismo, resolverémos ejemplos de ellos en las notas de los párrafos 353 y 397.

101 Para dividir los números denominados se practicarán las tres reglas siguientes: 1.<sup>a</sup> *se reduce el divisor á la menor de sus especies*; 2.<sup>a</sup> *se hace la division empezando por las unidades de especie superior del dividendo; y si de esta division queda alguna resta, se reduce á las unidades de especie inferior inmediata, y se añaden las unidades de esta especie que hay en el dividendo; se dividen por el divisor, y si queda alguna resta se reduce á las unidades de especie inferior inmediata; y así se continúa hasta que no haya unidades de especie inferior*; 3.<sup>a</sup> *despues se multiplica todo este cociente por el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, empezando esta multiplicacion por las unidades de especie inferior, para si resultan unidades de especie superior, añadirlas al producto de la columna inmediata, y el resultado es lo que se pide.*

Por ejemplo. Sé (100) que 7 varas y 1 pie han costado 68 pesos y 14 reales; si quiero averiguar á cómo ha costado la vara, dividiré los 68 pesos y 14 reales por 7 varas y 1 pie. Aquí se conoce el dividendo en que es de la misma especie que lo que se busca. Practico la 1.<sup>a</sup> regla y se me convierte el divisor en 22 pies; ahora hago la division como á la vuelta se ve:

Empiezo por los pesos , y	68 ps.	14 rs.	22
digo : 68 entre 22 les toca	02		3 ps. 2 rs.
á 3, que son pesos, y me	15		3
quedan de resta 2 pesos,	30		9 " 6 "
que para reducirlos á reales	44		
los multiplicaré por 15 , y	14		
al producto 30 le añadiré	44		
los 14 reales que hay en el	0		
dividendo; veo que el 22			

cabe dos veces en 44, y no deja resta ; ahora el cociente 3 pesos y 2 reales le multiplico por 3, que es el que espresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, y saco el producto 9 pesos y 6 reales, que es en efecto el valor de la vara.

*Dem.* El reducir el divisor á su menor especie no influye nada en el resultado; pues 7 varas y 1 pie es lo mismo que 22 pies. Al practicar la 2.<sup>a</sup> regla, como dividimos por el número de pies, hallamos el valor de un pie; y como lo que se pide en la cuestion es el valor de la vara, por esta razon se ha de practicar la 3.<sup>a</sup> regla; esto es, en este caso se ha de multiplicar el valor del pie por 3 que son los pies que tiene la vara, y en general por el número que espresa las veces que la unidad inferior del divisor está contenida en la mayor. L. Q. D. D.

*Esc.* Si el dividendo y el divisor fuesen números denominados de una misma naturaleza, entónces el cociente, aunque se puede hallar por las tres reglas, que acabamos de dar, no espresa sinó un número abstracto, que da á conocer las veces que el divisor está contenido en el dividendo,

1.<sup>er</sup> *ej.* Si me propusiera dividir 268 arrobas y 16 libras por 3 arrobas y 17 libras, observaría que esta cuestion puede ocurrir en la práctica siempre que se trate de investigar de cuántas veces el número 3 arrobas y 17 libras se compone el 268 arrobas y 16 libras, y el resultado debe ser un número abstracto. Sin embargo, es tal el enlace y dependencia de las tres reglas establecidas, que por ellas se puede hallar el verdadero resultado.

En efecto, reduciendo el divisor á la menor de sus especies, se nos convierte en 92 libras; y ejecutando la division como

aquí se ve:  
resulta, por cociente 2 ar-  
robas y 23 libras.

Para practicar la ter-  
cera regla, debo multipli-  
car este cociente por 25,  
que es el que espresa las  
veces que la unidad de es-  
pecie inferior del divisor  
está contenida en la de es-  
pecie superior; y ejecután-

268 ars. 16 lib.	92
84	2 ars. 23 lib.
25	25
420	115
168	46
2100	50 ars. 575 lib
16	
2116	
276	
000	

dolo, hallo 50 arrobas y 575 libras.. Como 575 libras compo-  
nen 23 arrobas, si estas las añado á las 50 que ya tenía, obten-  
go 73 arrobas; y prescindiendo del nombre, y considerando el  
73 como número abstracto, es el verdadero cociente; y quiere  
decir que el número 268 arrobas y 16 libras equivale á 73 ve-  
ces el número 3 arrobas y 17 libras.

Para convencernos de esto, basta reducir el dividendo y di-  
visor á la menor de sus especies, y la cuestion viene á ser el  
investigar cuantas veces el 6716 libras contiene al 92 libras; y  
ejecutando la division por el método ordinario (§ 53) se obtie-  
ne 73, que es el mismo resultado de ántes.

2.<sup>o</sup> *ej.* Si me propusiera dividir 523 doblones y 1 peso por  
8 doblones y 3 pesos, observaría que esto era lo mismo que bus-  
car á cuántas veces el número 8 doblones y 3 pesos equivale el  
523 doblones y 1 peso.

Ejecutando la operacion como aquí se ve:

resulta, despues de

practicadas las tres

reglas, 56 do-

blones 12 pesos

y  $\frac{112}{35}$  de peso.

Los  $\frac{112}{35}$  de peso

equivalen á 3 pe-

sos y  $\frac{7}{35}$  de peso.

Añadiendo estos 3

pesos á los 12 que

hay en el produc-

to se convierten en 15 pesos, que equivalen á 3 doblones y quedan

3 pesos. Añadiendo estos 3 doblones á los 56, resulta, que el

cociente es 59 doblones, 3 pesos y  $\frac{7}{35}$  de peso; los 3 pesos son

$\frac{3}{4}$  de doblon; los  $\frac{7}{35}$  de peso equivalen á  $\frac{7}{35 \cdot 4}$  de doblon; y su-

mando  $\frac{3}{4}$  de doblon con  $\frac{7}{35 \cdot 4}$  de doblon, resulta despues de sim-

523 dob. 1 peso

173

033

4

132

1

133

028

35

14 dob. 3 ps.  $\frac{28}{35}$  de peso

4

56 dob. 12 ps.  $\frac{12}{35}$  de peso

plificado,  $\frac{28}{35}$ ; y considerando ahora el cociente como número abstracto es 59 y  $\frac{28}{35}$ : el cual expresa las veces que el 523 doblones y 1 peso contiene al número 8 doblones y 3 pesos.

Para convencernos de la exactitud de este resultado, reduzcamos el dividendo y divisor á la menor de sus especies; lo que los convierte en 2093 y 35; y hecha la division del primero por el segundo, se obtiene 59 y  $\frac{28}{35}$ , que es el mismo resultado de ántes.

3.er ej. Si quisiera dividir 1202 varas 2 pies y 11 pulgadas por 3 varas 1 pie y 7 pulgadas, en el supuesto de que estas medidas sean longitudinales, la cuestion está reducida á investigar las veces que la longitud de 3 varas 1 pie y 7 pulgadas está contenida en la longitud 1202 varas 2 pies y 11 pulgadas.

Practicando las tres reglas como aquí se ve:

3	1202 vs. 2 ps. y 11 pulgs.	127
3	0059	9 vs. 1 pie y 5 pulgs.
9	3	36
1	177	324 vs. 36 pies 180 pulgs.
10	2	
12	179	
120	052	
7	12	
127	104	
	52	
	624	
	11	
	635	
	000	

Resultan 324 varas 36 pies y 180 pulgadas. Reduciendo las 180 pulgadas á pies, se obtienen 15 pies; que, añadidos á los 36 pies que hay en el producto, componen 51, que hacen 17 varas; las cuales unidas á las 324 varas que hay en el producto, contienen 341. Y considerando este resultado como un número abstracto, representa el cociente; espresando que 1202 varas, 2 pies y 11 pulgadas contienen 341 veces á 3 varas 1 pie y 7 pulgadas.

En efecto, convirtiendo tanto el dividendo como el divisor en pulgadas, está reducida la operacion á investigar cuántas veces el dividendo 43307 pulgadas contiene á 127 pulgadas: y practicando la division por el método general, se obtiene 341 como ántes.

En la nota del párrafo 397, resolveremos ejemplos relativos á la division de medidas *superficiales* por *medidas*

*longitudinales*; en cuyo caso el cociente espresa *medidas longitudinales*; y tambien cuando el dividendo espresa *medidas cúbicas*, y el divisor *medidas superficiales* ó *medidas longitudinales*.

La complicacion que resulta en el cálculo de los números denominados, cualquier método que se adopte, proviene de que la division y subdivision de las unidades de pesas y medidas no guarda la misma ley que el sistema de numeracion de irse dividiendo de diez en diez, como se manifiesta en las respuestas 20 y 21 de la obrita que tenemos publicada bajo el título de *Esplicacion del sistema decimal ó métrico francés, que por ley de 4 de julio de 1837 está rigiendo en Francia, con la reduccion etc. etc.*

## ÁLGEBRA.

### *Nociones preliminares.*

102 **ÁLGEBRA** es la ciencia que trata de la cantidad en general. Los signos de que se vale para espresar las cantidades, son las letras del alfabeto; v. g. *a* puede representar cualquier cantidad, sea de la especie que sea, como 20, 30, etc. 40 varas, 50 hombres, etc. Nunca pueden faltar signos al Algebra para espresar las cantidades; pues se vale de los dos alfabetos minúsculo y mayúsculo y tambien del griego. Además, si á una letra v. g. *a* se le pone un acento por la parte de arriba ó por la parte de abajo, á la derecha ó á la izquierda, en esta forma *a'*, *'a*, *a<sub>1</sub>*, *a<sub>2</sub>*, representa una cantidad diferente de la que espresa *a*; y se leen *a primera*, *primera a*, *a subprimera*, *subprimera a*; tambien se le pueden poner dos, tres, etc. acentos y se leen *segundas*, *subsegundas*, etc.

Las definiciones de la Aritmética y Algebra manifiestan la mayor generalidad de esta, y para que el principiante no tema el emprender su estudio, le decimos que las operaciones del Algebra son las mismas que las de la Aritmética, y que hay una grandísima enalogía entre ellas. En efecto, despues de haber dado á conocer los números, v. g. 20 hombres, 20 caballos, 20 peras, etc.

hemos prescindido de que los 20 fuesen hombres, caballos etc., y nos hemos quedado con el número abstracto 20; pero este nunca puede ser 19, ni tampoco 21 etc. Donde se ve que la mayor abstracción, que puede hacer la Aritmética en los números, es la del valor específico; pero si ahora solo consideramos en el 20 una colección de hombres, caballos etc., sin atender á que sea un número determinado, sinó una colección capaz de aumento ó disminución, entónces no puede estar representada por 20, y la espresaremos por  $a$ ; por consiguiente la  $a$  representa una cantidad de hombres, caballos etc., segun nos acomode; y lo mismo cualquiera otra letra. Consiste, pues, todo el gran secreto del Álgebra en prescindir del valor numérico de las cantidades; cuya máxima, bien inculcada á los principiantes, les hará disipar el gran cúmulo de dificultades que vulgarmente se dice que hay en el Álgebra: lo que los arredra, y hace que la miren como superior á sus fuerzas, siendo así que es mas fácil que la Aritmética.

103 Para indicar las diferentes operaciones y supuestos que se hacen con las cantidades, empléa el Álgebra los signos que dejamos esplicados en la Aritmética, y algunos otros que darémos á conocer. Así, la espresion  $a+b$  quiere decir, que lo que valga  $b$  se ha de añadir á lo que valga  $a$ , y nada mas;  $a-b$  quiere decir, que lo que valga  $b$  se ha de quitar de lo que valga  $a$ ;  $a \times b$  ó  $a.b$ , ó  $ab$ , indica que el valor de  $a$  se ha de multiplicar por el de  $b$  (en el Álgebra se puede suprimir el signo  $\times$  ó  $.$  y dejar solo  $ab$ , y en la Aritmética no, á causa del sistema de numeracion; v. g.  $3 \times 4$  ó  $3.4$  vale 12; y si se quita el signo vale treinta y cuatro);  $\frac{a}{b}$

ó  $a:b$  indica que el valor de  $a$  se ha de dividir por el de  $b$ . (\*)

---

(\*) MM. Lacroix, Cauchy, Francœur y Hachette, sabios profesores de Paris, cuyas esplicaciones he tenido el honor de oír, enuncian las espresiones como  $\frac{a}{b}$  diciendo  $a$  sobre  $b$ , por ser mas breve que  $a$  dividida por  $b$ .

Este signo  $>$  es el de *mayoría*, y puesto al revés  $<$  el de *menoría*; así  $a > b$  quiere decir, que *a es mayor que b*; y  $b < a$ , que *el valor de b es menor que el de a*; ó mas general: el signo  $>$  ó  $<$  sirve para espresar la *desigualdad* de dos cantidades, siendo menor la que está en la punta. El signo  $\pm$  se llama el *signo de ambigüedad*; así,  $a \pm b$ , ó  $a \mp b$ , indica que *lo que valga b se ha de añadir ó quitar al valor de a*, ó al contrario.

104 En el Álgebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sino al modo con que influyen en la cuestion que el calculador se propone resolver. Ahora, al resolver una cuestion, solo se pueden encontrar dos clases de cantidades que influyan en ella: cantidades que *conspiren al fin que se propone el calculador*, que se llaman *positivas*; y cantidades que *conspiren á un fin opuesto*, que se llaman *negativas*. Así, si quiero averiguar en cuanto tiempo se llenará un estanque, en que por un lado entra agua y por otro sale, tendré que atender al agua que entra y á la que sale; y como el agua que entra conspira al fin que me propongo, esta será la positiva; y la que sale, que conspira á vaciar el estanque, será la negativa.

Si, al contrario, quiero averiguar el tiempo en que se vacía un estanque, en que por una parte sale agua y por otra entra, tendré que atender tambien en este caso al agua que sale y á la que entra; pero aquí el agua que sale es la positiva, y la que entra la negativa.

Como las cantidades positivas conspiran al fin que se propone el calculador, tratan de aumentar el resultado que busca, y por lo mismo se señalan con el signo  $+$ , que es el de aumento ó de adición; y como las cantidades negativas conspiran al fin opuesto al que se propone el calculador, tratan de disminuir el resultado que busca, y por lo mismo se señalan con el signo  $-$ . De manera, que de aquí en adelante el signo  $+$  tendrá dos acepciones: una general, que es la de indicar la operacion de sumar, y la otra particular de decir que la cantidad á que afecta, es positiva; lo mismo sucede con el signo  $-$ , que siempre indicará en general la operacion de restar; y en particular, que la cantidad á que afecta es negativa.

Por consiguiente, toda cantidad que se escriba, deberá llevar el signo + ó el signo — para denotar si es positiva ó negativa; no obstante, el signo + se suprime al principio de escritura. V. g.  $a$  es lo mismo que  $+a$ ; el — nunca se suprime.

105 Los signos + y —, ó las cantidades positivas y negativas son los únicos recursos del Algebra para expresar las palabras con que se suple todo en la Aritmética; y aun las frases irónicas con que nos producimos, al decir *fulano tiene 100 reales que debe*; la palabra *tiene* parece que da á conocer que *posee dinero*, y la palabra *debe* manifiesta que *lo decimos de chanza ó que nos burlamos*: esta frase del language vulgar se espresa en Algebra diciendo: *fulano tiene —100 reales*.

Suele decirse, que *las cantidades negativas son menores que cero*; esta locucion no es exacta, si se atiende á la generacion de las ideas: puesto que formándonos la idea de *cero* ó de la *nada* cuyo simbolo es, prescindiendo de todo lo que hay en cualquier parage, para poder asegurar que *nada* hay, despues de haber prescindido de todo, no se puede prescindir de mas; y por lo mismo no se puede formar idea de una cosa que sea todavía ménos que nada. Sin embargo, se usa esta locucion algebraica, como una espresion abreviada para dar á conocer, que *una cantidad de esta especie, reunida con otra de la especie contraria, la disminuye en tanto como ella vale*; luego esto viene á equivaler á ménos que á haberle añadido *nada* ó *cero*. Así es, que la espresion vulgar *fulano debe 100 rs.*, equivale á la locucion algebraica: *fulano tiene —100 rs.*; y á *fulano le han quitado 100 rs.* equivale en language algebraico á la siguiente: á *fulano le han dado —100 rs.* Por la misma razon, á *fulano le han quitado mil rs.* ó *le han impuesto una multa de mil rs.* equivale en language algebraico, á la frase siguiente: á *fulano le han dado —1000 rs.* Y así como quitarle á uno *mil rs.* es mas desventajoso que quitarle *cien rs.*, del mismo modo resulta, que dar á uno *—1000 rs.* es mas desventajoso ó se le hace mas pobre, que dándole *—100 rs.* Estas reflexiones se pueden aplicar á todas las cantidades que se hallen en circunstancias análogas, por lo que re-

sulta en general, que el valor de una cantidad negativa, comparado con el 0, es menor, esto es, que cualquiera que sea la cantidad ó el número espresado por la letra  $a$ , se tiene que  $-a < 0$ ; es decir, que con cualquiera cantidad que se reuna  $-a$  causa un efecto mas desventajoso, que si se la aumentase ó añadiese 0; y que de dos cantidades negativas, la que tenga mayor valor numérico es la menor, esto es, que  $-a > -2a > -3a > \&c.$

106 Entendido esto, cuando está repetida por sumando una misma letra, se pone una sola vez con un número ántes, que espresa las veces que está repetida, cuyo número se llama *coeficiente*; v. g. en vez de  $a+a$  se escribe  $2a$ ; lo mismo sucede con cualquiera grupo ó conjunto de letras enlazadas por vía de multiplicacion ó de division. Así, en vez de  $ab+ab+ab$  se pone  $3ab$ ; y los números 2 y 3 son los coeficientes. Tambien se pone coeficiente cuando la letra ó cantidad está repetida con el signo  $-$ ; así, en vez de  $-ab-ab-ab-ab$ , se pone

$-4ab$ ; y en vez de  $-\frac{abc}{d}-\frac{abc}{d}$  se pone  $-\frac{2abc}{d}$ .

Cuando una letra está repetida por factor, se pone una sola vez con un número á su derecha un poquito mas alto, que tenga tantas unidades como veces está repetida la letra por factor; así, en vez de  $aa$ , se escribe  $a^2$ ; en vez de  $aaa$  se pone  $a^3$ . Este número se llama *esponente*; y para leer v. g.  $a^5$  se dice *a cinco*, ó *a elevada á cinco*.

Cuando una letra  $a$  se presenta sola, se le supone la unidad por coeficiente, la unidad por esponente, y tambien si se quiere la unidad por divisor; por esta causa  $a$

es lo mismo que  $1a$ , que  $a^1$ , y que  $\frac{1a^1}{1}$ .

Ahora, toda cantidad ó espresion de cantidad, sea de la especie que sea, separada de otras por medio del signo  $+$  ó  $-$ , se llama *término*; v. g.  $-a$  es un término;  $8abd$ ,

$\frac{7bd}{e}$ ,  $\frac{a^3b^3c^5}{d-e}$ , son tambien términos.

107 Se dice de un término que consta de tantas *dimensiones* cuantas letras tiene, si no hay denominador; v. g.  $+a$  es un término de *una* dimension;  $5ac$  de *dos*;  $-7abc$  de *tres*; donde se ve que el coeficiente no constituye dimension.

Si la cantidad está en forma de quebrado, el número de las dimensiones está espresado por la diferencia entre

las del numerador y las del denominador; v. g.  $\frac{ab}{d}$  es

de *una* sola dimension;  $\frac{2ab}{cd}$  es un término de dimen-

sion *nula*, ó de *cero dimensiones*; y cuando hay mas en el denominador que en el numerador, entónces se dice

que la dimension es *negativa*; así, el término  $\frac{ab}{cde}$  es

de *ménos una* dimension. Finalmente, cuando las letras tienen esponentes, se reputa cada letra por tantas dimensiones como unidades hay en su esponente.

108 Cuando una espresion algebraica consta de un solo termino, se llama *monomia* ó es un *monomio*; cuando consta de mas de uno se llama en general *polinomio*, distinguiéndose en particular con los nombres de *binomio*, *trinomio*, *cuadrinomio*, etc. cuando consta de dos, tres, cuatro, etc. monomios. Así, las espresiones  $a+b$ ,  $4a^5-5b^2c^3$  son binomios, de los cuales  $a$  y  $4a^5$  son los *primeros* términos, y  $+b$ ,  $-5b^2c^3$  son los *segundos*; etc.

Cuando todos los términos de un polinomio tienen un mismo número de dimensiones, se dice que es *homogéneo*; y cuando no, que es *heterogéneo*.

109 Se llaman términos *semejantes* aquellos que tienen unas mismas letras, y cada una los mismos esponentes; por ejemplo  $4a^2b$ ,  $5a^2b$  y  $7ba^2$  son términos semejantes.

Es muy frecuente en el Álgebra el encontrar términos de esta especie en los resultados de las operaciones, en cuyo caso se deben *simplificar*. Esta simplificacion se hace *sumando los coeficientes, si tienen un mismo signo los términos semejantes, y poniendo esta suma por coefi-*

ciente á uno de los términos con su signo, cuya operacion se llama *reduccion*; ó restando los coeficientes, si tienen diferente signo, y poniendo la resta á uno de los términos semejantes, con el signo del término que tenía mayor coeficiente, cuya operacion se llama *destruccion*.

Por ejemplo, supongamos que se tiene el polinomio

$$4a^3 - 7bc - d^2 + 3ac + 6a^3 + 3bc + a^3 - 8d^2 - 3ac + 4b^3;$$

en que observo tres términos donde se halla  $a^3$ , y por lo mismo hay tres semejantes con él; y como tienen un mismo signo, haré la reduccion diciendo: 4 coeficiente de  $4a^3$ , y 6 de  $6a^3$ , son 10, y 1 coeficiente de  $a^3$  (§ 106) son 11; luego pondré un término en que haya  $a^3$  con un coeficiente 11; y con el signo + que es el que llevan dichos términos; pero aquí se omitirá dicho signo (104). Luego, veo que hay dos términos donde se halla  $bc$ ; y como tienen diferente signo, haré la destruccion diciendo: la diferencia entre 7 y 3 es 4, que será el coeficiente que deberé poner á  $bc$ ; y como el término  $-7bc$  es el que tiene mayor coeficiente, manifiesta que las cuatro que quedan son para quitar, y de consiguiente pondré el signo - al  $4bc$ ; como hay dos términos semejantes con  $d^2$  y tienen un mismo signo, haré la reduccion diciendo: 1 coeficiente de  $-d^2$ , y 8 de  $-8d^2$  son 9, que pondré por coeficiente al  $d^2$ , con el signo -, y tendré  $-9d^2$ ; ahora paso á hacer la destruccion de los términos  $+3ac$  y  $-3ac$ , diciendo: la diferencia entre 3 y 3 es cero, que deberá ser el coeficiente de  $ac$ ; pero el cero por coeficiente manifiesta que no está el término aquel ninguna vez por sumando, y por lo mismo no se pondrá. Cuando los términos semejantes son iguales por tener un mismo coeficiente, y tienen diferente signo como en este caso, se dice  $+3ac$  y  $-3ac$  se destruyen, y se borran ó tachan en el parage donde están; y como ya no hay mas que el  $+4b^3$  que no tiene semejante, este quedará del mismo modo en el resultado, el que será  $11a^3 - 4bc - 9d^2 + 4b^3$ .

Para entender la razon de esto, se considerará que cada término, sin coeficiente, representa una cosa cualquiera, como un duro, una manzana etc.; y así como no encontramos ninguna dificultad en que tres manzanas y cuatro manzanas son siete manzanas: nueve duros ménos seis duros son tres duros: y ménos cinco pesetas ménos cuatro pesetas son ménos nueve pesetas, ó que el que debe cinco pesetas por un lado y cuatro por otro, resulta debiendo nueve etc.; del mismo modo una cosa  $ab$  mas tres veces la misma  $ab$  ó  $3ab$ , son cuatro veces

la cosa  $ab$ , ó  $4ab$ . Todo está, según se ve, en comprender el lenguaje algebraico.

*De la suma de las cantidades algebraicas.*

---

110 Sumar en Álgebra es reunir en una sola expresión el valor de dos ó mas.

Para ejecutar esta operación se colocan todos los sumandos los unos á continuación de los otros con los mismos signos que llevan, y queda hecha la suma; despues se simplifica si se puede (109).

*Dem.* En efecto, si quiero sumar  $+b$  con  $+a$ , indicaré la operación como aquí se ve:  $+a+(+b)$ ; donde observo que el signo  $+$ , que está fuera del paréntesis, indica la operación de sumar, esto es, que aquí lo que me propongo es aumentar; el signo  $+$  de dentro del paréntesis, indica que la cantidad  $+b$  que está dentro, es positiva, esto es, que conspira al fin que me propongo; y como este es aumentar, se deberá poner la  $b$  á continuación de la  $a$  con el signo que denote este aumento; esto es, con  $+$ , y tendré que  $+a+(+b)=+a+b=a+b$ .

Si con la cantidad  $+a$  quiero sumar  $-b$ , indicaré la operación como aquí se ve:  $+a+(-b)$ ; donde observo, como ántes, que el signo  $+$  de fuera del paréntesis, indica que el fin que me propongo es aumentar; el signo  $-$  de dentro, indica que la cantidad  $b$  es negativa, ó que conspira al fin contrario para que se entabla el cálculo; luego conspirará á disminuir; por lo que deberé poner la  $b$  á continuación de la  $a$  con el signo  $-$ , que denota la disminución, y tendré que  $+a+(-b)=+a-b=a-b$ .

Comparando estos resultados con lo que prescribe la regla, y generalizándola á los polinomios, resulta L. Q. D. D.

*Cor.* De donde se sigue que  $a+(\pm b)=a\pm b$ , y  $a+(\mp b)=a\mp b$ .

111 Para sumar polinomios se indica la operación, poniendo los sumandos los unos á continuación de los otros, cada uno dentro de un paréntesis; despues se practica la regla solo con quitar los paréntesis; y luego se simplifica, como se ve en este ejemplo.

$$\begin{aligned}
 & (4b^2a + 5a^2c - 2abd) + (3b^2 - 8a^3) + \\
 & (7abd + 4a^3 - 2a^2c + 3b^2a) + (4c^3 - 6a^4) = 4b^2a + 5a^2c \dots \\
 & - 2abd + 3b^2 - 8a^3 + 7abd + 4a^3 - 2a^2c + 3b^2a + 4c^3 \dots \\
 & - 6a^4 = 7b^2a + 3a^2c + 5abd + 3b^2 - 4a^3 + 4c^3 - 6a^4.
 \end{aligned}$$

*De la operacion de restar cantidades algebraicas.*

112 Restar en Álgebra es hallar la diferencia entre dos cantidades, ó quitar una cantidad de otra dada.

Esta operacion se ejecuta poniendo el sustraendo con signos contrarios á los que lleve, á continuacion del minuendo, y despues se simplifica.

*Dem.* En efecto, si de la cantidad  $+a$  quiero restar la cantidad  $+b$ , indicaré la operacion como aquí se vé:  $+a - (+b)$ ; donde observo que el signo  $-$  de fuera del paréntesis indica la operacion de restar, esto es, que el fin que me propongo es disminuir; el signo  $+$  de dentro, indica que la cantidad  $b$  es positiva, ó que conspira al fin que me propongo; luego deberé poner la  $b$  despues de la  $a$  con el signo  $-$  que indica la disminucion, y tendré que  $+a - (+b) = +a - b = a - b$ .

Si de la cantidad  $a$  quisiera restar la cantidad  $-b$ , indicaría la operacion de este modo:  $+a - (-b)$ ; y observaría que el signo  $-$  de fuera del paréntesis, indica que el fin que me propongo es disminuir; el signo  $-$  de dentro, indica que la cantidad  $b$  conspira al fin opuesto; luego conspirará á aumentar; luego se deberá poner la  $b$  á continuacion de la  $a$ , con el signo  $+$  que denota dicho aumento, y tendré que  $+a - (-b) = +a + b = a + b$ .

Comparando estos resultados con la regla, y generalizándola á los polinomios, resulta L. Q. D. D.

*Cor.* De donde se sigue en general que

$$a - (\pm b) = a \mp b, \text{ y } a - (\mp b) = a \pm b.$$

*Esc.* El segundo resultado de la operacion de sumar corresponde á este lenguaje irónico: *á un hombre le han hecho pobre con dádivas*, que quiere decir que le han aumentado gastos. Igualmente, el segundo resultado de la operacion de restar corresponde á *hacer rico á un hombre quitándole*; pero será quitándole gastos ó deudas. Mas el Algebra, que es una lengua perfecta, no admite palabras

de doble sentido, ni capciosas; en ella todo está perfectamente determinado, todo es verdad, todo exactitud.

113 Para restar polinomios, se escribe el minuendo (si se quiere dentro de paréntesis), despues el signo  $-$ , y luego el sustraendo dentro de un paréntesis; despues se practica la regla quitando los paréntesis, cuidando de mudar los signos del sustraendo, y se simplifica como se ve en este ejemplo.

Si de  $18a^7b^2-5c^4d+9a^2b^2c^3$ , quiero restar  $4a^2b^2c^3-3a^7b^2-7c^4d$ , ejecutaré la operacion como aquí se ve:

$$\begin{aligned} 18a^7b^2-5c^4d+9a^2b^2c^3-(4a^2b^2c^3-3a^7b^2-7c^4d) &= \\ 18a^7b^2-5c^4d+9a^2b^2c^3-4a^2b^2c^3+3a^7b^2+7c^4d &= \\ 21a^7b^2+2c^4d+5a^2b^2c^3. & \end{aligned}$$

*De la multiplicacion algebraica.*

---

114 Multiplicar en Álgebra es tomar una cantidad tantas veces como diga otra, y tomarla del modo que diga se debe tomar. Esto es, el multiplicador con sus unidades dice las veces que se debe tomar el multiplicando, y con su signo el modo con que se debe tomar.

Pueden ocurrir tres casos: *multiplicar un monomio por otro; un polinomio por un monomio, ó al contrario; y un polinomio por otro polinomio.*

Para multiplicar un monomio por otro, hay que atender á cuatro cosas: á signos, coeficientes, letras y espontes.

Para demostrar la regla de los signos, me propondré multiplicar  $+a$  por  $+b$ , ó para mayor sencillez y claridad haré  $b=1$ , é indicaré la operacion de este modo:  $+ax+1$ ; ahora, el multiplicador  $+1$  dice con sus unidades que se tome una vez al multiplicando; y con su signo  $+$  dice que se debe tomar como él sea; el multiplicando  $+a$  es positivo, luego se deberá tomar una vez positivamente; luego será  $+ax+1=+1a=+a$ ; y en cuanto á los signos dará  $+ \times + = +$ .

Sea ahora el multiplicador  $-1$ , y tendré indicada la operacion de este modo:  $+ax-1$ ; aquí el multiplicador con sus unidades dice que se debe tomar una vez

al multiplicando; y con su signo que se debe tomar al contrario de como él sea; el multiplicando es positivo, luego le deberé tomar una vez negativamente, y tendré  $+a \times -1 = -1a = -a$ ; y en cuanto á signos:  $+ \times - = -$ .

Si el multiplicando fuese negativo, tal como  $-a$ , y el multiplicador  $+1$ , indicaría la operacion de este modo:  $-a \times +1$ , donde el multiplicador  $+1$ , dice con sus unidades que se debe tomar una vez el multiplicando; y con su signo, que se debe tomar como él sea; el multiplicando es negativo, luego se deberá tomar una vez negativamente, y será  $-a \times +1 = -1a = -a$ ; y para los signos dará  $- \times + = -$ .

Finalmente, si el multiplicador fuese  $-1$ , tendría indicada la operacion de este modo:  $-a \times -1$ ; donde el multiplicador  $-1$  dice con sus unidades que se debe tomar el multiplicando una vez; y con su signo, que se debe tomar al contrario de como él sea; el multiplicando es negativo, luego se deberá tomar positivamente, y se tendrá:  $-a \times -1 = +1a = +a$ ; y para los signos resulta  $- \times - = +$ .

Estos cuatro casos se convierten en estos dos, á saber: *signos semejantes*, esto es,  $+ \text{ por } + \text{ ó } - \text{ por } -$ , ó en general  $\pm \text{ por } \pm$  ó  $\mp \text{ por } \mp$ , dan siempre  $+$  en el producto; y *signos desemejantes*, esto es,  $+ \text{ por } - \text{ ó } - \text{ por } +$ , ó en general  $\pm \text{ por } \mp$  ó  $\mp \text{ por } \pm$ , dan siempre  $-$  en el producto.

Los coeficientes se multiplican por las reglas de Aritmética; porque si  $a \times b = ab$ , de multiplicar  $2a$  por  $3b$ , debe resultar (61, 3.º) un producto seis veces mayor que  $ab$ ; esto es,  $2 \times 3ab$  ó  $6ab$ .

Las letras, que son diferentes en ambos factores, se ponen unas á continuacion de otras sin interposicion de signos ningunos (103).

En punto á los esponentes, los de una misma letra se suman; porque si se tiene que multiplicar  $a^3$  por  $a^2$ , indicando y ejecutando la operacion como aquí se vé:

$a^3 \times a^2 = a a a \times a a = a a a a a = a^5 = a^{3+2}$ , resultará la regla.

Así, para multiplicar  $+4b^3a^4c^2e^5$  por  $5a^3b^5cd^4$ , diré:  $+$  por  $+$  da  $+$ , que pondré en el producto;  $4$  por  $5$  son  $20$ , que pondré despues del signo  $+$ ;  $b^3$  por  $b^5$ , sumando sus esponentes, será  $b^8$ ;

$a^4$  por  $a^3$  dará  $a^7$ ;  $c^2$  por  $c$ , sumando sus esponentes 2 y 1, dará  $c^3$ ; y como no hay  $e$  en el multiplicador ni  $d$  en el multiplicando, se pondrán con sus esponentes despues de lo que ya hemos sacado, y se tendrá que

$$+4b^3a^4c^2e^5 \times +5a^3b^5cd^4 = +20b^8a^7c^3e^5d^4; \text{ ó solo } 20b^8a^7c^3e^5d^4.$$

Si los esponentes son indeterminados, se indica la suma de los de los factores; así, si quiero multiplicar  $+3a^m b^2 c^n d^r$  por  $-7b^s a^t e^7 d^s$ , tendré que el producto será  $-21a^{m+t} b^{2+s} c^n d^{r+s} e^7$ .

115 Para multiplicar un polinomio por un monomio, ó un monomio por un polinomio, *se multiplica cada término del polinomio por el monomio.*

Así, si quiero multiplicar  $5b^2c^4 - 4a^3d^5 + 3b^2cd^4$  por  $-3a^5d^6c^3$ , indicaré y ejecutaré la operacion de este modo:

$$(5b^2c^4 - 4a^3d^5 + 3b^2cd^4) \times -3a^5d^6c^3 = \\ -15b^2c^7a^5d^6 + 12a^8d^{11}c^3 - 9b^2c^4d^{10}a^5;$$

multiplicaré el primer término  $5b^2c^4$  por  $-3a^5d^6c^3$ , lo que (114) dará  $-15b^2c^7a^5d^6$ ; luego, multiplicaré el  $-4a^3d^5$  por  $-3a^5d^6c^3$ , lo que dará  $+12a^8d^{11}c^3$ ; y por último multiplicaré el  $+3b^2cd^4$  por  $-3a^5d^6c^3$ , que dará  $-9b^2c^4d^{10}a^5$ , y tendré el producto que allí se presenta.

116 Para multiplicar un polinomio por otro, *se multiplica todo el multiplicando por el primer término del multiplicador; despues todo el multiplicando por el 2.º término del multiplicador; despues por el tercero etc.; se van colocando los productos unos á continuacion de otros con los signos con que vayan saliendo, y luego se simplifica si se puede.*

1.º ej. Si quiero multiplicar  $a+b$  por  $a-b$ , multiplicaré primero  $a+b$  por  $a$ , lo que da  $a^2+ab$ ; y luego  $a+b$  por  $-b$ ; lo que da  $-ab-b^2$ , que puesto á continuacion del anterior y destruyendo  $+ab$  con  $-ab$ , se tendrá

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

*Esc.* Este resultado nos dice: que la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, da por producto la diferencia de estas cantidades con un esponente duplo del que tenían en los factores (\*).

(\*) De lo que espondrémos (128..3.º), resulta que una cantidad que lleva esponente duplo de otra, se dice que es su *cuadrado*; por lo que esta propiedad se enunciará en lo sucesivo del modo siguiente: *la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, da la diferencia de sus cuadrados.*

Recíprocamente, si dada la diferencia de dos cantidades se quiere descomponer en factores, se pondrá la suma de dichas cantidades multiplicada por su diferencia, poniendo á cada una la mitad del esponente que tenía.

$$\text{Así, } a^8 - b^6 = (a^4 + b^3)(a^4 - b^3);$$

$$m^9 - n^5 = (m^{4\frac{1}{2}} + n^{2\frac{1}{2}})(m^{4\frac{1}{2}} - n^{2\frac{1}{2}}).$$

2.º ej. Si quiero multiplicar  $4a^3b^2 - 3a^2b^3 + 5b^5$  por  $3a^2b - 4ab^2$ , indicaré y ejecutaré la operacion del modo siguiente:

$$\begin{aligned} & (4a^3b^2 - 3a^2b^3 + 5b^5)(3a^2b - 4ab^2) = \\ & 12a^5b^3 - 9a^4b^4 + 15b^6a^2 - 16a^4b^4 + 12a^3b^5 - 20ab^7 = \\ & 12a^5b^3 - 25a^4b^4 + 15b^6a^2 + 12a^3b^5 - 20ab^7; \end{aligned}$$

multiplicaré primero todo el multiplicando por el primer término  $3a^2b$  del multiplicador, lo que da el producto

$12a^5b^3 - 9a^4b^4 + 15b^6a^2$ ; despues multiplicaré todo el multiplicando por el segundo término  $-4ab^2$  del multiplicador, é iré colocando el producto á continuacion del anterior, y ejecuto la reduccion como allí se ve:

$$\begin{aligned} 3.º \quad & (a^6b^3 + a^9 + b^9 + b^6a^3)(a^3 - b^3) = a^9b^3 + a^{12} + \\ & a^3b^9 + b^6a^6 - a^6b^6 - a^9b^3 - b^{12} - b^9a^3 = a^{12} - b^{12}. \end{aligned}$$

#### De la division algebraica.

117 Dividir en Álgebra es buscar cuántas veces una cantidad contiene á otra, y del modo que la contiene; de donde resulta que el divisor multiplicado por el cociente debe dar el dividendo; y por lo mismo se puede decir tambien que dividir es hallar una cantidad que multiplicada por el divisor dé el dividendo.

Para dividir un monomio por otro hay que atender á cuatro cosas, que son: 1.º signos; 2.º coeficientes; 3.º letras; y 4.º esponentes.

1.º Signos semejantes dan + en el cociente, y desemejantes dan —.

Dem. Como el signo del divisor, combinado con el que haya de llevar el cociente, ha de producir el del dividendo, cuando el dividendo tenga el signo +, el cociente tendrá el mismo signo que el divisor; pues sólo signos semejantes (114) producen +; y cuando el dividendo tenga el signo —, el cociente llevará signo contrario al que tenga el divisor; pues estos son (114) los que pro-

ducen  $-$ ; luego  $\frac{+}{+} = +$ ,  $\frac{+}{-} = -$ ,  $\frac{-}{+} = -$ ,  $\frac{-}{-} = +$ ,

ó en general  $\frac{\pm}{+} = \pm$ ,  $\frac{\pm}{-} = \mp$ ,  $\frac{+}{\pm} = \pm$ ,  $\frac{-}{\pm} = \mp$ ,  $\frac{\mp}{+} = \mp$ ,

$\frac{\mp}{-} = \pm$ ,  $\frac{+}{\mp} = \mp$ ,  $\frac{-}{\mp} = \pm$ ,  $\frac{\pm}{\pm} = +$ ,  $\frac{\pm}{\mp} = -$ ,  $\frac{\mp}{\pm} = -$ ,  $\frac{\mp}{\mp} = +$ ,

que es L. Q. D. D.

2º *Los coeficientes se dividen por las reglas de la Aritmética; y si no se pueden dividir con exactitud, se simplifica si se puede.*

*Dem.* Como el cociente multiplicado por el divisor ha de dar el dividendo, el coeficiente del cociente por el del divisor ha de producir el del dividendo; luego el coeficiente del cociente deberá ser lo que resulte de dividir el del dividendo por el del divisor. L. Q. D. D.

3º *Las letras diferentes, que tengan el dividendo y divisor, se dejan donde estén; y las letras que haya comunes, sin esponente ó con uno mismo, se borran en ambos términos.*

*Dem.* Lo primero es porque de esta manera queda indicada la operacion; y lo segundo, porque en el cociente no puede haber nada que sea comun á los dos términos de la division; pues al hacer la multiplicacion resultarían duplicadas en el producto, y no como están en el dividendo, que es lo que debe resultar.

4º *Si las letras comunes tienen esponentes diferentes, se resta el menor del mayor; y queda la letra en el término que tiene mayor esponente, con un esponente igual á la diferencia hallada.*

*Dem.* Esto equivale á suprimir en ambos términos el factor ó factores que tienen de comun. L. Q. D. D.

Entendido esto, vamos á resolver algunos ejemplos.

1.º Si quisiera dividir  $12a^5b^2c^3d^2$  por  $-3ba^3c^7e$ , diría: + del dividendo (104) dividido por  $-$ , da  $-$ ; 12 dividido por 3 da 4;  $a^5$  dividido por  $a^3$ , es  $a^2$ , porque restando el esponente 3 de la  $a$  del divisor, del esponente 5 de la  $a$  del dividendo, queda 2;  $b^2$  dividido por  $b$ , es  $b$ , porque  $2-1=1$ , y  $b^1=b$ ;  $c^3$  dividido

por  $c^7$  da  $c^4$  en el divisor, porque la diferencia entre 3 y 7 es 4, y en el divisor es donde hay mayor esponente; la  $d^2$  quedará en el dividendo, y la  $e$  en el divisor; de manera que tendré

$$\frac{12a^5b^2c^3d^2}{-3ba^3c^7e} = -\frac{4a^2bd^2}{c^4e}.$$

2.º Si tuviera que ejecutar esta division indicada

$$\frac{20a^9b^5c^m d^s f}{8a^4b^2c^n d^r f^2}, \text{ diría: + por + da +, que no pongo (104); } 20$$

dividido por 8 no se puede ejecutar, y así simplificaré dividiendo ambas cantidades por 4, lo que las reducirá á  $\frac{5}{2}$ ; ahora diré  $a^9$  dividido por  $a^4$  es  $a^5$  en el dividendo;  $b^5$  dividido por  $b^2$  da  $b^3$ ;  $c^m$  dividido por  $c^n$  no podemos hacer sinó indicarlo; pero como no sabemos si  $m$  es mayor que  $n$  ó  $n$  mayor que  $m$ , no sabemos cuál se debe restar de cuál; podemos restar la  $n$  de la  $m$  y dejar en el numerador del cociente  $c^{m-n}$ ; ó al contrario, y dejar  $c^{n-m}$  en el denominador, pues siempre el cociente por el divisor da el dividendo; pero preferirémos el dejar  $c^{m-n}$  que es mas sencillo; y haciendo lo mismo con las demas letras, tendremos

$$\frac{20a^9b^5c^m d^s f}{8a^4b^2c^n d^r f^2} = \frac{5a^5b^3c^{m-n}d^s f}{2f^2}, \text{ ó } = \frac{5a^5b^3}{2c^{n-m}d^{r-s}f^2}$$

118 Considerémos ahora los resultados que puede dar la expresion  $\frac{c^m}{c^n} = c^{m-n}$  (A).

Aquí puede ocurrir que  $m > n$ , ó  $m = n$ , ó  $m < n$ .

1.º Si  $m > n$  será necesario añadir á  $n$  una cantidad cualquiera  $u$ , para que sea igual con  $m$ ; de manera que  $m = n + u$ ; y substituyendo este valor en la expresion (A),

será  $\frac{c^m}{c^n} = c^{m-n} = c^{n+u-n} = c^u$ , porque  $+n$  y  $-n$  se

destruyen. Este caso no nos enseña nada de nuevo.

2.º Si  $m = n$ , substituyendo en (A), será

$$\frac{c^m}{c^n} = c^{m-n} = c^{n-n} = c^0;$$

aquí encuentro una expresion  $c^0$ , que es desconocida; así, para ver lo que significa, haré la substitucion de  $n$  por  $m$

antes de indicar la resta de los esponentes, y tendré  $\frac{c^m}{c^n} = \frac{c^n}{c^n} = 1$ ; porque toda cantidad dividida por sí misma da (51, 3.º) la unidad; luego tengo aquí dos expresiones  $c^0$  y 1 que son el resultado de una misma  $\frac{c^m}{c^n}$ ; luego

serán (intr. ax. 5.º) iguales entre sí, y se tendrá  $c^0 = 1$ ; pero  $c$  expresa una cantidad cualquiera, luego toda cantidad elevada á cero es igual á la unidad.

3.º Si  $m < n$ , añadiendo á  $m$  una cantidad cualquiera  $u$ , para que sea igual con  $n$ , será  $m+u=n$ ; y poniendo en (A) en vez de  $n$  este valor, tendré

$$\frac{c^m}{c^n} = c^{m-n} = c^{m-(m+u)} = c^{m-m-u} = c^{-u}.$$

Tambien hallo aquí una expresion  $c^{-u}$  no conocida; así, para indagar lo que expresa, haré la sustitucion antes de indicar la resta de los esponentes, y tendré

$$\frac{c^m}{c^n} = \frac{c^m}{c^{m+u}} = \frac{c^m}{c^m c^u} = \frac{1}{c^u};$$

donde tengo dos valores de  $\frac{c^m}{c^n}$ , á saber:  $c^{-u}$  y  $\frac{1}{c^u}$ ,

que por lo dicho (intr. ax. 5.º) serán iguales, y tendré

$\frac{1}{c^u} = c^{-u}$ , que dice, que toda cantidad se puede trasladar del divisor al divideudo, ó al contrario, mudando el signo á su esponente.

Esta proposicion se puede demostrar directamente de este modo.

Sea  $\frac{ax^m}{bz^n}$  la expresion propuesta. Si el dividendo se multiplica por  $x^n \cdot x^{-n} = x^{n-n} = x^0 = 1$ , no se alterará la fraccion; y por la misma razon, tampoco se alterará el divisor multiplicándole por  $x^m \cdot x^{-m} = 1$ ; luego se tendrá  $\frac{ax^m}{bz^n} = \frac{ax^m \cdot x^n \cdot x^{-n}}{bz^n \cdot x^m \cdot x^{-m}}$

suprimiendo en ambos términos los factores comunes  $x^m \cdot z^n$ , re-

sulla 
$$\frac{ax^m}{bz^n} = \frac{az^{-n}}{bx^{-m}}.$$

*Esc.* Puesto que  $\frac{+}{+} = +$ , y  $\frac{-}{-} = +$ , así como  $\frac{-}{+} = -$ ,  
y  $\frac{+}{-} = -$ , resulta que, en toda división, podemos mudar  
los signos al dividendo y divisor sin que se altere el cocien-

te. Así es, que si tenemos  $\frac{-a}{-b}$ , podemos desde luego poner  
 $\frac{+a}{+b}$ , ó simplemente  $\frac{a}{b}$ ; y si tenemos  $\frac{-a}{+b}$ , podemos po-  
ner también  $\frac{+a}{-b}$ . De lo cual nos podremos convencer tam-

bien sin mas que considerar que, en este caso, no hacemos mas  
que multiplicar por  $-1$  el dividendo y divisor, lo que (61..4.º)  
no altera el cociente.

119 Para dividir un polinomio por un monomio, se  
divide cada término del polinomio por el monomio; por-  
que dividiendo todas las partes del dividendo, y reunien-  
do todos los cocientes, debe resultar (intr. ax. 3.º) el co-  
ciente total.

Así, si quiero dividir la cantidad  $15a^6b^2 - 12a^4c^3 + 8b^4c^5$   
por  $-6a^3bc^4$ , tendré 1.º  $\frac{15a^6b^2}{-6a^3bc^4} = -\frac{5a^3b}{2c^4}$ ; 2.º  $\frac{-12a^4c^3}{-6a^3bc^4} = \frac{2a}{bc}$ ,  
3.º  $\frac{8b^4c^5}{-6a^3bc^4} = -\frac{4b^3c}{3a^3}$ ;

luego 
$$\frac{15a^6b^2 - 12a^4c^3 + 8b^4c^5}{-6a^3bc^4} = \frac{2a}{bc} - \frac{5a^3b}{2c^4} - \frac{4b^3c}{3a^3}.$$

120 Para dividir un polinomio por otro lo primero  
que se hará es ordenar; para lo cual se verá la letra que  
está mas repetida en el dividendo y divisor, y se volve-  
rán á escribir principiando en ambos por el término en  
que dicha letra tenga mayor esponente; despues el que  
tenga el esponente inmediato menor etc.

Hecho esto, divídase el primer término del dividendo  
por el primero del divisor, y se tendrá un término del co-  
ciente; multiplíquese este cociente por todo el divisor, y

réstese el producto de todo el dividendo (lo cual se conseguirá mudando los signos del producto conforme se vaya formando) y se hará la destruccion que se pueda. Despues se divide el primer término de esta resta por el primero del divisor, lo que dará el segundo término del cociente; despues se ejecutará la multiplicacion y resta; y se continuará del mismo modo hasta que se halle cociente exacto, ó hasta que el mayor esponente de la letra por que se ordena, sea en la resta menor que el mayor de la misma en el divisor; entónces no hay cociente exacto, y se indica la division de la resta por el divisor (49).

Ejem. Quiero dividir  $a^3b^3c - ab^3c^2 - 2a^4b^2c + a^5bc + 2a^2bc^2 - a^3c^3$  por  $a^2 + b^2 - 2ab$ .

Para ordenar, veo que la  $a$  es la que se halla mas repetida en ambos términos de la division, y ordenando por ella tendré

$$\begin{array}{r}
 a^5bc - 2a^4b^2c + a^3b^3c + 2a^2bc^2 - ab^3c^2 \\
 \quad \quad \quad - a^3c^3 \\
 - a^5bc + 2a^4b^2c - a^3b^3c \\
 \hline
 \quad \quad \quad - a^3c^3 + 2a^2bc^2 - ab^3c^2 \\
 \quad \quad \quad + a^3c^3 - 2a^2bc^2 + ab^3c^2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 a^2 - 2ab + b^2 \\
 a^2bc - ac^2
 \end{array} \right.$$

Ahora empezaré la division diciendo:  $a^5bc$  dividido por  $a^2$  es  $a^3bc$ , que pondré en el cociente; haré la multiplicacion de  $a^3bc$  por todo el divisor, diciendo: + por + da +, y como se ha de restar es -, que pongo debajo del + que debía tener el primer término del dividendo;  $a^3bc$  por  $a^2$  da  $a^5bc$ , que pongo despues del signo -; continúo multiplicando el cociente por el segundo término del divisor, y diré: + por - da - que, como se ha de restar, es +;  $a^3bc$  por  $2ab$  es  $2a^4b^2c$ , que pongo despues del signo +; + por + da +, que como se ha de restar será -;  $a^3bc$  por  $b^2$  da  $a^3b^3c$ , que pondré tambien; tiraré una raya para poner debajo de ella la resta que quede despues de hecha la destruccion; pero advirtiéndole que  $+a^5bc$  de arriba con  $-a^5bc$  de abajo se destruyen, que  $-2a^4b^2c$  se destruye con  $+2a^4b^2c$ , y  $+a^3b^3c$  con  $-a^3b^3c$ , pongo debajo de la raya lo que queda, que es  $-a^3c^3 + 2a^2bc^2 - ab^3c^2$ .

El primer término de esta resta  $-a^3c^3$ , le dividiré por  $a^2$ , primero del divisor, lo que dará  $-ac^3$ ; multiplico y resto, diciendo: - por + da -, y como se ha de restar es +, que pongo debajo del signo - del  $-a^3c^3$ ;  $a^2$  por  $ac^3$  es  $a^3c^3$  que pongo; continúo  $-ac^3$  por  $-2ab$  es  $+2a^2bc^3$ , que como se ha de restar

pongo  $-2a^2bc^2$ ; sigo:  $-ac^2$  por  $b^3$  es  $-ab^2c^2$ , que como se ha de restar será  $+ab^2c^2$ ; y como estos términos se destruyen con sus correspondientes, pondré debajo de la raya 0 por resta, y tengo que el cociente será  $a^3bc-ac^2$ .

*Dem.* El ordenar es una operación que se puede hacer, porque esto no altera el valor de los términos de la división; y se debe practicar, porque muchas cantidades (como la anterior) que ordenadas dan cociente exacto, no le darían sin esta circunstancia, y el resultado debe ser siempre el mas sencillo.

Todo lo demas es enteramente análogo al procedimiento aritmético (53), y se reduce á buscar los diferentes términos de un polinomio, que multiplicado por el divisor dé el dividendo, que es L. Q. D. D.

*Esc.* La multiplicación del cociente por el primer término del divisor se puede omitir; porque como dará el primer término del dividendo, y se ha de restar de él, se podrá tachar inmediatamente el primer término del dividendo, y multiplicar desde el segundo del divisor en adelante, que es lo que se ve en los dos ejemplos siguientes.

Puesto que (§ 116)  $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ , resulta que, dividiendo  $a^2-b^2$  por  $a-b$ , se tendrá  $a+b$ .

Si se tuviera que dividir  $a^3-b^3$  por  $a-b$ , haría la operación como aquí se presenta:

$$\begin{array}{r} \text{Donde veo que sale tam-} \\ \text{bien cociente exacto.} \end{array} \quad \begin{array}{r} a^3-b^3 \\ +a^2b \\ +ab^2 \\ +b^3 \\ 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} a-b \\ \hline a^2+ab+b^2 \end{array} \right.$$

Si tuviese que dividir  $a^4-b^4$  por  $a-b$ , lo haría del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} \text{Donde tambien hallo co-} \\ \text{ciente exacto. Continuando} \\ \text{del mismo modo, se deduce} \\ \text{en general, que un bino-} \\ \text{mio tal como } a^m-b^m, \text{ di-} \\ \text{vidido por } a-b, \text{ siempre} \\ \text{da cociente exacto; el cual se puede poner desde luego por esta} \\ \text{regla.} \end{array} \quad \begin{array}{r} a^4-b^4 \\ +a^3b \\ +a^2b^2 \\ +ab^3 \\ +b^4 \\ 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} a-b \\ \hline a^3+a^2b+ab^2+b^3 \end{array} \right.$$

*El primer término será el primero del dividendo con una unidad ménos en su esponente; en el segundo, la*

primera parte del dividendo tiene una unidad ménos que en el anterior, y aparece la segunda con la unidad por esponente; la primera parte va teniendo una unidad ménos en su esponente; y la segunda una unidad mas hasta que en el último término no se hulla la primera parte, y la segunda se encuentra sola con un esponente una unidad ménos que el que llevaba en el dividendo; todos los signos son positivos, y los términos no tienen coeficientes.

Esta propiedad, que acabamos de deducir por analogía, la demostramos por otros dos métodos distintos en el (§ 186 del T. I. p. I. T. E.); y si por ella quisiéramos ejecutar la division de  $a^9 - b^9$  por  $a - b$ , hallaríamos

$$a^8 + a^7b + a^6b^2 + a^5b^3 + a^4b^4 + a^3b^5 + a^2b^6 + ab^7 + b^8.$$

*De los quebrados literales.*

---

121 Los quebrados literales ó algebráicos se calculan del mismo modo que los numéricos; porque todas las demostraciones que dimos respecto de estos, estaban concebidas en términos generales. Así, su valor no se alterará aun cuando se multipliquen ó partan sus dos términos por una misma cantidad. Por esta causa se reducirán á un comun denominador del mismo modo que aquellos (68); por manera, que si tengo los quebrados

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ , quedarán reducidos á un comun denominador, si multiplico los dos términos del primero por  $dnq$ , los del segundo por  $bnq$ , los del tercero por  $bdq$ , y los del cuarto por  $bdn$ , cuya operacion los transformará en

$$\frac{adnq}{bdnq}, \frac{cbnq}{bdnq}, \frac{mbdq}{bdnq}, \frac{bdnp}{bdnq}.$$

Igualmente, si se dan quebrados con factores ó letras comunes arriba y abajo, se podrán suprimir y quedarán simplificados. Así,

$$\frac{ad}{d^2c} = \frac{a}{dc}, \text{ y } \frac{ad+ba}{d^2+bd} = \frac{a}{d};$$

pues en el numerador y denominador del primero es comun la  $d$ , y en los dos términos del segundo es comun el factor

$d+b$ , que suprimido se convertirá el quebrado en lo que hemos puesto.

122 Para sumarlos se hará lo mismo que con los numéricos (70).

$$\text{De manera que } \frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an}{bn} + \frac{bm}{bn} = \frac{an+bm}{bn}.$$

123 Para restarlos se hará lo mismo que con los numéricos (73). Así, si de  $\frac{a}{b}$  quiero restar  $\frac{m}{n}$ , tendré

$$\frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \frac{an}{bn} - \frac{bm}{bn} = \frac{an-bm}{bn}.$$

124 Para reducir aquí un entero á la especie del quebrado que le acompaña, ya sea por vía de suma ó de resta, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, con esto se suma el numerador del quebrado cuando este lleva el signo +, ó se resta cuando lleva el -; y á todo esto se le pone por denominador el del quebrado.

Sea la espresion  $a^2+b^2+\frac{a^4}{b^2-a^2}$  la que se quiere

reducir; multiplicaré el entero  $a^2+b^2$  por el denominador  $b^2-a^2$ , que me da (116 esc.)  $b^4-a^4$ ; con esto sumaré el numerador  $a^4$ , y á la suma le pondré por denominador el del quebrado, en esta forma:

$$a^2+b^2+\frac{a^4}{b^2-a^2} = \frac{(a^2+b^2)(b^2-a^2)+a^4}{b^2-a^2} = \frac{b^4-a^4+a^4}{b^2-a^2} = \frac{b^4}{b^2-a^2}.$$

125 Para multiplicarlos se hace lo dicho (76); de manera que

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}, \text{ y } \frac{a+m}{c^2-n^2} \times \frac{a-m}{c^2+n^2} = \frac{(a+m)(a-m)}{(c^2-n^2)(c^2+n^2)} = \frac{a^2-m^2}{c^4-n^4}.$$

Y para multiplicar un quebrado por un entero ó al contrario, se multiplicará el numerador del quebrado por el entero, como aquí se ve:

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}, \text{ y } (a^2+b^2) \frac{m}{n} = \frac{(a^2+b^2)m}{n} = \frac{a^2m+b^2m}{n}.$$

126 Para dividirlos se ejecutará lo dicho (79); de manera que

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{bm}; \text{ y } \frac{a+m}{c+n} : \frac{c-n}{a-m} = \frac{(a+m)(a-m)}{(c+n)(c-n)} = \frac{a^2-m^2}{c^2-n^2}.$$

Si se tratase de dividir un entero por un quebrado, se practicaría lo dicho (80); así,  $a : \frac{c}{d^2} = \frac{ad^2}{c}$ .

Para dividir un quebrado por un entero se practicará lo dicho (81); así,

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}, \text{ y } \frac{a^2b}{c^2-n} : d^3 = \frac{a^2b}{(c^2-n)d^3} = \frac{a^2b}{c^2d^3-nd^3}.$$

De la elevacion á potencias y extraccion de raíces (\*) de los monomios.

127 Se llama en general *potencia* de una cantidad, al producto de multiplicar dicha cantidad por sí misma cierto número de veces; si se multiplica una vez, resulta la *segunda* potencia ó *cuadrado*; si se multiplica dos veces, resulta la *tercera* ó *cubo*; si tres, la *cuarta*; y si  $n$ , la potencia del grado  $n+1$ . La cantidad que se multiplica se llama *raiz*; y en general, se llama *raiz* de una cantidad *aquella que multiplicada por sí misma cierto número de veces produce la cantidad primitiva*.

128 Para indicar que una cantidad se ha de elevar á una potencia, si consta sólo de una letra, basta ponerle á su derecha un poco mas alto el número que espresa la potencia á que se ha de elevar; y si la cantidad tiene mas de una letra ó tiene esponente, se encierra dentro de un paréntesis, y fuera de este se coloca un poco mas elevado el número que espresa la potencia, el cual se llama *esponente* de la potencia. Así, para indicar que la cantidad  $2ab$  se ha de elevar al cuadrado, se escribirá  $(2ab)^2$ ,

(\*) Los Ingleses llaman *involution* á la elevacion á potencias, y *evolution* á la extraccion de raíces.

que (106) se lee: dos ab elevado á dos;  $(2ab)^3$  se lee: dos ab elevado á tres; y  $(2ab)^n$  se lee dos ab elevado á n.

Los grados de las potencias se han deducido del número de veces que entra por factor la raíz, que son tantas como unidades tiene el esponente; por lo que toda cantidad sin esponente ó con 1, es su *primera potencia*. Las multiplicaciones son tantas ménos una como unidades tiene el esponente.

La elevacion á potencias es el caso particular de la multiplicacion, en que los factores son iguales; pero aquí sólo se necesita atender: 1.º á *signos*, 2.º á *coeficientes* y 3.º á *esponentes*.

1.º Si el esponente de la potencia es número par, el signo de la potencia será siempre +, y si es impar, el signo que lleve la potencia será el que tenga la raíz. Porque si la raíz lleva el signo +, combinado cualquier número de veces, siempre dará +; pero si lleva —, cuando el esponente sea par, como un número par de signos — en la multiplicacion producen +, y un número impar producen —, resulta la regla de los signos.

2.º De los coeficientes se formará la potencia que diga el esponente; esto es, se multiplicarán por sí mismos tantas veces ménos una como unidades tenga el esponente; porque en la operacion de multiplicar, los coeficientes se multiplican (114) los unos por los otros, y aquí dichos coeficientes son iguales.

3.º En punto á esponentes se multiplicará el de la cantidad por el de la potencia. Porque en la multiplicacion se suman; y aquí habrá que sumar cada esponente consigo mismo, tantas veces como unidades tenga el de la potencia, que equivale á multiplicarlos.

Cor. De lo dicho (125) y de lo que acabamos de manifestar, se infiere que para formar potencias de quebrados, se formará la del numerador y denominador.

Aplicando las reglas á estos ejemplos se tendrá

$$1.º \quad (a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^6 = a^{2 \times 3};$$

$$2.º \quad (-4ab^3n^5)^5 = -4^5 a^5 b^{15} n^{25} = -1024 a^5 b^{15} n^{25};$$

$$3.º \quad (6a^2b^m c^r)^m = 6^m a^{2m} b^{m^2} c^{rm};$$

$$4.º \quad \left( \frac{3a^2b^3c^4}{4e^2d^5f^3} \right)^3 = \frac{(3a^2b^3c^4)^3}{(4e^2d^5f^3)^3} = \frac{27a^6b^9c^{12}}{64e^6d^{15}f^9}.$$

Los cuales manifiestan que *la potencia de un producto ó de un quebrado, es lo mismo que el producto ó cociente de la misma potencia de cada uno de los factores ó términos del quebrado.*

*Cor.* De aquí se deduce, teniendo presente lo dicho (76 esc.), que *las diferentes potencias de un quebrado propio van siendo menores, á proporcion que sus esponentes aumentan.*

129 Para indicar que se ha de proceder de la potencia á la raiz, se usa del *signo radical*  $\sqrt{\quad}$ ; entre sus ramas ó brazos se pone el *esponente radical*, que es el número que espresa el grado de la raiz que se quiere extraer; y debajo del signo se pone la cantidad cuya raiz se quiere sacar.

Como extraer raices es *buscar una cantidad, que entrando por factor tantas veces como unidades tiene el esponente radical, produzca la cantidad dada, que se considera como potencia*, establecerémos por regla:

1.º *Si el esponente radical es par, la raiz llevará el signo de ambigüedad; y si el esponente radical es impar, la raiz llevará el mismo signo de la cantidad.* Porque cuando la potencia es de grado par, siempre tiene (128... 1.º) el signo +, bien tenga la raiz el + ó el -; y cuando la potencia es de grado impar, lleva el mismo signo que tenía la raiz.

2.º *De los coeficientes se dejará indicada la operacion debajo del radical, hasta que se sepan extraer las raices de los números.*

3.º *En punto á esponentes, se dividirá el esponente de la cantidad por el del radical.* Porque esta operacion es la inversa de elevar á potencias, y en esta operacion se multiplican.

Así, si quiero extraer la raiz cuadrada de  $a^6b^8$ , observaré que ocurriendo con mucha frecuencia el extraer raices cuadradas, se omite el esponente 2 del radical; de modo que  $\sqrt{a^6b^8}$  es lo mismo que  $\sqrt[2]{a^6b^8}$ ; y ejecutando la operacion del modo

que acabamos de decir, será 1.º  $\sqrt{a^6b^8} = \pm a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{8}{2}} = \pm a^3b^4$ ;

2.º  $\sqrt[3]{-a^6b^{12}c^9} = -a^2b^4c^3$ ;

$$3.^\circ \sqrt[n]{7a^5b^rc^sd^3} = \sqrt[n]{7} \times a^{\frac{5}{n}} b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}} d^{\frac{3}{n}}.$$

Si fuesen quebrados, se extraerá la raíz del numerador y la del denominador, en esta forma:

$$\sqrt{\frac{a^8}{b^6}} = \pm \frac{a^{\frac{8}{2}}}{b^{\frac{6}{2}}} = \pm \frac{a^4}{b^3}; \quad \sqrt[n]{\frac{a^m b^r c^s}{d^7 f^8 e^s}} = \frac{a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}}}{d^{\frac{7}{n}} f^{\frac{8}{n}} e^{\frac{s}{n}}};$$

lo cual está fundado en que para elevar á potencias un quebrado, se ha de elevar el numerador y el denominador; por lo que aquí se deberá seguir la regla contraria; de donde se deduce que *la raíz de un producto ó de un quebrado es lo mismo que el producto ó cociente de las raíces de los factores, ó términos del quebrado.*

130 Cuando la division de los esponentes no se puede hacer exactamente, aun debe permanecer radical en la espresion; pero se debe sacar de él todo lo que se pueda; para lo cual, del esponente fraccionario que resulta de quitar el radical, se sacan los enteros que se puedan; y aquella cantidad se descompone en factores poniendo por primer factor la cantidad con el esponente entero; y por segundo la misma cantidad con el esponente quebrado; y luego se vuelve á restablecer el radical poniendo entre sus ramas ó brazos el denominador del quebrado, y debajo de él la cantidad con el numerador del quebrado por esponente.

Así, si quiero extraer la raíz cúbica de  $a^5b^7c^6$ , ejecutaré la operacion como aquí se ve:  $\sqrt[3]{a^5b^7c^6} = a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{3}}c^{\frac{6}{3}} = a^1\frac{2}{3}b^2\frac{1}{3}c^2 =$   
 $aa^{\frac{2}{3}}b^2b^{\frac{1}{3}}c^2 = ab^2c^2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} = ab^2c^2\sqrt[3]{a^2b}.$

Esto está fundado (129) en que la raíz de un producto de tantos factores como se quiera, es igual al producto de las raíces del mismo grado de los factores.

131 Estas cantidades que están afectas del signo  $\sqrt{\quad}$  se llaman *cantidades radicales*; así,  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt[3]{b}$ , etc. son cantidades radicales; cuando  $a$  y  $b$  se representen por números, podrá suceder que  $a$  v. gr. sea un número

cuadrado como 1, 4, 9, 16 etc. ó  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{16}$ , etc. y que  $b$  sea un número cúbico, como 1, 8, 27, etc. ó  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{27}$ , etc. En este caso el radical desaparecerá; pero cuando no sea ninguno de estos números, como cuando  $a$  valga 2, 3, 5, etc. y  $b$  sea 2, 3, 4, 5, etc. no tiene raíz exacta; y es imposible hallar un número entero ni quebrado que espese el valor de estos radicales; por lo cual  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ , etc.,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[3]{5}$ , etc. se llaman *números sordos, irracionales ó incommensurables*.

132 Con los radicales se hacen las mismas operaciones que con las demas cantidades.

La suma y la resta se ejecutan en un todo lo mismo; sólo que para que los términos sean semejantes han de tener un mismo esponente radical, y unas mismas letras, coeficientes y esponentes debajo del radical, y fuera de este debe haber las mismas letras con los mismos esponentes: por manera, que solo pueden diferir en los signos y coeficientes numéricos de fuera del radical.

133 Para multiplicarlos, si el radical es de un mismo grado se pondrá (129) debajo del radical el producto de las cantidades, y despues se verá si se puede sacar algo de debajo del radical (130).

$$\text{Por ejemplo: } \sqrt[4]{a^3b} \times \sqrt[4]{a^2bc^2} = \sqrt[4]{a^5b^2c^2} = a\sqrt[4]{ab^2c^2}.$$

Cuando los radicales no tienen un mismo esponente, se reducen á él multiplicando los esponentes de cada cantidad y de cada radical, por el producto de los esponentes de los radicales de los demas.

Esto está fundado en lo dicho (68); pues si se quitan los radicales poniendo á las letras esponentes fraccionarios (130), no habrá mas diferencia sinó que aquí los esponentes de los radicales hacen oficios de denominadores, y los de las letras hacen oficios de numeradores. Así, si quiero reducir á un mismo esponente radical los  $\sqrt[3]{a^2b^2}$ ,  $\sqrt[4]{a^3b^2}$ ,  $\sqrt[5]{an}$ , multiplicaré primero todos los esponentes radicales, diciendo: 3 por 4 son 12; 12 por 2 esponente del tercero son 24, y este será el esponente comun del radical; ahora, para saber los que deben tener las cantidades

que se hallan debajo de cada radical, multiplicaré los esponentes de las letras, que se hallan debajo del primero, por 8, producto de 4 por 2; los de las que se hallan debajo del segundo por 6, producto de 3 por 2; y los de las que se hallan debajo del tercero por 12, producto de 3 por 4; de manera que dichos radicales los tendré reducidos á

$$\sqrt[24]{a^{16}b^{16}}, \quad \sqrt[24]{a^{18}b^{12}}, \quad \sqrt[24]{a^{12}n^{12}};$$

y si los quisiera multiplicar, sacaría por producto

$$\sqrt[24]{a^{16}b^{16}} \times \sqrt[24]{a^{18}b^{12}} \times \sqrt[24]{a^{12}n^{12}} = \sqrt[24]{a^{46}b^{28}n^{12}} = ab \sqrt[24]{a^{22}b^4n^{12}}.$$

134 Para dividirlos, cuando los radicales tengan un mismo esponente, quedará hecha la division (129) con poner debajo de un radical del mismo grado el cociente de las cantidades que haya debajo, y simplificar despues.

$$\text{Luego } \frac{\sqrt[4]{a^3b^2c}}{\sqrt[4]{a^2b^3cd^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^3b^2c}{a^2b^3cd^2}} = \sqrt[4]{\frac{a}{bd^2}}.$$

Si no tienen el mismo esponente radical, se reducirán á él, como se ve en el ejemplo siguiente:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2bc^2}}{\sqrt[4]{a^2b^3d^2}} = \frac{\sqrt[12]{a^8b^4c^8}}{\sqrt[12]{a^6b^9d^6}} = \sqrt[12]{\frac{a^8b^4c^8}{a^6b^9d^6}} = \sqrt[12]{\frac{a^2c^8}{b^5d^6}}.$$

135 Para elevarlos á unapotencia cualquiera, basta (133) elevar la cantidad que está debajo á la misma potencia, dejando el mismo esponente del radical; porque

elevar  $\sqrt[5]{a^3b^4}$  á la segunda potencia, es efectuar el producto  $(\sqrt[5]{a^3b^4})^2 = \sqrt[5]{a^3b^4} \times \sqrt[5]{a^3b^4} = \sqrt[5]{a^6b^8} = ab \sqrt[5]{ab^3}$ .

Como extraer raices es lo contrario de elevar á potencias, para extraer la raiz de una cantidad radical, se dividirá el esponente de la cantidad que haya debajo, por el esponente de la raiz que se quiera sacar; y al resultado se le pondrá el mismo radical.

Así,  $\sqrt[3]{\sqrt[8]{a^6b^3c^3}} = \sqrt[8]{a^2bc}$ ; pero como no siempre

se podrá ejecutar la division exactamente, con el fin de que en el resultado sólo haya un radical, se multiplica el

esponente del radical primitivo por el de la raiz que se quiere sacar, sin llegar á las cantidades que hay debajo del

signo radical. Así  $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2b^2c}} = \sqrt[15]{a^2b^2c}$ .

*De las espresiones imaginarias.*

136 Hemos visto (128..i.º) que al elevar una cantidad á una potencia par, siempre resultaba el signo +; de donde se deduce que ninguna cantidad negativa puede ser potencia de grado par; luego si nos pidiesen una raiz de grado par de una cantidad negativa, se nos pedía un imposible; no obstante, ocurre esto con mucha frecuencia, y por esta causa á estas espresiones se les ha dado el nombre de *imaginarias*.

Así,  $\sqrt{-a^2}$ ,  $\sqrt[4]{-a^3}$ ,  $\sqrt[6]{-b^5}$ ,  $\sqrt[2n]{-a^m}$  son espresiones imaginarias.

Antes de enseñar cómo se calculan, demostraremos esta proposicion.

*Toda espresion imaginaria se puede descomponer en dos factores: el uno real, que será un radical del mismo grado, que contenga debajo de sí la cantidad real; y el otro un radical del mismo grado que contenga debajo de sí la unidad con el signo negativo.*

En efecto, sea la espresion  $\sqrt[2n]{-a^m}$ , y se tendrá, que como toda cantidad se puede considerar multiplicada por la unidad, será  $-a^m = -1a^m = +1 \times -a^m = -1 \times +a^m$ ;

luego  $\sqrt[2n]{-a^m} = \sqrt[2n]{a^m \times -1} = (\S 129) a^{\frac{m}{2n}} \times (-1)^{\frac{1}{2n}}$ ;

y restableciendo los radicales será  $\sqrt[2n]{a^m} \times \sqrt[2n]{-1}$ , que era L. Q. D. D. (\*)

(\*) Mr. A. L. Cauchy, ingeniero de puentes y calzadas, en su curso de Analisis de la Escuela politécnica, dice que *toda ecuacion imaginaria es la representacion simbólica de dos ecuaciones entre cantidades reales*. Por ejemplo, la ecuacion simbólica  $a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$  equivale sola á las dos ecuaciones reales  $a = c$ ,  $b = d$ .

Este sabio Profesor, con quien he tenido el honor de conversar en

137 Con las imaginarias se hacen las mismas operaciones que con las cantidades reales. La suma y la resta se practican por las reglas dadas (132).

138 Para multiplicarlas se descompondrán ántes en sus dos factores, y despues se ejecutará la operacion como en los radicales; así, para multiplicar  $\sqrt{-a}$  por  $\sqrt{-b}$ , descompondré á  $\sqrt{-a}$  en  $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$ , y á  $\sqrt{-b}$  en  $\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$ , y la multiplicacion la haré en esta forma:

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times (-1)^{\frac{1}{2}} \times (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab} \times (-1)^1 = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}.$$

Observando este resultado, echarémos de ver que el producto de dos imaginarias de segundo grado es una cantidad real; y que el signo que nos resulta es contrario al que daría la multiplicacion (114); pues teniendo  $\sqrt{-a}$ , y  $\sqrt{-b}$  los signos positivos, debería salir el producto positivo, y vemos que es negativo.

Si tuviéramos que multiplicar  $\sqrt{-a}$  por  $\sqrt{-a}$ , era lo mismo que elevar al cuadrado  $\sqrt{-a}$ ; y haciendo la misma descomposicion, se tendrá

París, ha desenvuelto con mucha maestría varios puntos de Análisis; y se espera con sólido fundamento que simplificará y aclarará otros varios que no se hallan esplicados con la debida exactitud. A mí me resulta la gran satisfaccion de haber coincidido algun tanto con sus idéas, y aun haberlas llevado en algun punto un poco mas adelante. En efecto, en el *resúmen de sus lecciones* dadas en la Escuela politécnica sobre el Cálculo infinitesimal, impreso en 1825, reconociendo la incertidumbre de los resultados á que puede uno ser conducido por el empleo de series divergentes, trata de evitar estos inconvenientes, y dice en la advertencia de dicha obra, que *espera que, los que la lean se convencerán de que los principios del Cálculo diferencial y sus importantes aplicaciones se pueden exponer fácilmente, sin la intervencion de las series.* Y como yo esplico los principios de dicho Cálculo tanto en mi Tratado elemental de Matemáticas compuesto en 1807 é impreso en 1815, como en este Compendio, sin suponer conocido el desarrollo de las series, resulta que me he anticipado en este asunto; y si se tiene en consideracion que Mr. Cauchy supone ya conocida la fórmula del binomio de Neuton, y que yo esplico los principios del espresado Cálculo diferencial, sin suponer demostrada de autemano dicha fórmula, no se estrañará el que yo haya asegurado haber llevado algo mas adelante las idéas de Mr. Cauchy en este particular.

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{-a})^2 &= \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{a} \times \sqrt{-1} = \\
 \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} &= \sqrt{a^2} \times (-1)^{\frac{1}{2}} \times (-1)^{\frac{1}{2}} = a \times (-1)^{\frac{2}{2}} = \\
 a \times -1 &= -a.
 \end{aligned}$$

De donde se infiere que *solo las espresiones imaginarias son las que elevadas à potencia par, pueden dar signos negativos en la potencia.*

139 Para dividir las, se descompondrán tambien en factores el dividendo y el divisor; así, será

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}};$$

y como  $\sqrt{-1}$  arriba y  $\sqrt{-1}$  abajo se pueden su-

primir, quedará  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = (\S 134) \sqrt{\frac{a}{b}}$ .

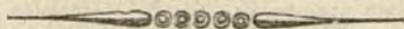
140 Si se multiplican entre sí dos binomios de esta forma  $A + B\sqrt{-1}$ , pero que en cada uno sea diferente el signo del radical, el producto será una cantidad real; v. g. si multiplico  $A + B\sqrt{-1}$ , por  $A - B\sqrt{-1}$ , tendré

$$\begin{aligned}
 (A + B\sqrt{-1})(A - B\sqrt{-1}) &= \\
 A^2 + AB\sqrt{-1} - AB\sqrt{-1} + B^2 &= A^2 + B^2.
 \end{aligned}$$

De donde se deduce una regla para descomponer en factores la suma de dos cantidades, cuya operacion es muy socorrida en la práctica, y es: que se ponga la raiz cuadrada de uno de los términos en ambos factores por primer término; y por segundo la raiz del otro multiplicada por  $\sqrt{-1}$ , pero con diferente signo en cada factor; de

$$\begin{aligned}
 \text{manera que } a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2\sqrt{-1}) \times (a^2 - b^2\sqrt{-1}); \\
 \text{y } a^8 b^2 + c^{10} m^6 &= (a^4 b + c^5 m^3 \sqrt{-1}) \times (a^4 b - c^5 m^3 \sqrt{-1})
 \end{aligned}$$

## SEGUNDA PARTE DEL ÁLGEBRA.



*De la Análisis algebraica, y resolucion de las ecuaciones de primer grado.*

141 **S**E llama *ecuacion* la igualdad de dos cantidades, como  $c=a+b$ ; lo que se pone á la izquierda del signo  $=$ , se llama *primer miembro*; y lo que se pone á la derecha, *segundo miembro*; y cada una de las cantidades que los forman, se llaman *términos*. La parte del Algebra, que trata de resolver los problemas despues de puestos en ecuacion, se llama *Análisis*; cuyo espíritu consiste en suponer conocido lo mismo que se trata de averiguar.

Como en los problemas entran cantidades conocidas, que se llaman *datos*, y desconocidas que se llaman *incógnitas*, las conocidas se señalan con las primeras letras  $a, b, c, etc.$ , del alfabeto; y las incógnitas con las últimas  $z, y, x, u, etc.$

142 Señaladas las cantidades con letras, se pasa á *plantear el problema*, que es cifrar en ecuaciones todas las condiciones que contiene. Para plantear bien un problema es necesario leerle tres ó cuatro veces, hacerse bien cargo del sentido absoluto y terminante de las palabras, y condiciones á que han de satisfacer las cantidades, y escribir los signos correspondientes. Es, por consiguiente, el plantéo de un problema, una rigurosa traduccion del language comun al language algebraico; y así, para poder ejecutarle con alguna facilidad, se tendrá entendido: que las palabras *sumado, agregado, aumentado en etc.* y sus sinónimas, conducen á poner el signo  $+$ ; las *restado de, quitado, disminuido en, etc.* y sus sinónimas quedan traducidas poniendo el signo  $-$ ; las *multiplíca-*

do por, tantas veces mayor etc. conducen á poner el signo  $\times$ ; las dividido por, tantas veces menor, etc. conducen al signo ( $:$ ) ó raya de la division; las tal potencia etc. al de elevar á potencias; y las estraer tal raiz etc. al signo radical; y las palabras dé, componga, resulte, salga, y todas sus equivalentes, quedan traducidas escribiendo el signo =

Cuando planteado un problema se hallan tantas ecuaciones como incógnitas, la cuestion es *determinada*; cuando resultan ménos ecuaciones que incógnitas, es *indeterminada*; y cuando resultan mas ecuaciones que incógnitas, se debería llamar *mas que determinada*; pero en este caso la cuestion ó es absurda, ó es inútil alguna condicion de las que se dieron; por lo que no se considera esta clase de cuestiones.

Cuando en una ecuacion, considerada por sí sola, no hay mas de una incógnita, se dice que es *determinada*; pero cuando hay dos ó mas incógnitas, se dice que es *indeterminada*.

143 Las ecuaciones, sean determinadas ó indeterminadas, se dividen en *grados*, tomando el nombre del mayor esponente que tiene la incógnita; así,  $a+bx=cx+d+e$  es una ecuacion de 1.<sup>er</sup> grado, porque la incógnita  $x$  sólo se halla elevada á la primera potencia; y es determinada, porque sólo contiene la incógnita  $x$ . La ecuacion  $ax^2+bx=c+ex$  es de 2.<sup>o</sup> grado, porque el mayor esponente de la incógnita es 2; y es determinada, porque sólo contiene la incógnita  $x$ ; y la ecuacion  $ax^2+bx^3+d=cx^3$  es de 3.<sup>o</sup> grado; y es determinada por la misma razon que las anteriores.

Las ecuaciones indeterminadas tambien toman el nombre del mayor esponente de las incógnitas; pero como puede haber términos donde se hallen multiplicadas ó divididas entre sí, para averiguar el grado de la ecuacion, se suman los esponentes de las incógnitas que se hallan en el término que hay mas dimensiones desconocidas. V. g. la ecuacion  $ax=bz+d$  es indeterminada, porque tiene dos incógnitas; y es de 1.<sup>er</sup> grado, porque en un mismo término sólo se halla una incógnita, y es con la unidad por esponente; la ecuacion  $ax^3+bz^3x^4=ax^6+cd$ ,

es indeterminada, porque tiene dos incógnitas; y además es del 7.º grado; porque en el segundo término del primer miembro se hallan dos incógnitas, la una con el exponente 3, y la otra con el 4; luego en este término hay siete dimensiones desconocidas.

Cuando las ecuaciones son de un grado mas elevado al primero, pueden ser de dos maneras: *puras ó incompletas*, que son aquellas en que sólo se halla la incógnita con el exponente que da nombre á la ecuacion; ó *mistas, completas ó afectas*, que son aquellas en que, además del término donde se halla la incógnita con el exponente que da nombre á la ecuacion, se encuentra en otros términos con un exponente menor. V. g.  $x^3+a=b$ ,  $x^5+c=d$ , ó en general  $x^n=e$ , son ecuaciones puras de 3.º, 5.º y  $n$ .º grado. Las ecuaciones  $x^3+x+c=b$ ,  $x^5+ax^3+bx=cd$ , ó en general  $x^n+ax^{n-1}+etc=c$ , son ecuaciones mistas, completas ó afectas, de los mismos grados que las anteriores.

*Esc.* Cuando las cantidades conocidas que entran en las ecuaciones son números, como en estas:  $x^5+3x=38$ ,  $x^3+2xz=20$ , etc. las ecuaciones se llaman *numéricas*; y cuando las cantidades conocidas están espresadas por letras, como en  $x^3+ax^2+bx=c$ ,  $x^2+ax=b$ , etc. las ecuaciones se llaman *literales ó algebráicas*. En estas, y siempre que en los cálculos entran cantidades conocidas enlazadas con las incógnitas, se da el nombre de *coeficiente* á toda la cantidad conocida que multiplica á la incógnita. V. g. en el término  $2x$ , el coeficiente es 2; y en la espresion  $2ax$  el coeficiente es  $2a$ .

144 Como el espíritu analítico consiste en hallar una ó mas cosas desconocidas, en valores de las que se dan conocidas, todo el artificio de la Análisis, cuando ya está planteado el problema, consiste en *determinar á qué cantidades conocidas es igual ó son iguales las incógnitas*; y las operaciones que se ejecutan para dejarla sola en un miembro, sin coeficiente, exponente, ni divisor, y con el signo positivo, se comprenden bajo el nombre de *despejo de las incógnitas*.

145 En el plantéo de los problemas (142) se suelen encontrar muchas dificultades, porque las condiciones á

que han de satisfacer las cantidades, están á veces tan intrincadas y enredosas, que parece imposible atinar con la operacion á que deben conducir; lo cual no sucede así en el despejo de las incógnitas, que está fundado en que *si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados son iguales*; y ademas hay una regla general para saber las operaciones que se han de hacer, que *son las contrarias de las que estén indicadas con las cantidades que afectan á las incógnitas*.

146 1.º Cuando la incógnita se halla sumada con otra cantidad, queda despejada *pasando por vía de resta al otro miembro la cantidad que sumaba á la incógnita*. V. g. si se tiene  $x+a=b$ , quedará despejada la  $x$  pasando el término  $+a$  al otro miembro con el signo  $-$ , de este modo  $x=b-a$ ; porque siendo  $x+a=b$ , si de ambos miembros quitamos la  $a$ , será  $x+a-a=b-a$ ; pero en el primer miembro  $+a$  y  $-a$  se destruyen, luego quedará  $x=b-a$ .

147 2.º Cuando una cantidad afecta á la incógnita por vía de resta, queda despejada *pasando al otro miembro dicha cantidad por vía de suma*. Por ejemplo, si se tiene  $x-a=b$ , será  $x=b+a$ ; porque si á ambos miembros de la ecuacion añadimos una misma cantidad  $a$ , se tendrá  $x-a+a=b+a$ ; y como  $-a$  y  $+a$  se destruyen en el primer miembro, quedará  $x=b+a$ .

Cor. De estos dos casos se deduce, que *para pasar un término de un miembro á otro basta mudarle el signo*; y que *si al fin de un cálculo resulta la incógnita con el signo  $-$ , se podrá poner con el signo  $+$ , mudando los signos á toda la ecuacion*; porque esto equivale á trasladar los términos de un miembro á otro; así, si tuviese  $-x=a-b$ , podría poner  $x=b-a$ .

148 3.º Cuando una cantidad multiplica á la incógnita, quedará esta despejada *partiendo el otro miembro por lo que multiplica á la incógnita*. V. g. si se tiene  $ax=b$ ,

resultará  $x=\frac{b}{a}$ ; porque si dividimos ambos miembros de dicha ecuacion por  $a$ , se tendrá  $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$ ; y

como  $a$  arriba y  $a$  abajo se pueden suprimir (61.. 4.º)  
 en el primer miembro, quedará  $x = \frac{b}{a}$ .

149 4.º Cuando una cantidad divide á la incógnita, se despeja esta *multiplicando el otro miembro por lo que divide á la incógnita*. V. g. si se tiene  $\frac{x}{a} = b$ , será  $x = ab$ ; porque multiplicando ambos miembros de la ecuacion por  $a$ , se tendrá  $\frac{ax}{a} = ab$ ; y suprimiendo en

el primer miembro  $a$  arriba y abajo (61..4.º), será  $x = ab$ .

150 Al despejar una incógnita no siempre se presentan ecuaciones tan sencillas como las que hemos considerado hasta ahora, sinó que se hallan á un tiempo enlazadas con las incógnitas las cantidades conocidas, por vía de suma, resta, multiplicacion y division; y en este caso para despejarla, lo que se hace es: 1.º *pasar* (147 cor.) *al primer miembro todos los términos donde se halla la incógnita, y al segundo todos aquellos donde no se halla*. 2.º *Despues se quitan todos los divisores de los términos donde hay incógnita, lo que se consigue multiplicando cada término por el producto de los divisores de los demas*. 3.º *Luego, se reducen á uno solo todos los términos donde se halla la incógnita, si la ecuacion es numérica; y si es algebráica, se descompondrá el primer miembro en dos factores, sacando la incógnita fuera de un paréntesis, y encerrando dentro de él lo que la multiplique*. 4.º *Y finalmente, quedará despejada dividiendo el otro miembro por todo lo que multiplica á la incógnita*.

Así, si quiero despejar la incógnita en esta ecuacion

$$3x - a + \frac{2x}{b} + ax = \frac{4ex}{7} + n - \frac{x}{3c},$$

primero pasaré al primer miembro los términos  $\frac{4ex}{7}$  y  $-\frac{x}{3c}$

del segundo, y el  $-a$  al segundo, mudándoles los signos, y tendré

$$3x + \frac{2x}{b} + ax - \frac{4ex}{7} + \frac{x}{3c} = n + a \text{ (A);}$$

ahora quitaré los divisores, multiplicando el  $3x$  por  $21bc$ , producto de los divisores  $b$ ,  $7$  y  $3c$ , de los demas; el  $\frac{2x}{b}$  por  $21c$ , producto de  $7$  y  $3c$ ; el  $ax$  por  $21bc$ , producto de  $b$ ,  $7$  y  $3c$ ; el  $-\frac{4cx}{7}$  por  $3bc$ , producto de  $b$  y  $3c$ ; el  $\frac{x}{3c}$  por  $7b$ , producto de  $b$  y de  $7$ ; todo el segundo miembro se multiplicará por  $21bc$ , producto de los divisores  $b$ ,  $7$  y  $3c$ , y se tendrá

$$63bcx + 42cx + 21abcx - 12bcex + 7bx = (n+a) \times 21bc.$$

Esta transformacion no altera la ecuacion (A), porque equivale á multiplicar sus dos miembros por el producto  $21bc$  de todos los divisores; pues en el término donde haya alguno, queda hecha la multiplicacion con suprimirle (66 cor.).

Ahora, sacando la  $x$  fuera de un paréntesis, que contenga todo lo que la multiplica, se tendrá

$$x(63bc + 42c + 21abc - 12bce + 7b) = (n+a) \times 21bc; \text{ y dividiendo por lo que multiplica á la incógnita, que es lo que se halla dentro del paréntesis, resultará } x = \frac{(n+a) \times 21bc}{63bc + 42c + 21abc - 12bce + 7b}.$$

*Cor.* De aquí se deduce que una cantidad, que en un miembro se halla como factor, puede pasar al otro por divisor; y al contrario, toda cantidad, que se halla por divisor, puede pasar por factor al otro miembro; y que quitar los divisores de una ecuacion equivale á multiplicar sus dos miembros por el producto de todos ellos.

151 5.º Cuando la incógnita se halla elevada á potencias en una ecuacion pura, se despeja estrayendo del otro miembro una raiz del mismo grado que el de la potencia.

V. g. si se tiene  $x^n = b$ , quedará despejada la  $x$  poniendo

$x = \sqrt[n]{b}$ ; porque si estraemos de ambos miembros la raiz  $n$ , será

$$\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{b}; \text{ pero } \sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x, \text{ luego } x = \sqrt[n]{b}.$$

Si  $n$  es un número par, se deberá poner (129.1.º) el signo  $\pm$ ; de manera, que si fuese  $x^2 = a^2$ , resultaría  $x = \pm a$ .

152 6.º Si se hallase la incógnita debajo de algun radical, quedaría despejada elevando el otro miembro á una potencia del mismo grado que el radical.

Por ejemplo, si se tuviese  $\sqrt{x} = b$ , resultaría  $x = b^2$ ; por-

que si elevamos á la potencia  $n$ , los dos miembros de la ecuacion  $\sqrt[n]{x}=b$ , resultará  $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=(\S 135) x=b^n$ .

*Esc.* 1.º Para completar todos los casos en que puede hallarse la incógnita en las ecuaciones puras, faltan aun considerar *once* casos, y son los siguientes:

$$\begin{array}{l}
 7.^\circ a^x=b; \quad 8.^\circ x^x=a; \quad 9.^\circ \sqrt[x]{a}=b; \quad 10.^\circ \sqrt[x]{x}=a; \\
 11.^\circ a^{\frac{1}{x}}=b; \quad 12.^\circ \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=a; \quad 13.^\circ \sqrt[\frac{1}{x}]{\frac{1}{x}}=a; \\
 14.^\circ x^{\frac{1}{x}}=a; \quad 15.^\circ \left(\frac{1}{x}\right)^x=a; \quad 16.^\circ \sqrt[\frac{1}{x}]{x}=a; \quad \text{y} \\
 17.^\circ \sqrt[x]{\frac{1}{x}}=a.
 \end{array}$$

Las ecuaciones señaladas con los números 7.º y 8.º son ya conocidas bajo el nombre de *esponenciales*, y se saben resolver. Las demas no se han considerado hasta ahora, al ménos que yo sepa, y podrían tambien comprenderse bajo la denominacion de *esponenciales*. De todas nos ocuparemos en la nota del § 219 de este tomo.

*Esc.* 2.º Propongámonos resolver algunos ejemplos, cuestiones ó problemas.

1.º Hallar un número, tal que, *si al triplo de dicho número, se le quitan siete unidades, resulte el mismo número aumentado con 15 unidades.*

*Res y Dem.* Llamémos  $x$  el número que buscamos, y el problema quedará planteado (142) en la siguiente ecuacion:  $3x-7=x+15$ .

Trasladando los términos donde hay incógnita al primer miembro, y los conocidos al segundo, mudando sus signos (147 cor.), será  $3x-x=15+7$ ; ó simplificando  $2x=22$ ; y dividiendo por 2, será  $x=11$ .

Comprobacion ó verificacion: el triplo de 11 es 33; si se le quitan 7 quedan 26; y como si al número 11 se le añaden 15 unidades, resultan 26, queda comprobado exactamente, que el número 11 satisface á todas las condiciones que se pedían.

2.º Se pide un número, tal que, *si á su duplo se le añaden 5 unidades, resulte el mismo número, quitándole dos unidades.*

*Res. y Dem.* Espresando por  $x$  el número que busco, la cuestion quedará planteada en la siguiente ecuacion  $2x+5=x-2$ .

Trasladando será  $2x-x=-2-5$ ; ó simplificando, resulta  $x=-7$ . Aquí tenemos un resultado negativo; y debemos fijar nuestra consideracion en lo que nos manifiesta, que es el que

este número es de una naturaleza contraria á la de los números, como se han considerado en la Aritmética, ó que si se quiere obtener un número como los considerados en la Aritmética, que unidos á otros de su especie los aumentan ó restados los disminuyen etc., debemos cambiar enteramente en sus opuestas todas las condiciones del enunciado de la cuestion.

Para comprender esto bien, debemos observar, que las circunstancias que espresa literalmente el enunciado del problema, no pueden satisfacerse por ningun número en la única acepcion que los considera la Aritmética. En efecto, el duplo de un número, segun los consideramos en la Aritmética, debe ser mayor que el mismo número; si le añadimos cinco unidades, con mas razon tendremos un valor mayor que dicho número, y el enunciado exige que ha de ser igual al mismo número disminuido en dos unidades; luego lo que se nos pide no puede corresponder á los números en los términos que la Aritmética los considera.

No sucede así en el Álgebra; la resolucion  $x = -7$  satisface precisa y exactamente á la cuestion en los mismos términos que viene propuesta sin incurrir en ninguna contradiccion. En efecto, segun lo que hemos manifestado (105), el duplo de un número negativo es menor que el mismo número, pues hemos deducido que  $-a > -2a$ ; luego si le añadimos 5 unidades, nada se opone á que esto sea igual al mismo número disminuido en las dos unidades que espresa el enunciado.

Verifiquémos que el número  $-7$ , sustituido por  $x$ , satisfice á la ecuacion  $2x + 5 = x - 2$ .

En efecto, el duplo de  $-7$  es  $-14$ ; y haciendo la sustitucion resulta  $-14 + 5 = -7 - 2$ ; ó simplificando  $-9 = -9$ ; luego el número  $-7$  verifica exactamente la ecuacion propuesta; pues lo mismo resulta en el primer miembro que en el segundo, y el principio de donde nace toda la evidencia es que una cosa es igual á ella misma (introd.). Luego el Álgebra dá lo que se le pide. Pero aun hay mas, y es: que si queremos que el resultado sea un número conforme los considera la Aritmética, debemos cambiar en sus contrarias todas las condiciones que se exigen; y así vamos á manifestar que mudando la palabra *añadir* en su contraria que es *restar* ó *disminuir*, y que donde dice *quitar*, se ponga *sumar* ó *añadir*, entónces el resultado será un número como los considera la Aritmética.

Cambiadas dichas palabras en sus contrarias, quedará el siguiente enunciado: hallar un número, tal que, si á su duplo se le *quitan* 5 unidades, resulte el mismo número aumentado en 2 unidades.

El cual queda planteado en la siguiente ecuacion  $2x - 5 = x + 2$ ,

que trasladando dá  $2x - x = 5 + 2$ ; ó simplificando  $x = 7$ . El cual satisface á la ecuacion, pues dá  $14 - 5 = 7 + 2$ , ó  $9 = 9$ .

Donde se advierte no solo la generalidad del Álgebra, sinó la gran prerrogativa que tiene de advertirnos, cuando pedimos cosas que no existen como se piden, sinó de una naturaleza contraria á lo que se pide en la acepcion que se dá generalmente á los números; de donde se deduce que: *todo valor negativo, hallado para la incógnita en un problema del primer grado, indica un vicio en el sentido de las condiciones del enunciado ó al ménos en la ecuacion que es su traduccion algebraica*. Mas adelante (170) veremos los medios que tiene el Álgebra para indicar, que lo que se pide no existe absolutamente de ninguna manera, que se consideren los números.

153 Cuando, al plantear una cuestion, hay tantas ecuaciones como incógnitas, dicha cuestion es determinada (142); para despejar en este caso cada incógnita se pueden seguir tres métodos diferentes, de los cuales el usado mas generalmente es el que se conoce con el nombre de *sustitucion* (\*):

(\*) Los otros dos Métodos se conocen con los nombres de *Métodos de igualacion, y métodos particulares*.

El de *igualacion* consiste en *determinar en todas las ecuaciones una misma incógnita; despues se iguala el valor sacado de la primera con cada valor sacado de las demas, lo que dará una ecuacion y una incógnita ménos; despues, en el conjunto de ecuaciones que resultan, se determinará otra incógnita, y el valor sacado de la primera se igualará con los sacados de las demas, lo que nos dará otra ecuacion y otra incógnita ménos; y asi procederemos hasta que tengamos una sola ecuacion con una sola incógnita, en cuyo caso se despejará esta, y se sustituirá su valor sucesivamente en las anteriores*.

Propongámonos despejar por este método las  $x$ ,  $u$ ,  $z$ , en el mismo sistema (A) de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x+u+z=a \\ x+u-z=b \\ x-u-z=c \end{array} \right\} (A) \quad \left. \begin{array}{l} x=a-u-z \\ x=b-u+z \\ x=c+u+z \end{array} \right\} (B) \quad \left. \begin{array}{l} a-u-z=b-u+z \\ a-u-z=c+u+z \end{array} \right\} (C).$$

Determinando en todas ellas la  $x$ , tendrémolas tres ecuaciones (B).

Que, igualando el primer valor de  $x$  con los dos de abajo, se tendrán las dos (C).

En las cuales, determinando otra incógnita, tal como la  $z$ , la

primera nos da  $-2z = b - a$  ó  $2z = a - b$ , y  $z = \frac{a-b}{2}$ , en

*Este consiste en determinar en la ecuacion mas sencilla la incógnita mas sencilla, y sustituir su valor en las*

la que tengo ya conocida la  $z$ ; por lo que podré sustituir este valor en la de abajo y despejar la  $u$ . Pero, como ahora se trata de manifestar el método de *igualacion*, determinaremos tambien la  $z$  en la segunda ecuacion, lo que nos dará  $-2z=c-a+2u$

ó  $2z=a-c-2u$ , y  $z=\frac{a-c-2u}{2}$ ; que, igualando los dos valores de  $z$ , tendremos:  $\frac{a-c-2u}{2}=\frac{a-b}{2}$ ; y

como aquí no tenemos ya mas de una incógnita, que es la  $u$ , la despejaremos, quitando primero los divisores de ambos miembros, lo que nos dará  $a-c-2u=a-b$ ; pasando todo lo conocido al segundo miembro, se tendrá:  $-2u=a-b-a+c$ , ó destruyendo y mudando los signos,  $2u=b-c$ , y por último  $u=\frac{b-c}{2}$ .

Sustituyendo ahora el valor de  $u$  y de  $z$  en cualquiera de los tres valores (B) de  $x$ , por ejemplo en el primero, tendremos:

$$x=a-u-z=a-\frac{b-c}{2}-\frac{a-b}{2}=\frac{2a-b+c-a+b}{2}=\frac{a+c}{2};$$

que es el mismo resultado de ántes.

El tercer método consiste en ejecutar con las ecuaciones que se dan, aquellas operaciones que conozca el calculador que le conducen á despejar inmediatamente la incógnita que desea; sobre este punto no se pueden dar reglas, pues solo dependen del talento, destreza y tino del calculador. Por esta causa, le aplicaremos al mismo ejemplo con el fin de que se puedan comparar unos métodos con otros.

Sean las mismas ecuaciones (A).

Si me propongo despejar inmediatamente  $x+u+z=a$   
 $x+u-z=b$   
 $x-u-z=c$  } (A).

la  $x$ , observaré que, sumando la primera con la tercera, obtendré por primer miembro  $2x$ ; porque  $+u$  se destruye con  $-u$ , y  $+z$  con  $-z$ ; y como de sumar los segundos miembros, resulta

$a+c$ , se tendrá  $2x=a+c$ ; de donde  $x=\frac{a+c}{2}$ .

Si me propongo despejar directamente la  $u$ , restaré la tercera ecuacion de la segunda y obtendré  $2u=b-c$ ; porque de restar

demás; luego, en la ecuación más sencilla que resulte, se determinará la incógnita más sencilla, y se sustituirá su

los primeros miembros, resulta que  $+x$  con  $-x$  (porque al sustraendo se le han de mudar los signos) se destruyen, y  $-z$  con  $+z$  igualmente se destruyen: luego dividiendo por 2, será  $u = \frac{b-c}{2}$ .

Finalmente, para despejar  $z$ , restaré la segunda de la primera, lo que me dará  $2z = a - b$  y  $z = \frac{a-b}{2}$ ; con lo cual te-

nemos sacados los mismos valores que ántes por los otros dos métodos.

Entre los métodos particulares se conocen tres, que pueden considerarse como métodos generales, y son: el de los coeficientes idénticos, el de Bezout, y el que resulta de tomar ecuaciones, en que sean algebraicos los coeficientes de las incógnitas, despejar éstas, y que sus resultados sirvan de fórmulas para resolver los casos de su misma especie.

Para que se forme una justa idea de todos estos métodos, y que se puedan comparar entre sí, para que el calculador elija el que le parezca más adecuado, según sus circunstancias, resolveremos una misma cuestión  $8x - 21z = 33$  } (M).  
 ejemplo 11.º del § 236 del tomo 1.º parte  
 1.ª del Tratado Elemental, á saber:

Por el método de *sustitucion*, despejarémos la  $x$  en la segunda ecuación, lo que da  $x = \frac{177 - 35z}{6}$ ; cuyo valor, sustituido en

la 1.ª, nos da  $\frac{8 \times 177 - 8 \times 35z}{6} - 21z = 33$ ; que haciendo las mul-

tiplicaciones, y quitando el divisor, da  $1416 - 280z - 126z = 198$ ;  
 ó simplificando,  $-406z = 198 - 1416 = -1218$ , que nos da

$z = \frac{-1218}{-406} = 3$ . Sustituyendo este valor de  $z$  en el de  $x$ , se ob-

tiene que  $x = \frac{177 - 35z}{6} = \frac{177 - 105}{6} = \frac{72}{6} = 12$ .

Por el método de *igualacion*, despejarémos la  $x$  en ambas ecua-

valor en las otras; y así se continuará hasta que solo se tenga una ecuacion con una incógnita; en cuyo caso se

ciones; lo que da  $x = \frac{33+21z}{8}$  y  $x = \frac{177-35z}{6}$ ; que, igualando los valores, nos resulta

$\frac{33+21z}{8} = \frac{177-35z}{6}$ ; que, quitando los divisores, lo cual se obtiene análogamente á lo que se practica (68) al reducir los quebrados á un mismo denominador cuando estos tienen factores, multiplicando el primer miembro por 3, y el 2.<sup>o</sup> por 4, nos resulta

$99+63z=708-140z$ , ó  $63z+140z=708-99$ , ó  $203z=609$ ; que da  $z = \frac{609}{203} = 3$ .

Sustituyendo este valor en el segundo de  $x$ , se tiene

$$x = \frac{177-35 \cdot 3}{6} = \frac{177-105}{6} = \frac{72}{6} = 12.$$

El método de los coeficientes idénticos consiste, cuando son dos las ecuaciones, en multiplicar cada una por el coeficiente que en la otra lleva la incógnita que se quiere eliminar; despues sumarlás ó restarlás, y queda ya una sola ecuacion con una incógnita; se despeja esta, y su valor se puede sustituir en cualquiera de las ecuaciones dadas para despejar la incógnita que se eliminó ántes: pero si se quiere hacer todo por el método de los coeficientes idénticos, se multiplicará cada ecuacion de las dadas por el coeficiente que en la otra lleva la incógnita ya determinada; se suman ó restan, y queda una ecuacion, que contiene solo la incógnita que aun no se ha despejado; se despejará y queda resuelta la cuestion.

Así, multiplicando la 1.<sup>a</sup> ecuacion del sistema (M) por 6, y la 2.<sup>a</sup> por 8, se convierten en

$$\begin{cases} 48x - 126z = 198 \\ 48x + 280z = 1416 \end{cases}$$

restando la 1.<sup>a</sup> de la 2.<sup>a</sup>, se obtiene  $280z + 126z = 1416 - 198$ ,

ó  $406z = 1218$ ; que da  $z = \frac{1218}{406} = 3$ .

Para eliminar la  $z$  y despejar la  $x$ , multiplicaremos la primera ecuacion por 35 y la segunda por 21; y se convertirán en

$$\begin{cases} 280x - 735z = 1155 \\ 126x + 735z = 3717 \end{cases}$$

Sumándolas, resulta  $406x = 4872$ ; que da  $x = \frac{4872}{406} = 12$ .

En este sistema de ecuaciones, podríamos obtener el mismo re-

despejará; y sustituyendo su valor en los anteriores, quedarán despejadas todas las incógnitas.

sultado con alguna mas sencillez, observando que los coeficientes de  $x$  son 8 y 6, que teniendo el factor comun

2, resultará la  $x$  con el mismo coeficiente  
 (68) multiplicando la primera ecuacion por  $\begin{cases} 24x-63z=99 \\ 24x+140z=708; \end{cases}$   
 3, y la segunda por 4; lo que dará:  
 restando la 1.<sup>a</sup> de la 2.<sup>a</sup> se obtiene  $140z+63z=708-99$ ;

ó  $203z=609$ ; que da  $z=\frac{609}{203}=3$ . Este valor podria susti-

tuirse en cualquiera de las propuestas, y despejar  $x$  inmediatamente. Mas, para hacerlo todo por el método de igualacion, teniendo presente que los coeficientes 21 y 35 de  $z$  tienen comun el factor 7, multiplicaríamos la 1.<sup>a</sup> por 5 y la 2.<sup>a</sup> por 3, y se nos convertirían en  $\begin{cases} 40x-105z=165 \\ 18x+105z=531. \end{cases}$

Sumándolas, se tiene  $58x=696$ ; que da  $x=\frac{696}{58}=12$ .

Cuando son mas de dos las ecuaciones, se multiplica cada una por el producto de los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar en las otras ecuaciones; con lo que, teniendo ya esta incógnita unos mismos coeficientes, restaremos sucesivamente una de cada una de las otras; lo cual nos dará una ecuacion y una incógnita ménos; y para eliminar en este sistema otra, continuaremos del mismo modo hasta que obtengamos una ecuacion con una sola incógnita; y del mismo modo procederíamos para determinar las demas.

El método de *Bezout* consiste en multiplicar cada ecuacion de las dadas ménos una, por una cantidad indeterminada; despues, de la suma de estas se resta la otra y se tienen tantas ecuaciones como incógnitas, y ademas tantas cantidades indeterminadas ménos una como incógnitas. Despues, se igualan con cero todos los coeficientes de las incógnitas que se quiere que desaparezcan, y nos resulta una sola ecuacion con una sola incógnita; la que se despeja por el método general; despues, en el sistema de ecuaciones que resultan de igualar á cero los coeficientes de las incógnitas que se eliminan, se despejan las cantidades indeterminadas; sus valores se sustituyen en la ecuacion en que se tenia ya despejada la incógnita; y quedará esta enteramente conocida.

Para despejar otra incógnita, se igualan con cero todos los coeficientes de las otras, y se determinan por medio de estas ecuaciones todas las cantidades indeterminadas por las cuales se multiplicaron las ecuaciones primitivas.

En la ecuacion que resulta, despues de igualados con *cero* los coeficientes de todas las incógnitas ménos una, queda solo una incógnita; se despeja esta, y en el valor que resulta, se sustituyen los valores

Propongámonos despejar las incógnitas en este sistema de ecuaciones (M).

hallados para las indeterminadas, y se tiene enteramente conocida otra incógnita, y así se procederá hasta determinar todas las incógnitas.

Haciendo aplicación de este método á las mismas ecuaciones, 
$$\begin{cases} 8x-21z=33 \\ 6x+35z=177 \end{cases}$$
 multiplicaremos la primera por  $m$ , lo que la convertirá en  $8mx-21mz=33m$ ; restando de esta la otra, se tendrá

$$(8m-6)x-(21m+35)z=33m-177. \text{ (N)}$$

Si queremos eliminar desde luego la  $x$ , igualaremos con *cero* su coeficiente  $8m-6$ ; lo que da  $8m-6=0$ ; de donde  $m=8\frac{3}{4}$ ;

y queda reducida la ecuacion á  $-(21m+35)z=33m-177$ , que

$$\text{da } z = \frac{33m-177}{-(21m+35)} = \frac{33m-177}{-21m-35};$$

y sustituyendo en esta, el valor  $\frac{3}{4}$  de  $m$ , que acabamos de determinar,

$$\text{será } z = \frac{33 \times \frac{3}{4} - 177}{-21 \times \frac{3}{4} - 35} = \frac{99 - 708}{-63 - 140} = \frac{-609}{-203} = 3.$$

Sustituyendo este valor en la 1.<sup>a</sup> ecuacion, podríamos determinar la  $x$ ; pero la determinaremos por el mismo método de *Bezout*. Á cuyo efecto, igualaremos con *cero* el coeficiente de  $z$ , en la (ec. N),

lo que dará  $21m+35=0$ , que da  $m=-\frac{35}{21}=-\frac{5}{3}$ ; y la ecuacion quedará reducida á  $(8m-6)x=33m-177$ , donde está eliminada la  $z$ , y da

$$x = \frac{33m-177}{8m-6}; \text{ que, sustituyendo por } m \text{ el valor}$$

$-\frac{5}{3}$  que le acabamos de determinar,

$$\text{será } x = \frac{33 \cdot \frac{-5}{3} - 177}{8 \cdot \frac{-5}{3} - 6} = \frac{-55 - 177}{-40 - 18} = \frac{-232}{-58} = \frac{696}{58} = 12.$$

El método de suponer las incógnitas con los coeficientes alge-

Para esto determinaré en la primera una cualquiera de ellas, tal como la  $x$ ; y tendré

$$\left. \begin{array}{l} (1.^a) x-u+z=a \\ (2.^a) x+u-z=b \\ (3.^a) x-u-z=c \end{array} \right\} (M)$$

$$x=a+u-z.$$

bráicos, y deducir los valores en general de las incógnitas, está reducido á lo siguiente.

Supongamos que se den las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} ax+bz=c \quad (1) \\ a'x+b'z=c' \quad (2) \end{array} \right\}$$

Despejando  $x$  en la primera, se tiene  $x = \frac{c-bz}{a}$ ; sustituyendo este

valor en la segunda, se convierte en  $a' \frac{c-bz}{a} + b'z = c'$ ;

efectuando las operaciones y quitando el divisor, resulta

$$a'c - a'bz + a'b'z = ac';$$

ó trasladando y descomponiendo en factores  $z(ab' - ba') = ac' - a'c$ ;

$$\text{que da } z = \frac{ac' - a'c}{ab' - ba'} \quad (\alpha).$$

Sustituyendo este valor en el de  $x$ , hallado ántes, se

$$\begin{aligned} \text{tendrá } x &= \frac{c-bz}{a} = \frac{c-b \cdot \frac{ac'-a'c}{ab'-ba'}}{a} = \frac{cab' - cba' - bac' + bca'}{a(ab' - ba')} = \\ &= \frac{cab' - bac'}{a(ab' - ba')} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad (\beta). \end{aligned}$$

Obtenidos estos resultados, despues no hay mas que comparar las ecuaciones primitivas (1) y (2) con las dadas, para encontrar los valores de los coeficientes  $a, b, c, a', b', c'$ ; y despues sustituir estos valores en las ecuaciones ( $\alpha$ ) y ( $\beta$ ), y quedan determinados y conocidos los valores de  $x$  y de  $z$ .

Haciendo la comparacion, se tiene  $\left\{ \begin{array}{l} a=8, b=-21, c=33 \\ a'=6, b'=35, c'=177 \end{array} \right.$   
con lo cual se tiene

$$x = \frac{33 \times 35 + 21 \times 177}{8 \times 35 + 21 \times 6} = \frac{1155 + 3717}{280 + 126} = \frac{4872}{406} = 12;$$

$$z = \frac{8 \times 177 - 33 \times 6}{8 \times 35 + 21 \times 6} = \frac{1416 - 198}{280 + 126} = \frac{1218}{406} = 3.$$

El método de Bezout aventaja á todos los demas, en brevedad, cuando son muchas las ecuaciones y las incógnitas.

Sustituiré este valor de  $x$  en las dos de abajo y se convertirán en (N), ó simplificando en (O);

$$\left. \begin{array}{l} a+u-z+u-z=b \\ a+u-z-u-z=c \end{array} \right\} \text{(N)} \quad \left. \begin{array}{l} a+2u-2z=b \\ a-2z=c \end{array} \right\} \text{(O);}$$

y como en la segunda de estas ecuaciones no hay mas de la incógnita  $z$ , la despejaré por lo dicho (150), y será

$$z = \frac{a-c}{2} = \frac{1}{2}(a-c) \text{ (*)}$$

Sustituyendo en vez de  $z$  este valor en la primera de las (O), ó desde luego en vez de  $-2z$  su valor  $c-a$ , tendré:  $a+2u+c-a=b$ , ó  $2u+c=b$ , que (150) da  $u = \frac{1}{2}(b-c)$ .

Sustituyendo estos valores de  $z$  y de  $u$  en el de  $x$ , será  $x = a+u-z = a + \frac{1}{2}(b-c) - \frac{1}{2}(a-c)$ ; que, reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, se convierte en

$$x = \frac{2a+b-c-a+c}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(a+b).$$

Con lo cual quedan despejadas las tres incógnitas.

*Esc.* En el sistema (N) de ecuaciones, vemos que no se encuentra ya la  $x$ ; y en este caso, se dice que se ha *eliminado* dicha incógnita. Por lo que, en general, *eliminar* una ó mas incógnitas en un sistema de ecuaciones, es *transformar dicho sistema en otro, que no contenga la incógnita ó incógnitas que se deseaban eliminar.*

Entendido esto, vamos á resolver algunas cuestiones.

154 1ª *Dada la suma y la diferencia de dos cantidades, hallar la mayor y la menor.*

*Res. y Dem.* Sea  $s$  la suma dada, y  $d$  la diferencia; sea  $x$  la cantidad mayor que se pide, y  $z$  la menor; y el problema quedará planteado en estas dos ecuaciones.

$$\begin{array}{l} x+z=s \\ x-z=d \end{array}$$

Despejando  $z$  en la primera, será  $z=s-x$ ; cuyo valor, sustituido en la segunda, da  $x-s+x=d$ , ó  $2x=s+d$ ; de donde (§ 148)  $x = \frac{1}{2}(s+d) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$ ; y sustituyendo este valor en

el de  $z$ , se tendrá  $z = s - \frac{s+d}{2} = \frac{2s-s-d}{2} = \frac{s-d}{2} = \frac{s}{2} - \frac{d}{2} = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$ .

(\*) Cuando tengamos cantidades divididas por números, les pondremos ántes el coeficiente quebrado que les corresponda, poniendo la cantidad dentro de paréntesis, ó no segun sea necesario.

Cuyos resultados manifiestan, que la cantidad mayor  $x$  es igual á la mitad de la suma, mas la mitad de la diferencia; y la menor  $z$  á la mitad de la suma, ménos la mitad de la diferencia.

Así, si se pidiese hallar la edad de un padre y de un hijo, en el supuesto de que entre ambos tuviesen 60 años, y el padre llevase á su hijo 20, diría: la mitad de 60 es 30; la mitad de 20 es 10; sumando 30 y 10, será 40 la edad del padre, que es la mayor. Y para hallar la del hijo, que es la menor, diría: 30 ménos 10 son 20, que sería la edad del hijo; cuyas dos cantidades son tales que  $40+20=60$ , y  $40-20=20$ .

155 2.<sup>a</sup> Hallar tres números tales, que si del duplo del primero se quitan los dos tercios de la suma de los otros dos, resulte 56; si del triplo del segundo se quitan los  $\frac{5}{7}$  de la suma de los otros dos, resulte 48; y si del séptuplo del tercero se quitan las tres cuartas partes de la suma de los otros dos, resulte 39.

Res. y Dem. Sean  $u, x, z$ , los tres números que se piden, y el problema quedará planteado en las tres ecuaciones (A), ó quitando los divisores en las (B).

$$\left. \begin{aligned} 2u - \frac{2}{3}(x+z) &= 56 \\ 3x - \frac{5}{7}(u+z) &= 48 \\ 7z - \frac{3}{4}(x+u) &= 39 \end{aligned} \right\} (A) \quad \left\{ \begin{aligned} 6u - 2x - 2z &= 168 \\ 51x - 5u - 5z &= 816 \\ 28z - 3x - 3u &= 156 \end{aligned} \right\} (B)$$

Determinando  $x$  en la primera de las (B), se tiene

$$x = \frac{1}{2}(6u - 2z - 168) = 3u - z - 84;$$

sustituyendo este valor en las otras dos, resulta

$$\left. \begin{aligned} 51(3u - z - 84) - 5u - 5z &= 816 \\ 28z - 3(3u - z - 84) - 3u &= 156 \end{aligned} \right\}$$

ó efectuando las operaciones, tendremos

$$\left. \begin{aligned} 153u - 51z - 4284 - 5u - 5z &= 816 \\ 28z - 9u + 3z + 252 - 3u &= 156 \end{aligned} \right\},$$

que, reduciendo y trasladando sale,

$$\left. \begin{aligned} 148u - 56z &= 816 + 4284 = 5100 \\ 31z - 12u &= 156 - 252 = -96 \end{aligned} \right\},$$

ó dividiendo la primera de estas dos por 4, resultará

$$\left\{ \begin{aligned} 37u - 14z &= 1275 \\ 31z - 12u &= -96. \end{aligned} \right.$$

Despejando  $z$  en la 1.<sup>a</sup> da  $z = \frac{1}{14}(37u - 1275)$ , cuyo valor sustituido en la segunda, da  $31 \times \frac{1}{14}(37u - 1275) - 12u = -96$ ; que, quitando el divisor, será  $31(37u - 1275) - 168u = -1344$ ;

haciendo la multiplicacion indicada, tendremos

$$1147u - 39525 - 168u = -1344;$$

reduciendo y trasladando, resultará  $979u = -1344 + 39525 = 38181$ ; y despejando  $u$ , da  $u = \frac{38181}{979} = 39$ .

Poniendo este valor de  $u$  en el de  $z$ , resulta

$$z = \frac{1}{14}(37u - 1275) = \frac{1}{14}(37 \times 39 - 1275) = \frac{1}{14}(1443 - 1275) = \frac{1}{14} \times 168 = 12;$$

y sustituyendo estos valores en el de  $x$ , darán

$$x = 3u - z - 84 = 3 \times 39 - 12 - 84 = 117 - 96 = 21.$$

Por consiguiente, los tres números pedidos son 39, 21 y 12; los cuales satisfacen á las condiciones del problema, como cualquiera puede comprobar.

156 Las cuestiones suelen venir propuestas con adornos, como puede verse en estos tres ejemplos.

1.º Se pregunta á un sujeto la edad de su hijo Fabio; y responde:

Si Fabio, dos años ménos

De los que tiene, tuviera;

Tendría trece y un tercio

Y un cuarto de los que cuenta.

Llamando  $x$  el número de años que Fabio tenía efectivamente, resultará que  $x - 2$  espresará su edad cuando tenía dos años ménos. Por consiguiente,  $x - 2$  deberá equivaler al número 13, mas el tercio de la edad efectiva de Fabio, mas el cuarto de la misma edad de Fabio; y como la edad de este la espresamos por  $x$ , su tercio será  $\frac{1}{3}x$ , y su cuarto, será  $\frac{1}{4}x$ . Por lo cual tendremos planteado el problema en la siguiente ecuacion

$$x - 2 = 13 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x \quad (\text{A});$$

y practicando exactamente la regla (150), irá obteniendo los resultados siguientes:

$x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = 13 + 2 = 15 \quad (\text{B}); \quad 12x - 4x - 3x = 15 \times 12 = 180$ ; que, simplificando, da  $5x = 180$ ; y dividiendo el segundo miembro por 5, que es lo que multiplica á  $x$  en el primero, se tiene  $x = \frac{180}{5} = 36$ . Luego la edad efectiva de Fabio era 36 años.

Si queremos comprobarlo con el testo literal de la cuestion, observaremos, que cuando tenía dos años ménos, su edad sería 34 años. Veamos si el número 34 es igual al número 13 reunido con la tercera parte de 36, que es 12, y con la cuarta parte del mismo 36, que es 9; y como  $13 + 12 + 9 = 34$ , resulta perfectamente comprobado que el número 36 satisface á todas las condiciones pedidas.

2.º Supónese una sala adornada con tres estátuas, de Juno, Júpiter y Febo, tales que las dos primeras pesan veinte minas (ó arrobas), y la tercera, que pesa seis, es igual á la cuarta parte de la primera, mas la tercera parte de la segunda; se quiere saber

cuánto pesa cada una, y se propone la cuestion en estos términos,  
 Juno y Júpiter pesan veinte minas;  
 Un cuarto del primero y un tercio del segundo  
 Componen al Dios Febo,  
 Que pesa seis; Lucero  
 De la aurora serás si me adivinas.  
 Lo que pesa cada uno,  
 Juno sin Júpiter, Júpiter sin Juno.

*Res. y Dem.* Llamando  $x$  las minas que pesa Juno, Júpiter pesará  $20-x$  (pues entre los dos pesan 20); y como  $\frac{1}{4}$  de Juno y  $\frac{1}{3}$  de Júpiter componen seis, el problema estará planteado en esta ecuacion.

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}(20-x) = 6$ , de donde (150) sale  $x=8$ , peso de Juno; el de Júpiter será 12; y la cuestion queda resuelta.

3.<sup>o</sup> Supónese un Leon de bronce, que arroja agua por los ojos, por un pie y por la boca, y se sabe el tiempo en que cada caño solo llena el pilon de la fuente; se trata de saber el tiempo en que le llenarán corriendo mas de uno ó todos á la vez, y la cuestion se propone en estos términos.

El que fulminó incendios en el Cielo,  
 Y si me abrasa el sol, abraso el mundo,  
 Hoy en la Tierra convertido en hielo,  
 Por ojos, pies y boca me difundo,  
 Y con néctar divino  
 Refresco al fatigado peregrino.  
 Este pilon de mármol esculpido,  
 Que en pocos dias ha sido fabricado,  
 En dos el primer ojo le ha llovido;  
 Pero en tres el segundo le ha llorado;  
 En cuatro el pie le toca,  
 Y le escupo en seis horas por la boca.  
 Esto hace un caño solo,  
 ¿Y todos juntos? Lo defina Apolo.  
 ¿Y combinados? Tú lo has de hacer solo.

*Res. y Dem.* Sea  $t$  el tiempo que han de correr todos los caños á la vez, para llenar el pilon, que llamaremos  $p$ ; y tendremos que el primer ojo, que llena el pilon en 2 dias, en  $t$  llenará . . . . .  $\frac{t}{2}p$ ;  
 el segundo ojo, que le llenaba en 3 dias, en  $t$  dia llenará . . . . .  $\frac{t}{3}p$ ;  
 el pie, que le llenaba en 4 dias, en  $t$  llenará . . . . .  $\frac{t}{4}p$ ;  
 la boca, que le llenaba en 6 horas ó  $\frac{1}{4}$  de dia, en un dia llenará  $4p$ ;  
 ahora, sabiendo ya lo que cada caño llena en un dia, se sigue que corriendo el tiempo  $t$  todos juntos, arrojarán una cantidad de

agua espresada por lo que cada uno arroja en un dia multiplicado por el tiempo ; esto es, el primer ojo, en  $t$  dias ó tiempo, arrojará  $\frac{1}{2}pt$ ; el segundo,  $\frac{1}{3}pt$ ; el pie,  $\frac{1}{4}pt$ ; y la boca  $4pt$ ; y como toda el agua que han de arrojar en el tiempo  $t$ , se quiere que solo sea la del pilon  $p$ , se tendrá la ecuacion  $\frac{1}{2}pt + \frac{1}{3}pt + \frac{1}{4}pt + 4pt = p$ ; que dividiendola toda por  $p$ , será  $\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}t + 4t = 1$ ; y multiplicándola toda por 12, se convertirá en  $6t + 4t + 3t + 48t = 12$ , ó  $61t = 12$ ; de donde sale  $t = \frac{12}{61}$  de dia = (§ 83) 4 horas 43 minutos y 16,7 segundos.

*Esc.* El último renglon da origen á diez soluciones mas, que corresponden á averiguar el tiempo que tardarán los dos ojos solos, el primer ojo y el pie, *etc.*; las que deberán hallar los principiantes; y obtendrán los resultados que ofrecen las respuestas siguientes.

- 1.<sup>a</sup> Los dos ojos le llenarán en 1 dia, 4 horas y 48 minutos.
- 2.<sup>a</sup> El primer ojo y el pie le llenarán en 1 dia y 8 horas.
- 3.<sup>a</sup> El primer ojo y la boca le llenarán en 5 horas y 20 minutos.
- 4.<sup>a</sup> El segundo ojo y el pie le llenarán en 1 dia, 17 horas, 8 minutos, 34,3 segundos.
- 5.<sup>a</sup> El segundo ojo y la boca le llenarán en 5 horas, 32 minutos, 18,5 segundos.
- 6.<sup>a</sup> El pie y la boca le llenarán en 5 horas 38 minutos, 49,4 segundos.
- 7.<sup>a</sup> Los dos ojos y el pie le llenarán en 22 horas, 9 minutos, 13,8 segundos.
- 8.<sup>a</sup> Los dos ojos y la boca le llenarán en 4 horas, 57 minutos, 55,9 segundos.
- 9.<sup>a</sup> El primer ojo, el pie y la boca, le llenarán en 5 horas, 3 minutos, y 9,5 segundos.
- 10.<sup>a</sup> El segundo ojo, el pie y la boca le llenarán en 5 horas, 14 minutos, y 10,9 segundos.

Propongámonos ahora resolver la siguiente cuestion: *Hallar dos números tales, que si al duplo del primera se le añade siete veces el segundo, resulten 38 unidades; y que el séxtuplo del primero sea igual con lo que resulte de restar, de 114 unidades, veintiuna veces el segundo número.*

Esta cuestion quedará planteada, en virtud de lo expuesto (142) en las siguientes ecuaciones

$$2x + 7z = 38, \quad 6x = 114 - 21z.$$

Despejando  $x$  en la primera, se tiene  $x = \frac{38 - 7z}{2}$ .

Sustituyendo este valor en la segunda, se convierte en

$$6. \frac{38-7z}{2} = 114-21z; \text{ quitando el divisor y haciendo al mismo}$$

tiempo la multiplicacion indicada en el primero, se nos convertirá en  $228-42z=228-42z$ ; trasladando los términos desconocidos al primer miembro, y los conocidos al segundo, se tendrá  $42z-42z=228-228$ ; y haciendo la destruccion en ambos miembros, se convierte en  $0=0$ ; en la cual, desapareciendo enteramente la  $z$ , no tenemos ecuacion para determinarla.

Si, ántes de haber efectuado la destruccion, hubiéramos descompuesto en factores el primer miembro, hubiéramos obtenido  $(42-42)z=228-228$ ; y dividiendo el segundo miembro por

$$\text{lo que multiplica á } z, \text{ resulta } z = \frac{228-228}{42-42} = \frac{0}{0}.$$

Este valor representa (§§ 235 y 236) una cantidad indeterminada, esto es, una cantidad cualquiera. Por consiguiente, las dos expresadas ecuaciones no bastan para determinar las dos incógnitas  $x, z$ .

Esto proviene de que, de las dos ecuaciones dadas, la una se deduce de la otra por alguna operacion algebraica, y no expresa condicion particular que pueda servir para determinar las cantidades; y en efecto, si en la segunda ecuacion trasladamos al primer miembro el segundo término del segundo miembro, se nos convertirá en  $6x+21z=114$ .

Donde observamos, que esta ecuacion no es mas que la primera multiplicada por 3; luego no es una ecuacion *diferente ó distinta* de la primera, sinó una transformacion suya.

Todo lo cual nos manifiesta, que: *para que un número cualquiera de ecuaciones pueda bastar para despejar ó determinar igual número de incógnitas, como se ha expresado (142), es necesario que las ecuaciones dadas sean diferentes ó distintas entre sí; esto es, que no se puedan deducir las unas de las otras por operaciones algebraicas.* Esto, en unas ocasiones se podrá conocer desde luego; pero, en otras sólo se notará cuando se llegue á una

ecuacion como  $0=0$ , ó resultando para alguna incógnita un valor  $\frac{0}{0}$ ,

que es un símbolo de una cantidad cualquiera, ó de una cantidad indeterminada, segun se demuestra (§§ 235 y 236) de este tomo.

Terminaremos este asunto, poniendo un ejemplo de una *cuestion mas que determinada*, para corroborar lo que hemos asegurado (142).

Supongamos que se nos pida: *encontrar dos números, cuya suma sea 10, su diferencia 4, y su producto 21.*

Llamando  $x, z$  á estos dos números, tendremos planteada la cuestión en las tres ecuaciones siguientes:  $x+z=10$ ,  $x-z=4$ ,  $xz=21$ .

Despejando  $x$  en la primera, se tiene  $x=10-z$ ; sustituyendo este valor en la segunda, y reduciendo, resulta  $10-2z=4$ , que da  $-2z=4-10$ ;  $2z=10-4$ , y  $z=\frac{1}{2}(10-4)=\frac{1}{2}.6=3$ .

Sustituyendo este valor en el de  $x$ , hallado ántes, resulta  $x=10-3=7$ . Luego tenemos ya encontrados los valores 7 y 3 para las dos incógnitas  $x, z$  sin haber tenido necesidad de hacer uso de la tercera ecuacion. Luego esta tercera ecuacion es inútil en este caso para la determinacion de las dos cantidades. Se verifica que el valor de  $x$  multiplicado por el de  $z$  sea igual á 21 como exige dicha ecuacion, porque escojimos esta condicion con ese objeto; pero en todos los demas casos, la tercera condicion imposibilita el hallar los dos números con las condiciones pedidas; pues si el segundo miembro lo hubiéramos dado, diferente del 21, cualquier valor que le hubiéramos puesto, como 1, 2, 3, 1000 etc. siempre nos conduciría á un absurdo. En efecto, determinados por las dos primeras ecuaciones los valores 7 y 3 para los dos números ó cantidades, resultaría  $7.3=1$ ,  $7.3=2$ ,  $7.3=3$ ,  $7.3=1000$  etc.: ecuaciones que todas ellas son absurdas. Luego queda corroborado todo lo espuesto (142).

*De la elevacion al cuadrado de los polinomios, y extraccion de la raiz cuadrada de las cantidades numéricas.*

157 Queda dicho (127) que *cuadrado* es el producto de una cantidad por ella misma; así, multiplicando  $a+b$  por  $a+b$ , se tendrá el cuadrado de  $a+b$ , como aquí se ve:  $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$  (A); que quiere decir, que el cuadrado de una cantidad, compuesta de dos partes, consta de tres, á saber: *de cuadrado de primera parte* (esto es lo que dice  $a^2$ ); *de duplo de primera por segunda* (esto es lo que dice  $2ab$ ); y *de cuadrado de segunda* (que es lo que expresa  $b^2$ ).

Toda espresion que, como la anterior, suministra una regla práctica, se llama *fórmula*; de manera, que fórmula es una espresion analítica en que está cifrado el modo de ejecutar una operacion, ó alguna propiedad de una cantidad.

Si la segunda parte del binomio tuviera el signo negativo  $-$ , resultaría

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 (A') (*),$$

y solo habría que enmendar en la regla, el decir *ménos el duplo de primera por segunda*; de modo que reuniendo los dos resultados, será  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ .

158 Esto supuesto, la fórmula  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , sirve para elevar al cuadrado cualquier polinomio tal como  $a+b+c+d$ ; donde observaré, que tomando por primera parte la  $a$ , y lo demas por segunda, el cuadrado se compondrá de las tres partes que acabamos de decir. El formar el cuadrado de  $a$  y tomar el duplo de  $a$  ó  $2a$  por lo que sigue, nada tiene que hacer; despues, para formar el cuadrado de la segunda  $b+c+d$ , se tomará  $b$  por primera parte y lo demas por segunda etc., etc.; y continuando la misma observacion, estableceremos la siguien-

(\*) Como el cuadrado de una cantidad es (128..1.º) siempre positivo, la ecuacion (A') manifiesta que  $a^2 - 2ab + b^2$  es siempre una cantidad positiva; para lo cual se necesita que  $a^2 + b^2 > 2ab$ . Traducida en regla esta espresion, nos dice, que *la suma de los cuadrados de dos cantidades cualesquiera es siempre mayor que el duplo del producto de dichas cantidades*.

Fundados en esto, podemos demostrar la curiosa proposicion que hemos visto en la página 84 de los *Elementos de Álgebra*, publicados en Edimburgh al fin de 1839 por el Rev. *Philip Kelland*, y es como sigue: *La suma de una fraccion con su inversa, esto es, con la que resulta de trastornar sus dos términos, es siempre mayor que 2*.

En efecto, sea  $\frac{a}{b}$  una fraccion cualquiera; vamos á demostrar que  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ .

$$\text{Porque } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = 2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{2ab}; \quad \text{y como } a^2 + b^2$$

acabamos de manifestar que es mayor que  $2ab$ , el quebrado  $\frac{a^2 + b^2}{2ab}$  será impropio, y su producto por 2, será (76 esc.) mayor que 2.

te regla para elevar al cuadrado un polinomio: *cuádrase el primer término; multiplíquese el duplo del primer término por todos los que le siguen; cuádrase despues el segundo; multiplíquese su duplo por todos los que le siguen; cuádrase el tercero, y continúese lo mismo hasta cuadrar el último término.*

Así, aplicándola al polinomio dicho, tendré

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + \dots + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2 \text{ (B).}$$

159 Los cuadrados de los números dígitos están en la tabla de multiplicar, pues  $1^2 = 1 \times 1 = 1$ ;

$$2^2 = 2 \times 2 = 4; \quad 3^2 = 3 \times 3 = 9; \quad 4^2 = 4 \times 4 = 16;$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 25; \quad 6^2 = 6 \times 6 = 36; \quad 7^2 = 7 \times 7 = 49;$$

$$8^2 = 8 \times 8 = 64; \quad 9^2 = 9 \times 9 = 81.$$

Estos, es necesario saberlos de memoria, para encontrar sus raíces y las de los números intermedios; de modo que los principiantes se deben familiarizar mucho con este lenguaje: *la raíz de 25 es 5 y no sobra nada; la raíz de 36 es 6 y sobran 2; etc.*

Ahora, si el número es compuesto, se descompondrá siempre en decenas y unidades; así, si quiero elevar  $38$  al cuadrado, le descompondré en dichas partes, y será  $38 = 30 + 8$ ; y suponiendo  $30 = a$  y  $8 = b$ , tendré por medio de la fórmula (A), que

$$38^2 = (30 + 8)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 8 + 8^2 = 900 + 480 + 64 = 1444;$$

donde advierto que el cuadrado de todo número, que se compone de decenas y unidades, consta de tres partes, á saber: *de cuadrado de decenas, de duplo de decenas por unidades, y de cuadrado de unidades.*

160 Formemos ahora los cuadrados siguientes,

$$\begin{array}{l} 1^2 = 1 \quad \} \quad 10^2 = 100 \quad \} \quad 100^2 = 10000 \quad \} \quad \text{etc.} \\ 9^2 = 81 \quad \} \quad 99^2 = 9801 \quad \} \quad 999^2 = 998001 \end{array}$$

Y observando las cifras que tienen los números y sus cuadrados, veo que el menor número 1 de una cifra tiene una en su cuadrado, y el mayor 9 tiene dos; el menor número 10 de dos cifras tiene tres en su cuadrado 100, y el mayor 99 tiene cuatro; y en general *todo número de n cifras tiene en su cuadrado lo mas el duplo ó  $2n$ , y lo ménos el duplo ménos una ó  $2n - 1$ .*

161 Recíprocamente, todo número de una ó dos ci-

fras tiene su raíz expresada por una; todo número de tres ó cuatro cifras tiene dos en su raíz; y en general *todo número de un número par  $2n$  de cifras, tiene en su raíz la mitad  $n$ ; y todo número de un número impar  $2n-1$  de cifras, tiene en su raíz la mitad y  $\frac{1}{2}$  mas, esto es,*

$$\frac{1}{2}(2n-1) + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = n.$$

162 Aplicando la fórmula (B) al número 678, será

$$\begin{aligned} a &= 600, \quad b = 70, \quad c = 8, \quad \text{y} \quad d = 0; \quad \text{y} \\ 678^2 &= (600 + 70 + 8)^2 = 600^2 + 2 \times 600 \times 70 + 2 \times 600 \times 8 + 70^2 \dots \\ &+ 2 \times 70 \times 8 + 8^2 = 360000 + 84000 + 9600 + 4900 + 1120 \dots \\ &+ 64 = 459684; \end{aligned}$$

donde observo, que el cuadrado de las centenas expresa decenas de millar; el duplo de centenas por decenas expresa millares, etc.; luego para proceder del cuadrado á la raíz, hemos de buscar cada parte del cuadrado en el lugar que le corresponde. Así, se establecerá por regla.

*Divídase el número propuesto en periodos de á dos guarismos, empezando por la derecha, y no le hace que el último periodo contenga sólo un guarismo; á su derecha se colocan las rayas de dividir; se halla la raíz del periodo de la izquierda, y se pone en las rayas; esta raíz se cuadra, y el cuadrado se resta de dicho periodo; al lado de la resta se baja el periodo siguiente, y se separa con una coma el guarismo de la derecha; lo que queda á la izquierda de la coma, se divide por el duplo de la raíz hallada (que se coloca debajo de lo separado con la coma); el cociente que resulta se pone en la raíz á la derecha del guarismo anterior, y al lado del duplo de la raíz que sirvió de divisor; se multiplica el divisor junto con el cociente, por el mismo cociente, y el producto se resta de lo que tiene encima, esto es, del residuo anterior, junto con el periodo que se le añadió; al lado de la resta que resulte, se baja el periodo siguiente, y se separa el guarismo de la derecha; lo que queda á la izquierda, se divide por el duplo de toda la raíz hallada; y así se continúa hasta que no haya mas periodos que bajar; en cuyo caso, si la última resta es cero, el número tiene raíz exacta; y si no, es señal de que no la tiene. Y para aproximarla por decimales, se añadirán á la resta dos ceros, los que se considerarán como si fuese un periodo; esto es, se separará*

uno, se dividirá lo que quede á la izquierda por el duplo de toda la raiz hallada, el cociente se pondrá en la raiz despues de la coma; y luego se continuará todo lo que se quiera, añadiendo dos ceros por cada guarismo que se intenta sacar.

V. g. si quiero estraer la raiz cuadrada de 459684, le dividiré en periodos de á dos guarismos cada uno, y tiraré las rayas como aquí se vé:

Luego, veré que la raiz de 45 es 6, que pongo en las rayas, y su cuadrado 36 debajo del 45; tiro una raya y resto, lo que da 9. Al lado de la resta 9 bajo el siguiente periodo 96; separo el guarismo de la derecha con una coma, y lo que queda á la izquierda, que es 99, lo divido por 12, duplo de la raiz hallada, que pongo debajo del 99, esto es, debajo de lo separado con la coma; el cociente 7 de dividir

$$\begin{array}{r|l}
 45,96,84 & 678 \\
 \underline{36} & \\
 099,6 & \\
 \underline{127} & \\
 1078,4 & \\
 \underline{1348} & \\
 0000 & 
 \end{array}$$

99 por 12, le pongo en la raiz á la derecha del 6, y tambien al lado del 12; multiplico el 127 por el cociente 7, y voy restando el producto, de lo que tiene encima, diciendo: 7 por 7 son 49, de 49 á 56 van 7 y llevo 5; 7 por 2 son 14 y 5 que llevaba son 19, de 19 á 19 va cero y llevo 1; 7 por 1 es 7, y 1 que llevaba son 8, de 8 á 9 va 1 que pongo. Al lado de la resta 107, bajo el periodo siguiente 84, separo el guarismo 4, y lo que queda á la izquierda lo divido por el duplo de toda la raiz hallada que es 134; el cociente 8 de dividir 1078 por 134, le pongo en los parages dichos; y hecha la multiplicacion del 1348 por 8, y restando al mismo tiempo, nos sale 0; de consiguiente la raiz exacta del número propuesto es 678.

*Esc.* Al dividir lo separado á la izquierda de la coma por el duplo de la raiz hallada, se debe tener presente: que nunca se puede poner mas de á 9 en la raiz; y si lo que está á la izquierda es menor que el duplo de la raiz, se pondrá 0 en ella y se bajará el periodo siguiente. Tambien suele ocurrir el que se ponga en la raiz mas de lo que le corresponde: lo que se conoce si al ejecutar la multiplicacion y resta, no se puede hacer esta última.

163 Si en la fórmula (A) hacemos  $b=1$ , se tendrá  $(a+1)^2=a^2+2a \times 1+1^2=a^2+2a+1$ ; y como el primer término  $a^2$  es el cuadrado de  $a$ , resulta que los cuadrados

de dos números  $a$  y  $a+1$ , que se diferencian en una unidad, se diferencian en el duplo del menor  $a$  mas la unidad, (esto es, en  $2a+1$ ). Esta proposicion sirve para comprobar las restas que resulten al estraer las raices, pues siempre pueden llegar á ser hasta el duplo de la raiz hallada; pero en llegando á ser el espresado duplo mas 1, deberá tener la raiz una unidad mas de lo que se le haya puesto.

164 Para estraer la raiz cuadrada de 1715037, le dividiré en periodos, y ejecutaré la operacion como aquí se presenta:

Donde advierto que como, al sacar el tercer guarismo sale 0, el producto del 260 por cero debe ser cero; y así la resta será el 250; al lado de la cual bajo el periodo siguiente 37; y como al fin me sale una resta 1556, infiero que el número propuesto no tiene raiz exacta, y diré que su raiz es 1309 y algo mas.

Si quiero aproximarla por decimales, pondré coma en la raiz, añadiré á la resta 1556 dos ceros por cada guarismo decimal que quiera sacar, y consideraré cada dos ceros, como si fuese un periodo, (cuya práctica está fundada en que si la raiz tuviese un guarismo decimal, su cuadrado tendrá dos, uno por cada vez que es factor), y aproximándola hasta milésimas tendré la raiz 1309,594.

Si el número consta de enteros y decimales, ó de decimales solas, se hará que el número de guarismos decimales sea par, añadiendo un cero si fuese impar.

V g. si quiero estraer la raiz cuadrada de 0,9, añadiré un cero, y despues de haber puesto el cero y coma en las rayas como aquí se presenta:

veré que la raiz de 90 es 9, que pongo en la raiz, resto su cuadrado 81, y añado á la resta 9 dos ceros; y continúo hasta sacar los guarismos que desée, que supongo que son tres, y tendré que la raiz de 0,9 es 0,948.

$$\begin{array}{r|l}
 1,715037 & 1309,594 \\
 \hline
 071 & \\
 23 & \\
 \hline
 0250 & \\
 260 & \\
 \hline
 25037 & \\
 2609 & \\
 \hline
 0155600 & \\
 26185 & \\
 \hline
 02467500 & \\
 261909 & \\
 \hline
 011031900 & \\
 2619184 & \\
 \hline
 00555164 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 0,90 & 0,948 \\
 \hline
 90,0 & \\
 184 & \\
 \hline
 1640,0 & \\
 1888 & \\
 \hline
 1296 &
 \end{array}$$

165 Dejamos dicho (128) cómo se forman las potencias, y (129) cómo se estraen las raices de los quebrados; pero cuando son numéricos, suele ser mas sencillo el convertirlos en decimales, y luego hacer con ellos las operaciones que se quieran. Así, si quiero estraer la raiz de  $\frac{5}{7}$ , tendré por el primer método,

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{2,236}{2,645} = 0,845;$$

pero es mas sencillo de este modo

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{0,714285} = 0,845, \text{ como se puede comprobar.}$$

De la formacion de las potencias en general.

166 Hemos dicho (127) lo que se entiende por potencia en general; y hemos dado las reglas para formar las de los monomios. Para obtener las de los binomios, y deducir una regla general, sea  $a+b$  el binomio cuyas potencias se quieren formar; que yéndole multiplicando por sí mismo, y reduciendo, dará las potencias siguientes.

$$1^{\text{a}} \quad (a+b)^1 = a+b$$

$$2^{\text{a}} \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$3^{\text{a}} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$4^{\text{a}} \quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$5^{\text{a}} \quad (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Donde se observa (5.<sup>a</sup> por ejemplo), que la primera parte  $a$  del binomio, se halla en todos los términos ménos en el último, que su esponente en el primero es el mismo 5 de la potencia, y va menguando una unidad en cada uno hasta no encontrarse en el último; que la segunda parte  $b$  del binomio no se halla en el primer término; en el segundo tiene la unidad por esponente, y va aumentando una unidad en cada término hasta que en el último tiene el mismo esponente 5 de la potencia.

Luego en punto á letras y esponentes, está conocida la ley que siguen. Veamos los coeficientes: el 5 del segundo término es el esponente de la potencia; el coeficiente 10 del tercero es lo mismo que  $\frac{5 \times 4}{2}$ ; pero 5 es

el coeficiente del segundo término, 4 el esponente que lleva en él la primera parte, y 2 divisor, es lo mismo que el número de términos que hay ántes del tercero que se busca. Esto mismo se verifica en los demás; luego para hallar el coeficiente de un término cualquiera, se *multiplicará el del término anterior por el esponente que en él lleve la primera parte, y el producto se dividirá por el número de términos que anteceden al que se busca.*

Si la segunda parte *b* del binomio fuere negativa, variarían de signo los términos en que se hallase *b* con esponente ímpar, que son los que ocupan lugares pares en la potencia; por lo que sería — el signo del segundo término, + el del tercero, — el del cuarto, y así alternativamente.

*Esc.* Todos estos resultados, puestos en regla, darían á conocer las partes de que se compone cada potencia; y contrayéndolos á números descompuestos en decenas y unidades, darían igualmente á conocer las partes de que se componían sus potencias, y qué especie de unidades espresaba cada una de dichas partes, para poder proceder de la potencia á la raíz, y deducir una regla para estraer raíces de un grado cualquiera. Pero como desde la raíz cúbica en adelante son muy complicadas las operaciones, y por otra parte hay medios sencillos de ejecutarlo, lo reservaremos para otro lugar (§ 219).

De las ecuaciones determinadas de segundo grado.

167 Queda dicho (143) lo que se entiende por ecuacion de segundo grado, y quedan resueltas (151) las puras. Para resolver las mistas, es necesario manifestar que *toda ecuacion mista de segundo grado ha de constar de tres términos: uno en que se halle la incógnita elevada al cuadrado, otro en que se halle elevada á la primera potencia, y otro donde no se halle incógnita; de modo que la espresion general de las ecuaciones de segundo grado será  $ax^2+bx=c$ , ó  $ax^2+bx-c=0$  (A).*

No puede haber mas términos, porque no puede hallarse ninguno con la incógnita elevada á la tercera potencia, ni á ninguna otra superior; si hubiese muchos

términos donde se hallase  $x^2$  ó la  $x$ , se reducirían todos á uno encerrando en un paréntesis todo lo que las multiplicase; y todos los términos donde no se hallase la  $x$  se podrían considerar como uno solo igual con su suma.

Tampoco puede tener ménos términos; porque si faltase el  $ax^2$  no sería de segundo grado; si faltase el  $bx$  no sería mista; y si faltase el término constante  $c$ , quedaría reducida á  $ax^2+bx=0$ , que dividiendo por  $x$  se convertiría en  $ax+b=0$ , que es de primer grado.

Ahora, dividiendo por  $a$  la ecuacion (A), se convertirá en  $x^2+\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}=0$ ; y haciendo  $\frac{b}{a}=p$ , y  $-\frac{c}{a}=q$ ,

se tendrá  $x^2+px+q=0$  (B), que será la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado; y cuando la ecuacion está bajo esta forma, se dice que está preparada. Para esto, se requiere que se haya reducido la ecuacion á solos tres términos; que se halle sin coeficiente el primer término, que es donde la incógnita está elevada al cuadrado, (lo que se consigue dividiendo toda la ecuacion por el coeficiente que tenga dicho término); y que además dicho primer término tenga el signo positivo, lo que se conseguirá mudando los signos á toda la ecuacion (147 cor.) en caso de no tenerle.

168 Puesto que, como acabamos de ver,  $x^2+px+q=0$ , ó  $x^2+px=-q$ , es la forma general de las ecuaciones de 2.º grado, en resolviendo esta, se tendrá la regla para las demas.

Para esto advertimos, que esta ecuacion quedaría resuelta, si el primer miembro fuese un cuadrado exacto; porque estrayendo la raiz cuadrada, tendríamos la  $x$  elevada sólo á la primera potencia; pero, comparando el primer miembro con la espresion  $x^2+2ax+a^2$  del cuadrado de  $x+a$ , vemos que le falta el tercer término del cuadrado; luego, considerando á  $x$  como primera parte,  $x^2$  será su cuadrado,  $px$  el duplo de primera por segunda, y como  $x$  es la primera,  $p$  será el duplo de la segunda; y por lo mismo su mitad  $\frac{1}{2}p$  será igual á di-

cha segunda parte; luego, si á ambos miembros añadimos  $\frac{1}{4}p^2$ , que es el cuadrado de dicha mitad, la ecuacion no se alterará, y el primer miembro será cuadrado perfecto; luego se tendrá  $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$ ; que

estrayendo la raiz cuadrada, da  $x + \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ ,

y  $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$  (C).

Este resultado comparado con la ecuacion (B, 167) da la siguiente regla,

Para resolver una ecuacion de 2.<sup>o</sup> grado, que ya está preparada, póngase desde luego la incógnita; luego el signo =, despues de este signo la mitad del coeficiente del segundo término con un signo contrario al que lleve; despues el signo de ambigüedad  $\pm$ ; luego un radical de segundo grado; debajo de este radical el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término, siempre con el signo positivo; y despues el tercer término de la ecuacion con el mismo signo que tenga en el segundo miembro, ó con un signo opuesto al que tenga en el primero.

Sacando los dos valores, que da el signo  $\pm$  de la ecuacion (C), se tiene  $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ , y  $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ .

Estos dos valores no pueden ser iguales, á ménos que  $p$  no sea cero; porque entónces el primero será  $x = \sqrt{-q}$ , y el segundo  $x = -\sqrt{-q}$ , que sólo se diferencian en el signo. Pero cuando  $p = 0$ , la ecuacion (B) es pura; luego para que los dos valores, que da una ecuacion de segundo grado, sean iguales aunque de signo contrario, es preciso que dicha ecuacion sea pura, ó que el coeficiente del segundo término sea cero.

*Esc.* Toda ecuacion de segundo grado da dos valores para la incógnita, ó esta ha de ser imaginaria; por analogía se deduce, que si fuera de tercer grado tendría tres valores, etc. y en general toda ecuacion, y por consiguiente todo radical, de un grado cualquiera, da para la incógnita tantos valores como unidades tiene el esponente que da nombre á la ecuacion ó al radical.

169 Propongámonos resolver algunas cuestiones.

1.<sup>a</sup> Encontrar un número tal, que si á su cuadrado se añaden catorce unidades, resulte nueve veces el mismo número.

*Res. y Dem.* Si espresamos por  $x$  el número buscado, tendremos planteada la cuestion ó el problema, en la siguiente ecuacion  $x^2+14=9x$ ; y trasladando, se tiene  $x^2-9x=-14$ ; y aplicándole la regla (168), será

$$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 14} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81-56}{4}} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{5}{2};$$

y separando los dos valores, á que da origen el signo de ambigüedad  $\pm$ , se tendrá  $x = \frac{9}{2} + \frac{5}{2} = \frac{14}{2} = 7$ ; y  $x = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ .

Aquí vemos que nos proponíamos buscar un número solo, y el Álgebra nos proporciona dos números que cumplen con la condicion que se pedía. Comprobemos que esto se verifica con el número 7; y tendremos que el cuadrado de 7 es 49; añadiéndole 14, componen 63; y como nueve veces el número 7 componen tambien 63, resulta que el número 7 cumple con la condicion exigida.

Comprobemos el número 2. Su cuadrado es 4; añadiéndole 14 componen 18; y como nueve veces 2 es tambien 18, resulta que tambien el 2 cumple con la condicion que se pedía.

Esta excelencia, que tienen las Matemáticas, es superior á quanto se puede discurrir; pues, cuando uno se propone resolver una cuestion particular ó buscar un resultado, las Matemáticas dan todos los medios posibles de conseguir el mismo objeto, para que el calculador pueda elegir el que mejor conduzca al fin que se propone. Aquí los dos números son enteros y positivos; en otras ocasiones, unos resultados son positivos, otros negativos, á veces todos negativos, y á veces todos son imaginarios. Los resultados positivos convienen á la cuestion en los mismos términos que viene propuesta. Los resultados negativos generalmente ó corresponden á cuestiones enunciadas en sentido contrario, ó satisfacen solo á la ecuacion en que se cifra la cuestion, pero no á esta en los mismos términos que viene propuesta. Los resultados imaginarios dan á conocer que la cuestion es imposible; y cuando todos lo son, manifiestan que no hay ningun número real y efectivo que satisfaga á la cuestion propuesta. En las dos cuestiones que siguen, se verifican los casos que acabamos de espresar.

2.<sup>a</sup> Dos corréos A y B, salen al mismo tiempo al en-

cuentro uno de otro de dos ciudades distantes entre sí 320 leguas; A anda cada día 8 leguas mas que B, y el número de días que tardan en encontrarse es la mitad de las leguas que anda B al día ¿cuántos días tardarán en encontrarse?

*Res. y Dem.* Sea  $x$  el número de días que se piden; con lo cual  $2x$  serán las leguas que B anda al día; y el total de leguas que habrá andado B hasta encontrar á A, será  $2x \times x = 2x^2$ .

Siendo  $2x$  lo que anda B, A que anda 8 leguas mas, andará  $2x+8$ , y el total hasta encontrarse será el producto de lo que anda en un día, que es  $2x+8$ , por los días que está caminando, que son  $x$ , esto es  $(2x+8)x = 2x^2 + 8x$ .

Y como lo que anduvieron los dos es toda la distancia de dichas ciudades, se tendrá planteado el problema en esta ecuacion  $2x^2 + 8x + 2x^2 = 320$ , ó  $4x^2 + 8x = 320$ ; y dividiendo por 4 será  $x^2 + 2x = 80$ , que da (§168)  $x = -1 \pm \sqrt{1+80} = -1 \pm \sqrt{81} = -1 \pm 9$ ; de donde sale  $x = -1 + 9 = 8$ ; y  $x = -1 - 9 = -10$ ; por consiguiente se encontraron al cabo de ocho días; B andaba 16 leguas diarias, y A andaba 24; el total de A hasta encontrarse, será  $24 \times 8 = 192$ , y el de B será  $16 \times 8 = 128$ , que entre las dos componen las 320. El valor  $x = -10$  satisface á la ecuacion  $4x^2 + 8x = 320$ ; pues la convierte en  $4 \times (-10)^2 + 8 \times -10 = 4 \times 100 - 80 = 320$ ; mas no al sentido en que viene propuesta la cuestion.

3.<sup>a</sup> Dividir el número 14 en dos partes cuyo producto sea 54.

*Res. y Dem.* Sea  $x$  la mayor, con lo que la menor será  $14-x$ ; y la cuestion quedará planteada en esta ecuacion  $x(14-x) = 54$  ó  $14x - x^2 = 54$  ó  $x^2 - 14x = -54$ , que da  $x = 7 \pm \sqrt{49 - 54} = 7 \pm \sqrt{-5}$ ; ó separando los valores,  $x = 7 + \sqrt{-5}$ , y  $x = 7 - \sqrt{-5}$ .

170 Estos resultados imaginarios manifiestan que la cuestion es imposible; y como generalmente, al enunciar un problema, ó al proponerse uno una investigacion cualquiera, no se conocen todas las relaciones de los datos con el resultado, la imposibilidad de este manifiesta que la proposicion enunciada está en contradiccion con alguna verdad demostrada; y hé aquí la utilidad de las imaginarias.

En efecto, en el problema propuesto, se pide que el producto de las dos partes del número 14 sea 54, que es mayor que el cuadrado 49 de la mitad de 14; pero el producto máximo de un número descompuesto en dos par-

tes, es el cuadrado de su mitad; luego pedir un producto mayor, es pedir un imposible.

Para demostrarlo, sea  $2a$  la cantidad que se ha de descomponer en dos partes, con la condicion de que su producto sea el máximo posible; si llamamos  $2x$  la diferencia de dichas dos partes, estas (154) serán  $a+x$  y  $a-x$ , y su producto  $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$ , el cual nunca será mayor que cuando  $x=0$ ; pues entónces no habrá que restar nada del cuadrado  $a^2$ . Pero si  $x$  es 0, cada parte de la cantidad  $2a$  se convierte en  $a$  que es su mitad: luego resulta la proposicion.

Los valores imaginarios, que dan las ecuaciones, satisfacen á la ecuacion de que provienen; pero no satisfacen á cuestion ninguna. En efecto, comprobémos que el primer valor  $7+\sqrt{-5}$ , obtenido para  $x$ , satisface á la ecuacion  $14x-x^2=54$ .

Puesto que  $x=7+\sqrt{-5}$ ;  $14x=14(7+\sqrt{-5})=98+14\sqrt{-5}$ ; y  $x^2=(7+\sqrt{-5})^2=(\S 157)7^2+2.7\sqrt{-5}+(\sqrt{-5})^2=49+14\sqrt{-5}-5=44+14\sqrt{-5}$ ; luego  $14x-x^2=98+14\sqrt{-5}-44-14\sqrt{-5}=98-44=54$ , que es lo que teníamos en el segundo miembro; y lo mismo sucedería con el otro valor  $x=7-\sqrt{-5}$ , que aconsejamos á los principiantes lo verifiquen; pero aunque tenemos aquí valores algebraicos, que satisfacen á la ecuacion, estos valores son unos meros símbolos, que no tienen ninguna existencia efectiva; y por consiguiente, aunque satisfacen á la ecuacion, no pueden satisfacer de ningun modo á la cuestion.

En virtud de esto, y de lo espuesto (152) resulta, que el Algebra tiene la excelencia singular de advertirnos con los valores negativos, que estos satisfacen á las cuestiones del mismo modo que vienen enunciadas, entendiéndose algebraicamente, ó á las cuestiones enunciadas de un modo contrario dando á las palabras solo la acepcion vulgar; y con los valores imaginarios nos manifiestan que no hay número ni valor alguno que pueda satisfacer á la cuestion propuesta, ó que es absolutamente imposible lo que se exige.

*Ideas generales acerca de la resolucion de las ecuaciones superiores al segundo grado.*

---

170 a. Cualquiera que sea la complicacion de una ecuacion de primer grado, con una sola incógnita, siempre se puede resolver por la regla dada (150); y por complicada que sea una ecuacion del segundo grado, con una sola incógnita, siempre la podremos reducir á solos tres términos por lo espuesto (167), y resolver despues por la regla dada (168).

170 b. Pero, la resolucion de las ecuaciones, superiores al segundo grado, dista mucho de poderse obtener como es de desear. Hay fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer grado, que pueden verse en el apéndice 6.<sup>o</sup> del T. I P. I de mi *Tratado Elemental de Matemáticas*; tambien las hay para las ecuaciones del cuarto grado, y son las que inserto en el apéndice 7.<sup>o</sup> del volúmen que acabo de citar. Pero ya, desde los grados *quinto* en adelante, no hay ninguna fórmula que pueda conducir á la resolucion general de las ecuaciones; y es probable que si no se inventa algun nuevo procedimiento de cálculo, por los medios algebraicos ó analíticos que se poseén en el dia, no se debe esperar jamás que se resuelvan.

170 c. Aun las fórmulas para las ecuaciones de 3.<sup>o</sup> y 4.<sup>o</sup> grado son tan complicadas, que, en la mayor parte de los casos, viene á ser lo mismo que si no existiesen.

170 d. Los mas célebres Analistas se han ocupado del problema de la *resolucion general de las ecuaciones de un grado cualquiera con una sola incógnita*; pero hasta el dia sus esfuerzos han sido de todo punto infructuosos, como ya hemos indicado respecto de las ecuaciones de un grado superior al cuarto. Sin embargo, las investigaciones que se han hecho sobre este asunto, han conducido á descubrir propiedades comunes á las ecuaciones de todos los grados, y de que despues se ha sacado partido, ya para resolver cierta clase de ecuaciones como son las *numéricas*, ya para referir la resolucion de una ecuacion dada á las de otras mas simples.

Nos proponemos ahora dar una sucinta idea de los métodos que se han discurrido para resolver, al ménos por aproximacion, las *ecuaciones numéricas*; ó cuyos coeficientes están representados por números.

170 e. Con este objeto, diremos, que se llama *raiz de una ecuacion* (se suponen todos los términos en el primer miembro,

y que el segundo miembro es *cero* como la (B) (§ 167), *toda* espresion ó cantidad, de cualquier naturaleza que sea; es decir, *algebraica, numerica, positiva, negativa, conmensurable, inconmensurable, real ó imaginaria, que, sustituida en lugar de la incógnita de una ecuacion, reduce á cero su primer miembro.*

170 f. Una ecuacion puede siempre considerarse como la traduccion algebraica de las relaciones que existen entre los datos y la incógnita de un problema; por lo cual está uno conducido naturalmente á este principio de que *toda ecuacion tiene al ménos una raiz*; proposicion de que *Mr. Cauchi*, ha dado una demostracion, aunque no muy elemental, en sus *Lecciones esplicadas en la escuela Politécnica de Paris.*

170 g. Hemos dicho, y lo repetimos de nuevo, que los Analistas no han llegado hasta ahora sinó á la resolucion de las ecuaciones generales del 3.<sup>o</sup> y 4.<sup>o</sup> grado; pero las fórmulas, que han obtenido para los valores de las incógnitas, segun ya hemos indicado, son tan complicadas, y de un uso tan molesto, aun cuando puedan aplicarse (lo que no es siempre posible), que los Matemáticos han dirigido principalmente sus investigaciones hacia la resolucion de las ecuaciones numéricas; es decir, de las que provienen de la traduccion algebraica de un problema, cuyos datos son números particulares; y se han encontrado métodos por medio de los cuales, *dada una ecuacion cualquiera numerica, se pueden determinar las raices que encierra.* Nos proponemos ahora dar un resúmen de todos estos métodos, indicar lo que hemos hecho en el *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas* para resolver las ecuaciones mas difíciles, y que por ningun otro método podríamos haber resuelto; y á manifestar el maravilloso método, que hemos escogitado, de tal modo sencillo, que solo por procedimientos prácticos de Aritmética, esto es, sin mas conocimientos que los contenidos en mi *Aritmética de niños*, cualquier persona se halla en estado de resolver toda ecuacion numérica, por extraordinaria que sea su complicacion, con mas ó ménos tiempo segun el grado del esponente y la magnitud de los coeficientes; pero siempre por procedimientos generales y elementales, y á los alcances de las personas que no conozcan absolutamente nada de Álgebra, ni de los demas tratados de las Matemáticas, para quienes tenemos publicado este método en el *Complemento de la Aritmética de niños*, cuyo precio es *cuatro reales.*

170 h. Las primeras tentativas, que se han hecho sobre la resolucion de las ecuaciones numéricas, se deben en mi concepto

á *Vieta*. Este sublime Analista se puso desde luego en un camino acaso el mas directo. Los Matemáticos no han concebido toda la trascendencia que á mi parecer merecía; y así es, que algunos dicen, que *estas tentativas solo pueden servir para referirlas como documentos de la historia*; pero yo juzgo, que presentan un rayo de luz mucho mayor que otras investigaciones posteriores; y por lo mismo inserté su procedimiento para resolver las ecuaciones de 2.<sup>o</sup> y 3.<sup>er</sup> grado, por un método análogo á la extracción de la raíz cuadrada y cúbica, en los (§§ 296 y 297 del T. I. P. I. T. E.).

*Vieta* lo aplica á las ecuaciones hasta del 6.<sup>o</sup> grado; y repito, que este rumbo no es de tan poco momento como algunos lo han considerado. *Harriot*, *Oughtred*, *Pell* y algunos otros procuraron facilitar la práctica del método de *Vieta*, dando reglas particulares para disminuir los tantéos, segun los diferentes casos que ocurren en las ecuaciones, relativamente á los signos de sus términos. Pero la multitud de operaciones que pide, y la incertidumbre del éxito en gran número de casos, lo han hecho abandonar enteramente.

170 *i*. El segundo medio, que se ha discurrido para resolver aproximadamente las ecuaciones numéricas, se debe al inmortal *Neuton* (\*); quien lo publicó en su tratado de *Analysi per*

(\*) Para formar una verdadera idéa sobre las causas que han elevado á la Nación Inglesa al grado de opulencia y prosperidad en que se halla, basta echar la vista por las pruebas de aprecio que en dicha Nación se han dado á los Sabios; pues de aquí ha provenido el que siendo notorio que el Gobierno proteje decididamente á los que sobresalen en cualquier ramo, es el estímulo y aliciente mas poderoso para dedicarse á promover todo lo que presenta utilidad.

Y para corroborar esto con un hecho positivo respecto del celeberrimo Matemático que acabamos de citar, insertarémos aqui el siguiente pasage. En la obra titulada: *Tratado de paz entre Descartes y Neuton*, precedido de la vida literaria de estos dos Gefes de la Física moderna, escrita por el *P. Aimé-Henri Paulian*, de la compañía de Jesus, y Profesor de Física en el colegio de Avignon, impresa en la misma ciudad año de 1763, se encuentra á la página 34 del tomo 2.<sup>o</sup> que contiene la vida de *Neuton*, lo que sigue.

«En fin el 20 de marzo de 1727 falleció *Neuton* de edad de 85 años. Sus exequias fueron semejantes á las de las testas coronadas. Se espuso el cadáver en una cama imperial en la cámara de Jerusalem. De allí fué trasladado á la Abadía de *Westminster* donde se hallan los sepuleros de los Reyes de Inglaterra. El paño del féretro era llevado por Milord gran Canciller, por los duques de Montrose y de Roxburgh, los condes de Pembroke, de Sussex y de Maclesfield, todos seis, Pares de Inglaterra. El Obispo de Rochester ofició acompañado de todo el clero de la Abadía, y el cuerpo fué enterrado cerca de la entrada del coro etc.»

*æquationes numero terminorum infinitas*, inserto en el Tomo 1.<sup>o</sup> de sus obras. El capítulo cuarto tiene por epígrafe: *Exempla per resolutionem æquationum*. Y la seccion 1.<sup>a</sup> página 268 del citado primer tomo, edicion de Londres en 1779 dice así:

*Numeralis æquationum affectarum resolutio.*

1 "Quia tota difficultas in Resolutione latet, modum, quo egrotor, in Æquatione Numerali primùm illustrabo.

"Sit  $y^3 - 2y - 5 = 0$ , resolvenda; et sit 2 numerus qui minus quàm decimà sui parte differt à Radice quæsità. Tum pono  $2 + p = y$ , et substituo hunc ipsi valorem in Æquationem, et inde nova prodit  $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$ , cujus radix pexquirenda est, ut quotiente addatur nempe (neglectis  $p^3 + 6p^2$  ob parvitatem)  $10p - 1 = 0$ , sive  $p = 0,1$  prope veritatem est; itaque scribo 0,1 in quotiente, et suppono  $0,1 + q = p$ , et hunc ejus valorem, ut priùs substituo; unde prodit  $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$ .

Et cum  $11,23q + 0,061$  veritati prope accedit, sive ferè sit  $q$  æqualis  $-0,0054$  (dividendo nempe donèc tot eliciantur figuræ, quot locis primæ figuræ hujus et principalis quotientis, exclusive distant) scribo  $-0,0054$  inferiori parte quotientis, càm negativa sit.

2 "Et supponens  $-0,0054 + r = q$ , hunc ut priùs substituo, et operationem sit produco quo usque placuerit. Verùm si ad bis tot figuras tantùm quot in Quotiente jam reperiuntur unà demptà, operam continuare cupiam, pro  $q$  substituo  $-0,0054 + r$  in hanc  $6,3q^2 + 11,23q + 0,061$ , scilicèt primo ejus termino ( $q^2$ ) propter exilitatem suam neglecto; et prodit  $6,3r^2 + 11,16196r + 0,000541708 = 0$  ferè, sive (rejecto  $6,3r^2$ )

$$r = \frac{-0,000541708}{11,16196} = -0,00004853 \text{ ferè, quam scribo in ne-}$$

gativa parte Quotientis. Deniquè negativam partem Quotientis; ab Affirmativà subducens habeo 2,09455147 Quotientem quæsitàtam."

Aquí se observa, que este método de *Newton* estriba en que por tantèos se conozca ya el verdadero valor de la raiz con ménos de una décima parte de diferencia; lo cual en ecuaciones complicadas exige mas molestia y trabajo que la resolucion completa de la ecuacion por mi método.

170 j. *Halley*, poco tiempo despues que *Newton*, pero sin tener conocimiento del método de este, segun parece comprobado, inventó un método que no difiere del de *Newton* sinó en que conserva en las ecuaciones sucesivas, los términos en que se hallan las segundas potencias de la incógnita, que podrémos llamar

*auxiliar*; pero por un medio ingenioso, que manifestó ser debido á *Lagni*, reduce aun toda la operacion á una simple division, segun aparece en las *Transacciones filosóficas*, número 210 año de 1694.

170 *k*. *Rahpson* ideó otro método, que en realidad solo es una simplificacion del anterior; se reduce á encontrar por medio de la ecuacion propuesta, otra que se llama *derivada*, por procedimientos análogos á los del *Cálculo diferencial*; y si se llama *M*, por ejemplo, el valor que toma la ecuacion primitiva, sustituyendo *a* por *x* en ella, y *N* lo que resulta en la ecuacion derivada por la sustitucion de *a* por *x*, se tiene un valor mas

aproximado que se representa por 
$$x = a - \frac{M}{N}.$$

Por medio de este valor se obtiene una segunda aproximacion, y así sucesivamente, llegando al resultado final con alguna mayor brevedad que por el sistema de *Neuton*.

*Rahpson* facilita la aplicacion de su método calculando tablas, con cuyo auxilio se obtienen las cantidades *M* y *N* para cada ecuacion hasta del décimo grado *inclusive*.

En general, para que el método de *Neuton* y el de *Rahpson* produzcan su efecto, conviene que se conozca un valor *a* de la raiz, que difiera del verdadero valor de *x* en ménos de la décima parte de dicho valor; si esto no se verifica, la aproximacion será mas lenta, y la operacion exigirá un gran número de sustituciones, pudiendo llegar el caso de caer en defecto.

170 *l*. Se deben á los dos hermanos *Juan* y *Jacobo Bernoulli* muchos métodos ingeniosos de aproximacion, que se hallan espuestos en el Tomo 3.º de las obras de *Juan Bernoulli*, y en las actas de *Leipsick* de 1689. *Taylor* en las *Transacciones Filosóficas*; *Tomas Simpson* en sus ensayos; el *Marqués de Courtivron*, en las Memorias de la Academia de Ciencias; y el Matemático aleman *Kæstner*, han descubierto igualmente procedimientos particulares, que son tambien de importancia; sin embargo, el método de *Daniel Bernoulli*, espuesto en los Comentarios de la Academia de S. Petersburgo Tomo 3.º y desarrollado despues por *Euler* en su *Introductio in analysim infinitorum*, estriba en consideraciones tan diferentes de los otros métodos, que debemos dar al ménos una idéa del procedimiento elegante que *Euler* ha sacado de él.

170 *ll*. El método de *Bernoulli* consiste en hallar una serie recurrente, tal que uno de sus términos, dividido por el precedente, dá un valor mas y mas aproximado á una raiz de la ecuacion, segun los términos empleados sean mayores.

No todas las ecuaciones son de naturaleza de poderseles aplicar este método con ventaja; y frecuentemente hay precision de calcular un muy gran número de términos de la serie, para obtener una débil aproximacion.

170 *m.* Es bastante difícil poder conocer exactamente el grado de aproximacion que se obtiene por los métodos precedentes, á saber: en cada operacion, cuales son las cifras decimales, en que se debe uno detener para no hacer inútilmente los cálculos sucesivos demasiado laboriosos. Bajo este aspecto, el procedimiento de *Lagrange*, que vamos á indicar, es superior aunque no da sinó aproximaciones mas lentas, y que no sea en realidad sinó un método de tantéo.

Supone, como el de *Newton*, que ya por tantéos se conozca que una de las raices se halla entre  $a$  y  $a+1$ ; ó de la cual  $a$  es la parte entera. En vez de designar por una nueva incógnita la parte que le falta, como en el procedimiento de *Newton*, lo señala por un quebrado, cuyo numerador es la unidad, y que tiene por denominador otra incógnita, por ejemplo  $z$ . Es decir, que, así como en el método de *Newton*, se supone  $x=a+z$ , en

el de *Lagrange*, se supone  $x=a+\frac{1}{z}$ ; substituyendo este valor

en la ecuacion propuesta, y quitando los divisores, resulta una ecuacion en que entra solo la *incógnita auxiliar*, que tendrá precisamente una raiz positiva mayor que la unidad; y no tendrá mas de una, si solo hay una raiz comprendida entre  $a$  y  $a+1$ . En este último caso, despues de haber encontrado la parte entera de este valor de  $z$  (por lo que se llaman *limites* de las ecuaciones), se designa por  $a$ , y la *incógnita auxiliar* se iguala con aquel valor ya conocido, acompañado de un nuevo quebrado que tiene la unidad por numerador, y por denominador *otra incógnita auxiliar*; substituyendo este valor en la ecuacion anterior, resulta una nueva ecuacion, de tal forma que no tendrá igualmente sinó una sola raiz positiva mayor que la unidad. Y reuniendo las diversas raices, resulta la de la propuesta, espresada por una *fraccion continua*; esto es, que el denominador es un número misto en que el denominador es otro número misto etc.; la cual espresará con tanta mayor aproximacion la raiz propuesta, cuantos mas términos se tomen.

El método de *Lagrange* conduce muchas veces á cálculos tan largos, molestos, penosos y desagradables, que en la práctica se prefiere aun el de *Newton* y algunos otros procedimientos usa los por *Kramp*, *Cagnoli* etc.

170 n. Mr. *Budan de Boislaurent*, en su nuevo método para la resolución de las ecuaciones numéricas, propone un procedimiento de mucha simplicidad, y en nuestro concepto es uno de los más espeditos; por lo cual lo tenemos insertado en el T. II. P. I. T. E. desde el (§ 405) hasta concluir dicho volumen. Yo hice este trabajo en el mismo año de 1807 en que se publicó la memoria de Mr. *Budan*, sin saber aun el concepto que había merecido á los Matemáticos. Y ahora tengo la satisfacción de haber visto, que Mr. *Lagrange* formó de dicha obra el mismo concepto ventajoso que yo; pues en la página 166 de la 3.<sup>a</sup> edición de su *Tratado sobre la resolución de las ecuaciones numéricas, de todos los grados*, se espresa del modo siguiente: "Se puede decir, que esta obra, (la de Mr. *Budan*) no deja nada que desear sobre la resolución de las ecuaciones numéricas, cuyas raíces son todas reales, y bajo este aspecto podría servir de suplemento al presente Tratado."

170 ñ. Todos estos métodos, además de lo defectuosos é incompletos que son, necesitan para poderse emplear, conocimientos de los más sublimes de las Matemáticas; y como la necesidad es la madre universal de los descubrimientos, en mi *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas*, fundándome en una idea que tenía manifestada en la 3.<sup>a</sup> edición del T. I. P. I. T. E. (nota del § 310), resolví ecuaciones del 3.<sup>o</sup>, del 6.<sup>o</sup> y del grado 9.<sup>o</sup> por procedimientos tan sencillos, que solo exigen los conocimientos de mi *Aritmética de niños*: siendo muy digno de notarse que una de las ecuaciones tenía la forma de serie; y por lo mismo se resistía á cuantos procedimientos se han ideado sobre la materia. Los cálculos, que exige, son tambien penosos; pero solo son cálculos aritméticos, y todos ellos se pueden practicar por personas de muy limitados conocimientos, sin necesidad de distraer la atención de los Matemáticos profundos como exigen los demás métodos.

170 p. Despues, que ví el excelente resultado, que obtuve en dicha obra, no he cesado de meditar para simplificar y generalizar esta materia, y creo haber llegado hasta el punto de poderse aplicar mi método por los discípulos de las escuelas, como ya lo están verificando los de las *Escuelas Normales*, establecidas para generalizar mi nuevo método de leer contenido en la *Teoría de la Lectura*; y en prueba de su sencillez, basta observar, que sólo estriba en las cortas nociones, que voy á dar.

170 q. Así como las ecuaciones del 2.<sup>o</sup> grado, las hemos reducido á tres términos (167); toda ecuacion de cualquier grado  $n$  la podemos reducir á  $n+1$  términos; pues aunque tuviese muchos

mas, podríamos reducir á uno solo todos los términos en que la incógnita estuviese elevada al grado  $n$ ; á otro, todos los términos en que estuviese elevada al grado  $n-1$ ; y así sucesivamente hasta reducir á un solo término todos aquellos que fuesen constantes ó que no contuviesen á la incógnita; ó lo que es lo mismo, la contuviesen con un esponente *cero*.

Si despues dividimos toda la ecuacion por el coeficiente del término de mayor esponente, ó de  $n$  (\*), tendremos una ecuacion en que el término de mayor esponente no tendrá coeficiente, y será positivo; pues si fuese negativo, mudaríamos los signos á toda la ecuacion; y suponiendo que la incógnita se espresase por  $x$ , y los coeficientes de los demas términos, empezando desde el segundo, sean  $A, B, C, D$ , etc., la ecuacion general del grado  $n$  podremos representarla del modo siguiente:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \dots + Kx + L = 0 \quad (1).$$

El espacio en que colocamos los puntos, queda lleno cuando al esponente  $n$  se le dá un valor particular; y en el caso de que una ecuacion carezca de alguno de sus términos, se supone que su coeficiente es 0. Y toda la *teoria de las ecuaciones*, asi como parte de nuestro método, estriba en la siguiente proposicion.

170 r. Si  $a$  es raiz de la ecuacion (1), en la acepcion que le hemos dado (170 e), el primer miembro de dicha ecuacion será divisible por  $x-a$ .

En efecto, por ser  $a$  raiz de la ecuacion (1), se tendrá,

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} \dots + Ka + L = 0;$$

de donde  $L = -(a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} \dots + Ka)$ ;

sustituyendo este valor de  $L$  en la ecuacion (1), resultará:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + Kx \\ -a^n - Aa^{n-1} - Ba^{n-2} - \dots - Ka \end{array} \right\} = 0; \text{ ó } (x^n - a^n) +$$

$A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) \dots + K(x-a) = 0 \quad (2)$ ; pero, en virtud de lo espuesto (120), todos los factores  $x^n - a^n$ ,  $x^{n-1} - a^{n-1}$ , etc. son divisibles por  $x-a$ ; luego, como en cada término se halla uno de estos factores, resulta que todos los términos serán divisibles por  $x-a$ ; y por consiguiente lo será toda la ecuacion; que era lo que nos proponíamos demostrar.

170 rr. Ejecutando las divisiones, reduciendo y llamando  $A', B', C'$ , etc.  $K'$  los coeficientes del cociente, se verificará, que la (ec. 1.), la podremos descomponer en dos factores en

(\*) En la práctica de mi nuevo método no se necesita quitar el coeficiente al primer término; pero lo hacemos aquí para manifestar las propiedades principales de las ecuaciones.

esta forma:  $(x-a)(x^{n-1}+A'x^{n-2}+B'x^{n-3}...+K')=0$  (3).

Ahora, la ecuacion propuesta llegará á ser 0 cuando cualquiera de estos dos factores sea 0; luego podrá verificarse, ó cuando  $x-a=0$ , ó cuando  $x^{n-1}+A'x^{n-2}+B'x^{n-3}...+K'=0$  (4).

Y si suponemos que esta tenga una raiz  $b$ , será divisible por  $x-b$ , y la podrémos poner del modo siguiente:

$(x-b)(x^{n-2}+A''x^{n-3}...+K'')=0$  (5); y continuando del mismo modo, podrémos poner el primer miembro de la (ec. 1) bajo esta forma:

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)...=0$  (6); pudiendo resultar tantos factores, y no mas, como unidades tiene el esponente  $n$ , y el mismo número de raices; pues la (ec. 6) se verificará, ó cuando  $x-a=0$ , que dá  $x=a$ ; ó cuando  $x-b=0$ , que dá  $x=b$ ; ó cuando  $x-c=0$ , que dá  $x=c$ ; ó cuando  $x-d=0$ , que dá  $x=d$  etc.

Recíprocamente, si el primer miembro de una ecuacion es divisible exactamente por la incógnita acompañada de una cantidad conocida por vía de suma ó de resta, esta cantidad, tomada con un signo contrario al que tiene en el binomio que sirve de divisor, será raiz de la ecuacion.

De todo esto resulta, que toda cantidad, número ó expresion que, sustituida por la incógnita en una ecuacion, no reduce su primer miembro á *cero*, no es raiz de la expresada ecuacion; pero se verificará que el valor en que se convierte dicho primer miembro por la mencionada sustitucion, es igual á la resta que resulta de dividir dicho primer miembro por la incógnita, acompañada de dicho número, valor ó expresion con un signo contrario.

170 s. Hay ecuaciones que, en apariencia, admiten ménos raices que unidades hay en el esponente de su grado, y son aquellas en que el primer miembro tiene varios factores iguales, tal como la ecuacion  $(x-a)^6(x-b)^4(x-c)^3(x-d)^2=0$ .

Otra de las propiedades generales de las ecuaciones es la siguiente:

*Si de sustituir dos números por la incógnita en una ecuacion, el primer miembro da valores de signos contrarios, se verifica, que dicha ecuacion ha de tener al ménos una raiz real comprendida entre aquellos dos valores de la incógnita.*

En efecto, si llamamos  $P$  á la suma de todos los términos positivos de una ecuacion, y  $N$  á la suma de todos los negativos, tendrémos que si  $a$  es el valor mayor de  $x$  que haya dado un resultado negativo, y  $b$  otro valor mayor de  $x$  que haya dado un resultado positivo, estas dos circunstancias no podrán haberse verificado sinó porque en virtud de la primera sustitucion sería

$P < N$ , y en virtud de la segunda  $P > N$ ; luego habiendo  $P$  sobrepujado á  $N$ , se debe inferir que hay un valor de  $x$  comprendido entre  $a$  y  $b$  que haga que  $P = N$ , y este valor será raíz de la ecuacion, pues que hará  $P - N = 0$ .

Del mismo modo se discurriría, si la sustitucion del primer valor  $a$ , diese un valor positivo y el segundo  $b$  diese un valor negativo; pues entónces se tendria en el primer caso  $P > N$ , y en el segundo  $P < N$ ; y se deduce que entre  $a$  y  $b$  debe existir un valor que haga  $P = N$ , el cual será raíz de la ecuacion.

La inversa de esta proposicion no es verdadera; pues cuando se substituyen en una ecuacion dos números diferentes por la incógnita, y resultan valores con un mismo signo, puede verificarse que entre aquellos dos valores de la incógnita haya muchas raíces reales, con tal que sean en número par, es decir, que podrá haber dos raíces reales, cuatro, seis, ocho etc. comprendidas entre dichos números.

La forma de las ecuaciones presenta muchas veces indicios, para conocer á simple vista la naturaleza de alguna ó algunas de las raíces, como vamos á manifestar.

1.º *Toda ecuacion de grado impar, tiene al ménos una raíz real de signo contrario al de su último término.*

Para convencernos de esta verdad, debemos tener presente que en el (§ 112 T. II) demostramos que en todo conjunto de términos ordenados por las potencias de una letra, se puede concebir á esta un valor tal, que un término cualquiera sea mayor que la suma de todos los que le sigan. Luego, de cualquier naturaleza que sea la (ec. 1), podremos concebir que hay un valor de  $x$ , que supon-drémos sea  $M$ , tal que el signo del primer miembro dependa del que tenga el primer término  $M^n$ .

Ahora, como suponemos que  $n$  es impar, el signo de  $M^n$  será (§ 127. 1.º) el signo de  $M$ ; y si el último término  $L$  tiene el signo  $+$  y se hace  $x = -M$ , se tendrá un resultado de signo contrario al que da la suposicion de  $x = 0$ , y en virtud de lo acabado de demostrar, se verificará que la ecuacion propuesta tendrá una raíz real entre  $0$  y  $-M$ , esto es, negativa.

Si el último término  $L$  tiene el signo  $-$ , se hará entónces  $x = M$  y se tendrá un resultado de signo contrario al que da el supuesto  $x = 0$ , en cuyo caso, la raíz se hallará entre  $0$  y  $+M$ ; y será positiva. Luego resulta lo que espresa el enunciado de la proposicion.

2.º *Toda ecuacion de grado par, cuyo último término es negativo, tiene al ménos dos raíces reales, una positiva y otra negativa.*

Porque, llamando  $M$  al número que, sustituido por  $x$  en la ecuacion propuesta, hace que el primer término sea mayor que la suma de todos los que le siguen, como el esponente es par, resulta que dicho primer término será positivo tanto en el caso de  $x=+M$ , como en el de  $x=-M$ ; y suponiendo que el último término  $L$  tenga el signo  $-$ , resultará que haciendo  $x=+M$ ,  $x=0$ , y  $x=-M$ ; el primero y tercer supuesto darán resultados positivos; y el supuesto de  $x=0$ , dará el resultado negativo  $-L$ ; luego, en virtud de la proposicion anterior, habrá una raiz real entre  $x=+M$ , y  $x=0$ ; y otra raiz tambien real entre  $x=0$ , y  $x=-M$ . Luego se verifica la proposicion.

3.º *La ecuacion en que todos los esponentes de la incógnita sean números pares, y su último término sea negativo, tendrá al ménos dos raices reales de igual valor numérico; una positiva y otra negativa.*

Para demostrarlo, supongamos que la ecuacion tenga esta forma  $x^{2n} + Ax^{2p} + Bx^{2q} + \dots - L = 0$  (7).

Si suponemos  $x^2 = z$ , y hacemos en ella esta sustitucion, se convertirá en  $z^n + Az^p + Bz^q + \dots - L = 0$  (8).

Ahora, si  $n$  es número impar, en virtud de lo demostrado 1.º, esta ecuacion tendrá una raiz positiva, que si la espresamos por  $a$ , será  $z=a$ ; y por consiguiente  $x^2=a$ , y  $x=\pm\sqrt{a}$ , que da  $x=+\sqrt{a}$ , y  $x=-\sqrt{a}$ .

Si  $n$  fuese un número par, en virtud de lo 2.º que acabamos de demostrar, tendrá al ménos dos raices reales, una positiva, y otra negativa. Espresando la positiva por  $a$ , y la negativa por  $-b$ , será  $z=a$ , y  $z=-b$ ; y como  $x^2=z$ , será  $x^2=a$ , y  $x^2=-b$ . La primera da  $x=\pm\sqrt{a}$ , y la segunda da  $x=\pm\sqrt{-b}$ . Estas últimas son imaginarias, y solo quedan las otras dos, á saber:  $x=+\sqrt{a}$  y  $x=-\sqrt{a}$ . Luego queda demostrada la proposicion.

De aquí se deduce, que si todos los esponentes de la incógnita en una ecuacion son pares, y se ha encontrado una raiz real, se verificará que tendrá otra raiz real igual con ella numéricamente, pero con un signo opuesto.

4.º *La ecuacion en que todos los esponentes sean números pares y todos los coeficientes sean números positivos, no tiene ninguna raiz real; y todas serán imaginarias.*

En efecto, si suponemos que se tenga la ecuacion

$$x^{2n} + Ax^{2p} + Bx^{2q} + \dots + L = 0,$$

para que su primer miembro se reduzca á cero, es preci-

60 que los unos términos se destruyan con los otros; pero como todos los esponentes son pares, y toda potencia par de una cantidad real es (128... 1.º) positiva, no puede resultar ningun signo *ménos* de las potencias de la incógnita, sea esta positiva, sea negativa. Por otra parte, la proposicion supone que todos los coeficientes sean positivos, luego el primer miembro se compone de un conjunto de términos positivos y no podrá jamas ser *cero*. Luego los valores de la incógnita serán imaginarios; pues las expresiones imaginarias son las únicas que elevadas al cuadrado (138) ó á potencias de grado par, sean capaces de producir valores negativos.

170 t. Fundándome únicamente en lo que precede, resolveré, por mi nuevo método, toda clase de ecuaciones numéricas; contrayéndome desde luego á las ecuaciones mas difíciles, que quantas se han resuelto hasta el día por todos los otros métodos conocidos. Mi procedimiento es tan sencillo que, repito, puede ponerse en práctica sin suponer mas conocimientos, segun se ha practicado en el *Tratado de las aguas*, que los de mi *Aritmética de Niños*; pero mis nuevas investigaciones lo han simplificado aun mucho mas: en términos, que ahora queda reducido á la mitad, ó ménos del trabajo.

170 u. Los que deséen imponerse en los esfuerzos que ha hecho el entendimiento humano acerca de la resolucion general de las ecuaciones, pueden consultar el T. II. P. I. T. E. desde el (§ 364) hasta concluir el volúmen; y los apéndices 6.º y 7.º del T. I. P. I. donde se resuelven ecuaciones mas complicadas que en ninguna otra obra; pues se llegan á presentar hasta las 64 raices de la ecuacion  $u^{64} - 7u^{48} + 21u^{32} - 29u^{16} + 14 = 0$ .

170 v. Ahora nos dirijimos á recapitular las ventajas, que se han de seguir de nuestro nuevo método. Con este objeto, debemos observar, que la solucion de todo problema se reduce, en última análisis, á la resolucion de una ó muchas ecuaciones, cuyos coeficientes son dados en números, y que por lo mismo se pueden llamar *ecuaciones numéricas*; por lo qual, es de la mayor importancia tener métodos para resolver completamente estas ecuaciones de cualquier grado que sean. Todos los métodos, que hasta ahora se han imaginado, exigen una inmensidad de operaciones preliminares y preparatorias, todas complicadas, y hasta cierto punto extrañas al objeto.

Tales son por ejemplo el quitar el segundo término de las ecuaciones; la investigacion por separado del número de las raices

positivas, del de las negativas, de las reales, de las incommensurables, de las iguales y de las imaginarias; la de hallar los límites de las raíces, la ecuacion de las diferencias, y la de sus cuadrados etc. Todas estas indagaciones parciales son mas ó ménos necesarias é indispensables en dichos métodos. Además, hay algunos que exigen el que las ecuaciones tengan sus términos del mismo signo, escepto el último ó que es todo conocido: cosa posible, con tal que se tengan dos límites de una raíz, el uno en mas y el otro en menos, y que sean tales que todas las otras raíces, así como las partes reales de las imaginarias, si las hay, caigan entre estos límites; pero la dificultad de encontrar dichos límites, es por sí misma tan grande, que algunas veces es mayor que la de resolver la ecuacion.

Por manera, que se puede decir, que todos los métodos conocidos hasta aquí para la resolución de las ecuaciones numéricas, solo sirven para las que están ya casi resueltas, como dice *Lagrange*, página XXV de la introduccion de su citada obra; y á fin de que no se atribuya á parcialidad, ó á querer realzar mi método, pondré aquí la última opinion de *Lagrange* sobre este particular, inserta en la 3.<sup>a</sup> edicion de su obra ya mencionada; cuya introduccion la termina diciendo: «hasta aquí no se ha encontrado nada que pueda dispensar en todos los casos de la investigacion de un límite menor que la menor diferencia entre las raíces, ó que sea preferible á los medios suministrados en la nota 4.<sup>a</sup> para facilitar esta investigacion.»

Así es, que este célebre Autor, como operacion preliminar, se ocupa en el número 8 de la mencionada obra, de resolver el siguiente problema. *Dada una ecuacion cualquiera, hallar otra ecuacion, cuyas raíces sean las diferencias entre las raíces de la ecuacion propuesta.* Para conseguirlo, usa de los mas sublimes conocimientos, incluso los de los coeficientes diferenciales. Emplea mas de tres páginas en la resolución de dicho problema, y eso que no hace mas que indicar los procedimientos que hay que seguir.

Esta ecuacion de las diferencias resulta mas complicada que la ecuacion que se trata de resolver; pues si la ecuacion propuesta es del grado  $m$ , la de las diferencias es del grado  $m(m-1)$ ; y despues de varias consideraciones para simplificar dicha ecuacion, se

reduce esta á otra del grado  $\frac{m(m-1)}{2}$ , que, en el tercer gra-

do, exige la resolución de una ecuacion tambien del tercer grado; en la del cuarto exige la resolución de una ecuacion del sexto; en la del quinto, una ecuacion del décimo; en la del sexto, una ecuacion del

décimoquinto; y así sucesivamente. Luego en general, para resolver por dicho método una ecuacion cualquiera, se necesita saber resolver otra de un grado igual en las de tercer grado, y de un grado muy superior en las de los grados elevados; lo cual envuelve una especie de *circulo vicioso*, á causa de que, *para resolver una ecuacion, se exige como medida preliminar, el resolver otras siempre mas complicadas*; pues que aun en el tercer grado en que la ecuacion de los cuadrados de las diferencias es del mismo tercer grado, resulta siempre con mas términos, ó con mayores coeficientes.

Para que no se me tache de exagerado, voy á extractar el Capítulo IV de la misma obra da *Lagrange*, que tiene por epigrafe: "*Aplicaciones de los métodos precedentes á algunos ejemplos.*"

170 *x*. El primero es resolver la ecuacion  $x^3 - 2x - 5 = 0$ ; que es la misma de *Newton* (170 *i*), sin mas diferencia que poner *x* en vez de *y*. Como medida preliminar, se propone *Lagrange* hallar por las fórmulas de su número 8 la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de las raices; y halla para esta ecuacion, la  $v^3 - 12v^2 + 36v + 643 = 0$ ; que es indudablemente mas complicada que la anterior; pues aunque es del mismo grado, tiene esta mas términos y los coeficientes son mayores. Despues busca por los métodos del número 12 el limite de los valores de *x*, y encuentra que 3 es el límite buscado en números enteros, y que la raiz real de la ecuacion propuesta, pues las otras dos son imaginarias, se halla entre los números 2 y 3; y que así 2 será el valor aproximado de esta raiz.

Con estos conocimientos preliminares, pasa despues *Lagrange*

á practicar su método; para lo cual supone  $x = 2 + \frac{1}{y}$ ; y ha-

ciendo las sustituciones en la ecuacion primitiva, y ordenando, obtiene  $y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$ ; cuya ecuacion es mas complicada que la primitiva, y es preciso resolver, para encontrar un valor aproximado. Ademas, tiene que emplear el método de las sustituciones hasta encontrar dos sustituciones consecutivas, que den resultados de signos contrarios, y halla que  $y = 10$ . Hace despues

$y = 10 + \frac{1}{z}$ ; y obtiene  $61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0$ ; ecuacion que

tambien es mas complicada que la primitiva, no solo por tener mas términos, sinó por ser mayores sus coeficientes, y cuya resolucion es indispensable por sustituciones sucesivas, hallando 1 por valor aproximado.

Hace despues  $z=1+\frac{1}{u}$ ; y obtiene la ecuacion

$54u^3+25u^2-89u-61=0$ , cuya resolucion necesita; y continuando de este modo, halla los números 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 19 etc. teniendo precision de resolver diez ecuaciones, todas mas complicadas que la primitiva, deduciendo por último que la raiz de la ecuacion de *Newton* se halla entre los números 2,09455149 y 2,09455147.

Toma despues por segundo ejemplo la ecuacion  $x^3-7x+7=0$ . Y por sus fórmulas, halla para la ecuacion de los cuadrados de las diferencias  $v^3-42v^2+441v-49=0$ ; ecuacion tambien mas complicada, que necesita resolver como operacion preliminar.

Hace luego  $v=\frac{1}{y}$ ; y verificando la sustitucion, y ordenando

con relacion á  $y$ , obtiene  $y^3-9y^2+\frac{42}{y}-\frac{1}{4y}=0$ .

Y por ella deduce los límites; hace las sustituciones convenientes, y halla la ecuacion  $x^3-63x+189=0$ ; en la cual se debe hacer la sustitucion de los números naturales; y por ella deduce que el valor entero mas aproximado á dos de las raices es 1; y luego infiere que 3 es el número mas aproximado á la otra raiz, que es negativa. Despues de todos estos afanes y fatigas, pasa á empezar su método; y necesita resolver cuatro ecuaciones del mismo grado, pero todas mas complicadas que la primitiva, para encontrar cada una de estas dos raices

$$x=1+\frac{1}{1+1} \\ \frac{2+1}{4+etc.}$$

$$x=1+\frac{1}{2+1} \\ \frac{1+1}{4+etc.}$$

Y despues, resolviendo dos ecuaciones, tambien mas complicadas que la primitiva, llega á obtener para la raiz ne-

$$gativa \quad x=-3-\frac{1}{20+\frac{1}{3+etc.}}$$

Estas dos son las únicas ecuaciones que se resuelven en la citada obra de *Lagrange*, las cuales habrán sido sin duda escogidas para que se presenten desde luego límites bien pequeños de las raices; y si á pesar de esto exigen tanta complicacion, deberá inferirse cual será el grado de dificultad que ofrecerá cuando las ecua-

ciones sean de grados mas altos, y que los límites estén expresados por números considerables, como centenas, millares, millones etc.

Para reducir á quebrado decimal cada una de estas raíces, suprimiremos lo que señala el + que hay despues del último denominador; y por medio de las transformaciones que siguen, obtendremos

$$\begin{aligned} \text{para la primera, } x &= 1 + \frac{1}{1+1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}} = \dots \\ &= 1 + \frac{1}{13} = 1 + \frac{9}{13} = 1,6923. \\ &\quad \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Por la supresion de lo que había despues del 4, resulta que el último quebrado  $\frac{1}{4}$  es mayor de lo que corresponde, pues su denominador 4 es menor que 4+etc. que contenia la primitiva. Luego  $2+\frac{1}{4}$  será mayor de lo que debe ser; y  $\frac{1}{2+\frac{1}{4}}$  será (66) menor de lo que debe; y en su consecuencia, el quebrado que acompaña al entero será mayor que lo que corresponde, y todo el valor 1,6923 será mayor que la verdadera raíz.

Reduciendo la segunda raíz, se obtiene

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = 1,35714;$$

y por la misma razon de ántes, este valor es mayor que la verdadera raíz.

La tercera raíz que saca es

$$x = 3 - \frac{1}{20 + 1} = 3 - \frac{1}{20 + \frac{1}{3}} = 3 - \frac{1}{\frac{61}{3}} = 3 - \frac{3}{61} = 3,04918,$$

$3 + \text{etc.}$

Este valor es numéricamente menor que el verdadero; porque suprimiendo el etc. en el denominador del quebrado  $\frac{1}{3}$ , resulta  $\frac{1}{3}$  que es (66) mayor; en su consecuencia el quebrado  $\frac{1}{20 + \frac{1}{3}}$  es menor de lo que corresponde.

170 y. Para que aun en esto, no se me tache de exagerado, pondré aquí lo que dice el mismo *Lagrange* en la nota (IV) de

dicha obra, sobre *la manera de hallar un límite menor que la mas pequeña diferencia entre las raices de una ecuacion dada; que empieza de este modo.* “La determinacion de este límite es necesaria para poder formar una serie de números, cuya sustitucion sucesiva haga conocer de un modo cierto todas las raices reales de la ecuacion propuesta. El medio mas directo de obtenerle, es calcular, como lo hemos propuesto, la ecuacion misma, cuyas raices serían las diferencias entre las de la ecuacion dada, y determinar despues por los métodos conocidos el límite de la menor raiz de esta ecuacion. Mas, por poco que el grado de la ecuacion propuesta sea elevado, el de la ecuacion de las diferencias sube tan alto, que está uno espantado de la longitud del cálculo necesario para encontrar el valor de todos los términos de esta ecuacion; pues que el grado de la propuesta, siendo  $m$ , se tiene  $\frac{m(m-1)}{2}$  coeficientes que calcular, y que para emplear las series

del número 8, sería necesario en todo calcular  $2m(m-1)$  términos. Como este inconveniente podrá hacer el método general casi impracticable en los grados un poco elevados, me he ocupado largo tiempo de los medios de libertarle de la investigacion de la ecuacion de las diferencias; y he reconocido en efecto, que sin calcular en entero esta ecuacion, se podía sin embargo hallar un límite menor que la mas pequeña de sus raices ”

Habla de las funciones derivadas ó coeficientes diferenciales, y emplea mas de seis páginas en cuarto frances para dar á conocer el método; y luego aplicarlo á encontrar el menor límite.

170 z. En todo esto se ve la constancia y laboriosidad de los Analistas, para conseguir la resolucion de las ecuaciones, aunque hasta hoy se halla tan imperfecta. Esto al mismo tiempo que prueba lo acreedores que son los Matemáticos al reconocimiento público, realza la importancia de nuestro nuevo método; pues se consigue por él la solucion completa de este importantísimo problema. *Dada una ecuacion numérica, de cualquier grado que sea, encontrar directamente, y sin ninguna operacion preliminar ni preparatoria, todas sus raices, cuando estas son reales, ya sean positivas, ya negativas, empleando únicamente los procedimientos mas elementales de la Aritmética,* hasta el punto de poderse resolver por los discípulos de las Escuelas, como en efecto ya se ha verificado por los de las Escuelas normales establecidas para propagar mi nuevo método de leer, contenido en la *Teoria de la Lectura*, y su exposicion la verificaré en los §§ 197 a, 197 b, etc.

Al revisar las pruebas de este párrafo en la tercera edicion lle-

gó á mis manos el *Tratado Elemental de Álgebra*, publicado en París, año de 1832, por *Mayer*, antiguo discípulo de la Escuela Politécnica, y *Choquet*, antiguo repetidor en la Escuela de Artillería de la Flèche, Profesor de Matemáticas. Sus autores toman en consideracion hasta los trabajos mas recientes de Mr. *Sturm*, y los de Mr. *Fourrier*, en una obra publicada despues de su muerte por los cuidados de Mr. *Navier*. Recapitulan, modifican y aclaran cuanto relativo á las ecuaciones han hecho *Descartes*, *Newton* y *Lagrange*; y en prueba de quedar en pie todas las dificultades que ofrecen los métodos conocidos hasta el dia, copiaremos aqui lo que dicen página 291 y es como sigue:

”El problema general de la resolucion de las ecuaciones consiste en hallar para todas las ecuaciones de un mismo grado, las expresiones de todas las raices en funcion de los coeficientes, designados generalmente por letras.

”Este problema ha sido largo tiempo el objeto de los trabajos de los Geómetras: pero no se ha podido hasta ahora llegar á resolverle sinó para las ecuaciones, que no pasan del cuarto grado. Todos los esfuerzos de los Analistas han encallado delante de la ecuacion general del quinto grado.

”Hay mas: aunque se lleguen á representar con bastante facilidad por fórmulas generales, las raices de las ecuaciones del tercer grado, estas fórmulas son insuficientes para hacer conocer los valores numéricos de las raices cuando todas son reales.

”Así, está uno autorizado para creer, que aun cuando se llegase á las fórmulas de las raices de las ecuaciones del quinto grado y de los grados superiores, ellas no serían, en un gran número de casos, de ninguna utilidad para el cálculo de las raices, cuando los coeficientes fuesen dados en números.

”Ha sido pues, necesario, hallar métodos, por los cuales se pudiese obtener, sea exactamente, sea de una manera aproximada, cada una de las raices de una ecuacion numérica. Pero aunque estos métodos no se aplican sinó á ecuaciones, en las cuales los coeficientes son números, están sin embargo fundados sobre propiedades, cuya demostracion es independiente de los valores de los coeficientes y aun del grado de la ecuacion.”

Y pasa á establecer estas propiedades, haciendo uso de todas las riquezas del cálculo, sin excluir los conocimientos de las funciones analíticas y demas partes sublimes de las Matemáticas.

## De las razones y proporciones.

171 Se llama *razon* la comparacion de dos cantidades; la cantidad que se compara se llama *antecedente*; aquella con que se compara, *consecuente*; los dos juntos se llaman *términos de la razon*; y lo que resulta se llama *esponente de la razon* ó simplemente *razon*. Si el antecedente es igual al consecuente se llama *razon de igualdad*; si el antecedente es mayor que el consecuente, se llama *de mayor desigualdad*; y si menor, *de menor desigualdad*.

Con dos miras diferentes se pueden comparar dos cantidades: ó para averiguar la diferencia que hay entre ellas, que se llama *razon aritmética*, ó para averiguar las veces que la una contiene á la otra, que se llama *razon geométrica*.

La razon aritmética se señala poniendo el antecedente, despues un punto, y luego el consecuente; la geométrica poniendo dos puntos entre el antecedente y el consecuente. V. g. la razon aritmética entre 7 y 3, se escribe 7.3 y se lee 7 es aritméticamente á 3; la razon geométrica entre 12 y 4 se señala 12:4, y se lee 12 es geométricamente á 4; ó por ser estas razones las que ocurren con mas frecuencia, se leen omitiendo la palabra *geométricamente* de este modo 12 es á 4.

Para encontrar la razon aritmética se resta el consecuente del antecedente; v. g. la de 7 á 3 será  $7-3=4$ . Para hallar la geométrica se divide el antecedente por el consecuente; v. g. la de 12 á 4 será  $12:4$  ó  $\frac{12}{4}=3$ . Donde observamos que aunque con distinto lenguaje, volvemos á las operaciones de restar y dividir; y que en este caso, el punto, puesto entre los términos de la razon aritmética, equivale al signo — de la operacion de restar.

Cor. De esto y de lo dicho (61..2<sup>o</sup> y 4<sup>o</sup>) se sigue: que á una razon aritmética le sucede lo mismo que al antecedente, y lo contrario que al consecuente; y por lo mismo si se tienen dos razones con un mismo antecedente, aquella será mayor que tenga menor consecuente, y viceversa; y si tienen un mismo consecuente, aquella será mayor ó menor, que

tenga mayor ó menor antecedente; y una razon aritmética no se altera aunque á sus dos términos se les añada ó quite una misma cantidad. A la geométrica le sucede lo mismo; y no se alterará aun cuando se multipliquen ó partan sus dos términos por una misma cantidad.

172 Cuando de dos razones de una misma especie, la una tiene por antecedente lo que la otra por consecuente, se dice que la una es *inversa* de la otra; así 3.7 es inversa de la 7.3; y en efecto se tiene  $3-7=-4$ , que es lo contrario de  $7-3=4$ .

Tambien 4:12 es razon geométrica inversa de la 12:4 pues  $4:12=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ , es lo contrario de  $12:4=\frac{12}{4}=3=\frac{3}{1}$ .

*Esc.* Los antiguos, desde el tiempo de *Euclides*, daban diversos nombres á las razones y proporciones, segun era el esponente de la razon; ya no están en uso, por ser mas fácil y claro distinguir las por el mismo esponente. A la razon de 3:2, cuyo esponente es  $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$  la llamaban *sesquíaltera*; y los Químicos modernos han juzgado conveniente restablecer la palabra *sesqui* para nombrar las sustancias, cuyas partes componentes se hallan en la razon de 3 á 2. Así es, que llaman, por ejemplo, *sesquifosfato de cal* á una sustancia que contiene  $1\frac{1}{2}$  de ácido fosfórico respecto del ácido que contiene el fosfato de cal tomado por unidad.

173 *Proporcion* es la igualdad de dos razones de una misma especie; así, proporcion aritmética es la igualdad de dos razones aritméticas; y proporcion geométrica la igualdad de dos razones geométricas.

Para escribir una proporcion aritmética se pone una razon á continuacion de otra, separándolas con dos puntos; y para escribir una geométrica se ponen cuatro puntos entre las dos razones. Para leerlas, se lee cada razon separadamente, y cuando se llega á los dos puntos en la aritmética ó á los cuatro en la geométrica, se lee *como*. En toda proporcion entran cuatro términos, de los cuales el primero y tercero se llaman *antecedentes*, y el segundo y cuarto *consecuentes*; el primero y cuarto *estremos*, y el segundo y tercero *medios*.

174 Para escribir proporciones aritméticas con facilidad, se pondrán dos cantidades cualesquiera, separadas

entre sí con un punto, para que formen la primera razon; despues se pondrán dos puntos, y luego á las dos cantidades primitivas se les añadirá (ó quitará) una misma cantidad; y se pondrán estos dos números despues de los dos puntos, separados entre sí con un punto, los cuales formarán la segunda razon; pues en este caso las dos razones son iguales (171 cor.).

Para formar una proporcion geométrica, se escribirán dos cantidades cualesquiera, separadas con dos puntos para que formen la primera razon; luego, se pondrán los cuatro puntos, y despues por segunda razon lo que resulte de multiplicar (ó dividir) por una misma cantidad los dos términos de la primera; porque en este caso tambien serán iguales las dos razones (171 cor.).

Así, si quiero escribir una proporcion aritmética, pondré dos cantidades cualesquiera 7 y 5, separadas con un punto; luego pondré los dos puntos, y añadiré á las anteriores una misma cantidad, v. g. 6, y tendré 7.5:13.11, que leería diciendo: 7 es aritméticamente á 5 como 13 á 11.

Si quiero escribir una proporcion geométrica, escribiré dos cantidades cualesquiera v. g. 8 y 5, para que formen la primera razon; despues de puestos los cuatro puntos, multiplicaré ambas cantidades por otra cualquiera; tal como 3, y tendré la proporcion 8:5::24:15; que leeré diciendo: 8 es á 5 como 24 á 15.

175 Cuando los medios de una proporcion son diferentes, como en las anteriores, las proporciones se llaman *discretas*; y cuando son iguales los medios, la proporcion se llama *continua*. Así, para formar una proporcion continua aritmética, se pondrá por tercer término el segundo, y para poner el cuarto se añadirá al tercero lo que el segundo llevaba al primero (ó se le quitará lo que el primero llevaba al segundo); v. g. para escribir una proporcion aritmética continua, pondré por primera razon cualquiera 5.9; despues del 9 pondré los dos puntos, luego el mismo 9; y despues de un punto, lo que resulta de añadir 4 al 9, y tendré la proporcion 5.9:9.13.

La proporcion aritmética continua se escribe de un modo abreviado, poniendo ántes este signo  $\div$ , despues

el primer término, luego el medio, y despues el otro extremo separándolos con un punto; de manera que la anterior se escribe  $\div 5.9.13$ .

Donde el signo  $\div$  puesto ántes, da á conocer que se ha de repetir el segundo término, y se lee: *5 es arítmicamente á 9 es á 13.*

Para formar una proporcion geométrica continua, se escribirá un número cualquiera, despues se pondrá por segundo término y por tercero un múltiplo cualquiera de este número; y luego para el cuarto se toma el mismo múltiplo del múltiplo anterior. V. g. pondré primero un número cualquiera 5, despues un múltiplo cualquiera de este, tal como 15, y este será el que represente los medios; para hallar el otro extremo, tomaré el mismo múltiplo de 15, esto es, el triplo, y tendré  $5:15::15:45$  ó  $\div 5:15:45$ .

Donde el signo  $\div$  puesto ántes, indica que se ha de repetir el 2.º término, y se lee, *5 es á 15 es á 45.*

176 *En toda proporcion aritmética discreta la suma de los extremos es igual á la de los medios; y al duplo del término medio en la continua.*

*Espl.* Sean las proporciones  $10.7:17.14$ ,  $\div 8.11.14$ ; digo que en la primera será  $10+14=7+17$ , y en la segunda  $8+14=2 \times 11$ .

*Dem.* 1.º Como proporcion es igualdad de razones, la primera dará  $10-7=17-14$ ; y trasladando (147 cor.) las cantidades negativas al miembro opuesto del en que se hallan, será  $10+14=17+7$ , que era L. 1.º Q. D. D.

2.º La segunda proporcion puesta con estension, será  $8.11:11.14$ ; que da  $8-11=11-14$ ; y trasladando como ántes, será  $8+14=11+11=2 \times 11$ , que era L. 2.º Q. D. D.

*Esc.* Sean en general las dos proporciones  $a.b:c.d$  y  $\div a.b:c$ ; y discurriendo del mismo modo que ántes, dará la primera  $a-b=c-d$ , y trasladando (147 cor.) será  $a+d=c+b$  (A).

La segunda nos dará  $a-b=b-c$ , y trasladando será  $a+c=b+b=2b$  (B),

que manifiestan la proposicion con toda generalidad.

177 Si en la ecuacion (A)  $a+d=b+c$ , despejamos la  $d$ , se tendrá  $d=b+c-a$ ; que quiere decir: que

dados los tres primeros términos  $a, b, c$ , de una proporción, se hallará el cuarto  $d$  sumando el segundo con el tercero, y restando de esta suma el primero. Así, dados los tres términos 9, 25 y 32, para hallar el cuarto, que llamaré  $x$ , haré  $x=25+32-9=48$ , cuya operación y proporción se practican de este modo:

$$9:25:32.x=25+32-9=48.$$

Esc. Despejando las demas letras, se tendrá

$$a=b+c-d, \quad b=a+d-c, \quad c=a+d-b,$$

y cada una dará una regla para hallar el primero, el segundo, el tercero términos, cuando se necesiten.

178 Si en la ecuación (B)  $a+c=2b$ , despejamos la  $c$ , dará  $c=2b-a$ ; que quiere decir, que cuando se quiere encontrar un tercer término continuo proporcional aritmético á dos cantidades dadas, del duplo de la segunda se restará la primera. Así, si quiero hallar un tercero proporcional á 26 y 34, espresándole por  $x$ , será  $x=2 \times 34 - 26 = 42$ , que se ejecuta como aquí se ve:

$$\div 26.34.x = 2 \times 34 - 26 = 42.$$

Si en la misma ecuación despejamos la  $b$ , dará  $b=\frac{1}{2}(a+c)$ , que quiere decir, que si dadas dos cantidades se quiere hallar una media proporcional aritmética, de la suma de dichas cantidades se tomará la mitad (\*). Así, si quiero hallar un medio proporcional entre 27 y 39, llamándole  $x$ , se tendrá  $x=\frac{1}{2}(27+39)=33$ ; y la proporción será  $\div 27.33.39$ .

179 En toda proporción geométrica discreta el producto de los extremos es igual al de los medios; y al cuadrado del término medio en la continua.

Espl. Sean las proporciones  $8:3::24:9$ ,  $\div 6:18:54$ ; voy á demostrar que  $8 \times 9 = 3 \times 24$ , y que  $6 \times 54 = 18^2$ ; ó

(\*) Mr. Bourdon, en la pág. 155 de la undécima edición de su *Aritmética* llama *medio diferencial*, á lo que se ha conocido hasta aquí con la denominación de *medio proporcional aritmético*. Esta mutación no me parece que por ningún título es admisible; pues la palabra *diferencial* tiene en la parte sublime de las Matemáticas una acepción que dista mucho de la que aquí se la quiere dar. En hora buena, que sustituya la palabra *equidiferencia* á la de *proporción aritmética* que se ha usado hasta aquí; pero la de *medio diferencial* podría inducir á equivocaciones. Usa de la misma espresión en la pág. 528, y en mi concepto repito que no es admisible en *Aritmética* introducir semejante locución.

en general, si  $a:b::c:d$ , y  $\div:a:b:c$ , será  $ad=bc$ , y  $ac=b^2$ .

*Dem.* Como proporcion es igualdad de razones, la primera dará  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , y trasladando los divisores

(150 cor.), será  $ad=bc$  (C);  
que era L. 1.º Q. D. D.

2º La segunda proporcion, puesta con estension, será  $a:b::b:c$ ; que da  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ , y quitando los divisores,

será  $ac=bb=b^2$  (D).

180 Recíprocamente, si cuatro cantidades son tales, que el producto de dos de ellas sea igual al producto de las otras dos, con dichas cantidades se podrán formar ocho proporciones diferentes, poniendo por extremos las dos que formen un producto, y por medios las dos que formen el otro producto.

*Espl.* Sean  $a, b, c, d$ , tales cantidades que  $ad=bc$ ; voy á demostrar que se pueden sacar las ocho proporciones siguientes (E).

*Dem.* Si en la ecuacion  $ad=bc$ , trasladamos (150 cor.) la  $d$  y la  $b$  al otro miembro de donde se hallan, se tendrá  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , que puesta en proporcion dará  $a:b::c:d$  (1ª)

$a:c::b:d$  (2ª)  
 $d:b::c:a$  (3ª)  
 $d:c::b:a$  (4ª)  
 $c:d::a:b$  (5ª)  
 $c:a::d:b$  (6ª)  
 $b:a::d:c$  (7ª)  
 $b:d::a:c$  (8ª)

$a:b::c:d$  (1ª).

Si en la misma ecuacion trasladamos la  $d$  y la  $c$ , será  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ , que da  $a:c::b:d$  (2ª).

Si trasladamos la  $a$  y la  $b$ , resultará  $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ , que da  $d:b::c:a$  (3ª).

Si trasladamos la  $a$  y la  $c$ , será  $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ , que da  $d:c::b:a$  (4ª).

Como es lo mismo  $ad=bc$  que  $bc=ad$ , trasladando en esta la  $b$  y la  $d$ , será  $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$  que da  $c:d::a:b$  (5ª).

Trasladando la  $b$  y la  $a$ , será  $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ , que da  $c:a::d:b$  ( $6^a$ ).

Trasladando la  $c$  y la  $a$ , será  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ , que da  $b:a::d:c$  ( $7^a$ ).

Y trasladando la  $c$  y la  $d$ , será  $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$ , que da  $b:d::a:c$  ( $8^a$ ), que era L. Q. D. D.

*Esc.* Si se quisiesen sacar mas proporciones, saldría alguna de las anteriores; de donde se sigue que *dada una ecuacion se pueden sacar ocho proporciones; ó dada una proporcion se le pueden dar ocho formas diferentes.*

181 Si en la ecuacion (C)  $ad=bc$ , despejamos la  $d$ , se tendrá  $d = \frac{bc}{a}$ ; que quiere decir, que *dadas tres cantidades, se hallará una cuarta proporcional geométrica, multiplicando la segunda por la tercera, y partiendo el producto por la primera.* Así, si quiero hallar un cuarto proporcional á los números 9, 14 y 27, llamándole  $x$ ,

tendré  $x = \frac{14 \times 27}{9} = 42$ ; cuya operacion se dispone como aquí se ve,  $9:14::27:x = \frac{14 \times 27}{9} = \frac{378}{9} = 42$ .

*Esc.* Despejando los términos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , se tendrá  $a = \frac{bc}{d}$ ,  $b = \frac{ad}{c}$ ,  $c = \frac{ad}{b}$ ; y cada una dará la regla para hallar el primero, el segundo, ó el tercer término, cuando se necesiten.

182 Si en la ecuacion (D)  $ac=b^2$ , despejamos la  $c$ , dará  $c = \frac{b^2}{a}$ ; que quiere decir, que *para hallar un tercer término continuo proporcional geométrico á dos cantidades dadas, el cuadrado de la segunda se partirá por la primera.* Así, si quiero hallar un tercero proporcional á 16 y 24,

llamándole  $x$ , será  $x = \frac{24^2}{16} = \frac{576}{16} = 36$ , que se practica como aquí se ve:  $\div: 16: 24: x = \frac{24^2}{16} = \frac{576}{16} = 36$ .

Si en la misma ecuacion despejamos la  $b$ , será  $b = \sqrt{ac}$ ; que quiere decir, que si dadas dos cantidades se quiere hallar una media proporcional geométrica, del producto de dichas cantidades se estraerá la raiz cuadrada. Así, si quiero hallar un medio proporcional entre 8 y 18, llamándole  $x$ , será  $x = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144} = 12$ ; y la proporcion será  $\div: 8: 12: 18$ .

*Esc.* Es digna de notarse la analogía que hay entre las propiedades de las proporciones aritméticas y geométricas; pues las de aquellas se convierten en las de esta substituyendo *multiplicar* á la voz *sumar*; *dividir* á la *restar*; *cuadrar* á *tomar el duplo*, y *estraer la raiz cuadrada* á *tomar la mitad*.

*De las trasformaciones que se pueden dar á una proporcion, sin que deje de subsistir proporcion.*

183 Hemos visto (180) que á la proporcion  $a:b::c:d$ , se la pueden dar ocho formas diferentes, y que siempre hay proporcion. Estas y otras varias que vamos á esponer, se llaman *alternar*, *invertir*, *componer*, *dividir*, *permutar* y *convertir*.

*Alternar* es *comparar antecedente con antecedente*, y *consecuente con consecuente*, cuya operacion queda hecha mudando de lugar los medios ó los extremos. Así, la segunda y tercera (180) están alternadas respecto de la primera.

*Invertir* es *comparar consecuente con antecedente en cada una de las razones*; cuya operacion queda hecha poniendo los medios en lugar de los extremos, y los extremos en lugar de los medios. Así, la (7.<sup>a</sup>) está invertida respecto de la primera.

Ahora, si se continúa alternando é invirtiendo la primera, se llegarán á tener las ocho que hemos dicho.

Toda proporción se puede *componer*, que es *comparar la suma de antecedente y consecuente con uno de los dos, en cada una de las razones*, esto es, ó con el antecedente ó con el consecuente.

Sea la proporción  $a:b::c:d$ ; digo que  $a+b:b::c+d:d$  y  $a+b:a::c+d:c$ .

*Dem.* La proporción  $a:b::c:d$ , da  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ; añadiendo 1 á ambos miembros, será  $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ ; reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, se tendrá  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ; que poniendo en proporción da  $a+b:b::c+d:d$  (F), que era L. Q. D. D.

Invirtiendo la proporción dada, se tendrá  $b:a::d:c$ , que da  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ; añadiendo 1, tendríamos  $\frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1$ ; reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, da  $\frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c}$ , ó  $b+a:a::d+c:c$  (G),

que era L. 2.º Q. D. D.

Toda proporción se puede *dividir*, que es *comparar la diferencia de antecedente y consecuente con uno de los dos, en cada una de las razones*; esto es, ó bien con el antecedente ó bien con el consecuente.

Sea la proporción  $a:b::c:d$ ; digo que  $a-b:b::c-d:d$ , y que  $a-b:a::c-d:c$ .

*Dem.* La proporción  $a:b::c:d$ , da  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ; quitando 1 de ambos miembros, será  $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ ; reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, dará  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ , ó formando proporción  $a-b:b::c-d:d$  (H); que era L. 1.º Q. D. D.

Invirtiendo la dada, se tendrá  $b:a::d:e$ , que da  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ; quitando ambos miembros de la unidad,

ó restando esta ecuacion de la  $1=1$ , resultará

$$1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{d}{c} \quad \text{ó} \quad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c},$$

ó poniendo en proporcion,  $a-b:a::c-d:c$  (I); que era L. 2.º Q. D. D.

Permutar es *mudar de lugar las razones, ó poner la segunda razon por primera, y la primera por segunda*. Así, la quinta está permutada respecto de la primera (§ 180).

Convertir es *invertir una proporcion compuesta ó dividida*; cuando se invierte una compuesta, se llama *convertir componiendo*; y cuando una dividida, *convertir dividiendo*.

Así, invirtiendo la (F) y la (G), tendremos  $b:a+b::d:c+d$  (K) y  $a:a+b::c:c+d$  (L), que respecto de la primitiva están convertidas componiendo; é invirtiendo las (H) é (I) se tendrá

$b:a-b::d:c-d$  (M) y  $a:a-b::c:c-d$  (N), que respecto de la primitiva están convertidas dividiendo.

184 Ahora vamos á demostrar algunas propiedades de las proporciones.

1.ª *Si los antecedentes de una proporcion son iguales, tambien lo serán los consecuentes, y reciprocamente.*

*Dem.* La proporcion  $a:b::c:d$ , da  $ad=bc$ ; si se supone  $a=c$ , se podrán suprimir, y quedará  $d=b$ ; y suponiendo  $d=b$ , quedaría  $a=c$ , que es L. Q. D. D.

2.ª *Si dos proporciones tienen una razon comun, con las otras dos razones se podrá formar proporcion.*

*Expl.* Sean las dos proporciones  $a:b::c:d$ , y  $a:b::m:n$ , que tienen comun la razon  $a:b$ ; digo que se tendrá  $c:d::m:n$ .

*Dem.* Igualando las razones en cada proporcion, se tendrá  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , y  $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ ; y como  $\frac{c}{d}$  y  $\frac{m}{n}$

son ambas iguales con  $\frac{a}{b}$ , serán (intr. ax. 5.º) iguales entre sí, esto es,  $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ ; que formando

proporción, tendremos  $c:d::m:n$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* De aquí se deduce que si dos proporciones tienen unos mismos antecedentes ó unos mismos consecuentes, se podrá formar proporción con los consecuentes ó antecedentes; porque alternadas tendrían una razón común.

3.<sup>a</sup> En toda proporción geométrica la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

*Expl.* Sea la proporción  $a:b::c:d$ ; voy á demostrar que  $a+c:b+d::a:b$  ó  $a+c:b+d::c:d$ .

*Dem.* Alternando la dada será  $a:c::b:d$ ; y componiendo esta, dará  $a+c:c::b+d:d$ , ó  $a+c:a::b+d:b$ , que alternadas serán

$a+c:b+d::c:d$  (O), y  $a+c:b+d::a:b$  (P), que es L. Q. D. D.

4.<sup>a</sup> En toda proporción geométrica la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

*Expl.* Sea la proporción  $a:b::c:d$ ; voy á demostrar que  $a-c:b-d::c:d$ , ó  $a-c:b-d::a:b$ .

*Dem.* Alternando la dada será  $a:c::b:d$ ; y dividiendo esta se tendrá  $a-c:c::b-d:d$  ó  $a-c:a::b-d:b$ ; que alternadas dan

$a-c:b-d::c:d$  (Q), y  $a-c:b-d::a:b$  (R), que es L. Q. D. D.

5.<sup>a</sup> En toda proporción geométrica la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes.

*Dem.* Si de las proporciones (O) y (Q), que tienen común la razón  $c:d$ , sacamos la

$a+c:b+d::a-c:b-d$  (S), tendremos L. Q. D. D.

6.<sup>a</sup> En toda proporción geométrica la suma de antecedentes es á su diferencia, como la suma de consecuentes es á su diferencia.

*Dem.* Porque si alternamos la proporción anterior, tendremos  
 $a+c:a-c::b+d:b-d$  (T),  
 que espresa L. Q. D. D.

*Esc.* Comparando la proporción (T) con la primitiva alternada, que es  $a:c::b:d$ , nos dice, que la suma de los dos primeros términos de una proporción es á su diferencia, como la suma de los dos últimos es á la suya; á cuyo modo de comparar le llama Leslie *mixing*; esto es, *comparar mezclando*.

*Cor.* De todo esto resulta, que dando la primitiva ocho formas, la (F) otras ocho, la (G) otras ocho, la (H) otras ocho, la (I) otras ocho, la (O) otras ocho, la (P) otras ocho, la (Q) otras ocho, la (R) otras ocho, y la (S) otras ocho; se sigue que alternando é invirtiendo la primitiva, y las que resultan de ella, se pueden sacar ochenta proporciones de una dada.

185 Es tan importante la regla dada (174), que por su medio no sólo se pueden formar inmediatamente proporciones, sinó que dada una razón, se pueden poner otra multitud iguales con ella, multiplicando sus dos términos por 2, por 3, etc. Así, dada la razón 2:3, obtendremos

$2:3::4:6::6:9::8:12::10:15::12:18::14:21::etc.$   
 que es lo que se llama *serie de razones iguales*, y se suelen escribir abreviadamente de este modo:

$2:4:6:8:10:12:14:etc.:3:6:9:12:15:18:21:etc.$

Cuando se quiera sacar de ella una proporción, se tomarán dos términos cualesquiera ántes de los cuatro puntos; y otros dos cualesquiera equidistantes despues. Sus propiedades son las siguientes.

1.<sup>a</sup> *En toda serie de razones iguales la suma de todos los antecedentes es á la de todos los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

*Dem.* Sea esta la série de razones iguales

$a:b::c:d::m:n::etc.:etc.;$

y tomando las dos primeras tendremos  $a:b::c:d$ ; que (184, 3.<sup>a</sup>) nos dará  $a+c:b+d::c:d$ , ó poniendo en vez de la razón  $c:d$  su igual  $m:n$  por el supuesto, será

$a+c:b+d::m:n;$

que por la misma propiedad da  $a+c+m:b+d+n::m:n$  (a), que es L. Q. D. D.

*Esc.* Si hubiese mas razones iguales, en vez de la última  $m:n$ , se sustituiría otra, y se continuaría del mismo modo hasta que no hubiese mas.

2<sup>a</sup> *En toda serie de razones iguales la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

*Dem.* Supongamos la misma serie  $a:b::c:d::m:n::etc.$  y tomando las dos primeras será  $a:b::c:d$ ; la cual (184, 4<sup>a</sup>) nos dará  $a-c:b-d::c:d$ ; ó poniendo en vez de  $c:d$  su igual  $m:n$ , será  $a-c:b-d::m:n$ ; que en virtud de la misma propiedad nos da

$$a-c-m:b-d-n::m:n \text{ (b), que es L. Q. D. D.}$$

3<sup>a</sup> *En toda serie de razones iguales la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes.*

*Dem.* Como las dos proporciones (a), (b), tienen comun la razon  $m:n$ , con las otras dos formaremos proporción (184, 2<sup>a</sup>), y tendremos

$$a+c+m:b+d+n::a-c-m:b-d-n \text{ (c). L. Q. D. D.}$$

4<sup>a</sup> *En toda serie de razones iguales la suma de antecedentes es á su diferencia, como la suma de consecuentes es á la suya.*

*Dem.* Porque si alternamos la proporción anterior tendremos  $a+c+m:a-c-m::b+d+n:b-d-n$  (d), que espresa L. Q. D. D.

5<sup>a</sup> *En toda serie de razones iguales la relacion que tenga un antecedente con la suma de los otros, esa misma tendrá el consecuente correspondiente con la suma de los demas.*

*Dem.* Sea la serie de razones iguales

$$a:b::c:d::m:n::p:q::etc.:etc.$$

Si consideramos que empieza desde la segunda razon, tendremos (1<sup>a</sup>)  $c+m+p+etc.:d+n+q+etc.::c:d$ ; pero si en vez de  $c:d$  ponemos su igual  $a:b$ , resultará

$$c+m+p+etc.:d+n+q+etc.::a:b;$$

la cual permutada y alternada se convierte en

$$a:c+m+p+etc.::b:d+n+q+etc. \text{ (e),}$$

que espresa L. Q. D. D.

*Cor.* De aquí resulta, que si el primer antecedente es igual con la suma de los demas, el primer consecuente tambien será igual con la suma de los demas consecuentes; por-

que si en la última proporción suponemos  $a=c+m+p+etc.$ , la primera razon será de igualdad, y debiéndolo ser la segunda, será  $b=d+n+q+etc.$

186 Se llama *razon compuesta* la que resulta de multiplicar ordenadamente (esto es antecedente por antecedente, y consecuente por consecuente) dos ó mas razones. Así, si las dos razones 3:5 y 4:7, las multiplicamos ordenadamente, tendrémos 12:35, que será la razon compuesta de aquellas dos; las tres razones 4:5; 6:11; 9:13, dan la compuesta  $4 \times 6 \times 9 : 5 \times 11 \times 13$  ó 216:715; etc.

Si la razon compuesta resulta de dos razones iguales, se llama *duplicada ó cuadrada*; así, si se tienen las dos razones iguales 6:8 y 3:4, la  $6 \times 3 : 8 \times 4$  ó 18:32, será duplicada ó cuadrada de la 6:8 ó 3:4.

Si se multiplican tres razones iguales, v. g. 3:5; 6:10; y 9:15, la compuesta  $3 \times 6 \times 9 : 5 \times 10 \times 15$  ó 162:750, se llama *triplicada ó cúbica*; y así sucesivamente *cuadruplicada etc.*

Haciendo la multiplicacion como hemos dicho, se sigue que formar razones compuestas es lo mismo que multiplicar quebrados; pues toda razon es un quebrado cuyo numerador es el antecedente y el denominador el consecuente. Así, cuando las razones son iguales, equivale á formar potencias de los mismos quebrados; y hé aquí la razon de llamarse *cuadradas ó duplicadas, cúbicas ó triplicadas etc.* De que se sigue, que no es lo mismo razon *dupla* que *duplicada*; una razon es dupla de otra, cuando su esponente es duplo del de ella, duplicada cuando es su cuadrado, etc. etc.

187 Es muy importante el simplificar las razones y proporciones, para poder ejecutar con espedicion los cálculos de sus continuas aplicaciones. Así, en cuanto se dé una razon, se verá si se puede simplificar, dividiendo sus dos términos por 2, por 3 etc. lo que no la altera (171 cor.); por lo que en vez de la razon 6:12 se podrá poner 3:6 ó 1:2; en vez de 12:18 se pondría 6:9 ó 2:3 etc.

188 Si la primera razon de una proporción no se puede simplificar, ó se ha simplificado ya, se verá si se pueden dividir los dos antecedentes por un mismo número, lo que tampoco alterará la proporción; pues si se alternase,

se podría ya simplificar la primera razon. Así, si tengo la proporcion (A) cuyo cuarto término  $x$  quiero buscar, simplificaré la primera razon por 4, y tendré la segunda que aquí se ve:

(A)  
 ahora dividiré por 3 los antecedentes, y  $12:8::36:x$   
 tendré la tercera; que da para el cuarto  $3:2::36:x$   
 término  $x=24$ , que es lo mismo que  $1:2::12:x=24$

$x = \frac{8 \times 36}{12} = \frac{288}{12} = 24$ , pero mucho mas sencillo.

189 Al formar razones compuestas, puede ocurrir el que no pudiéndose simplificar las que se dan, se puedan simplificar las compuestas; porque algunos factores de los antecedentes de las unas lo sean tambien de los consecuentes de las otras; y al contrario.

En este caso; en lugar de simplificar la compuesta despues de formada, se indica la operacion resolviendo en factores simples los términos de las componentes, y suprimiendo los que sean comunes. Así, si tengo las razones  $3:5$ ;  $4:9$ ;  $10:21$ , que dan la compuesta  $120:945$ , ó simplificando  $40:315$  ú  $8:63$ ; formaré la compuesta de este modo:

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 : 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7,$$

que suprimiendo los factores comunes 3 y 5 queda en  $2 \times 2 \times 2 : 3 \times 3 \times 7$  ú  $8:63$ , que es la misma que ántes.

Como al formar una razon compuesta, se puede poner en lugar de cualquier razon simple, otra que sea igual con ella, se sigue que despues de formada, se podrá hacer igualmente esta sustitucion, poniendo el antecedente en vez del antecedente y el consecuente en vez del consecuente. Así, cuando voy á formar la razon compuesta de las  $3:5$  y  $6:7$ , en vez de esta podré poner su igual  $12:14$  ó  $18:21$ ; y en vez de la compuesta  $3 \times 6:5 \times 7$ , tendré  $3 \times 12:5 \times 14$  ó  $3 \times 18:5 \times 21$ ; luego inversamente, si tengo la razon compuesta  $3 \times 18:5 \times 21$ , en vez de la componente  $18:21$  podré poner cualquiera de sus iguales  $12:14$ , ó  $6:7$ ; y la tendré convertida en  $3 \times 12:5 \times 14$ , ó  $3 \times 6:5 \times 7$ . Esta proposicion es de la mayor importancia, y los principiantes suelen encontrar

muchas dificultades en ella, cuando no se presenta con toda esta especificacion.

190 Si dos ó mas proporciones se multiplican ordenadamente, el resultado será una proporcion compuesta. Porque siendo las razones componentes de la primera razon compuesta, iguales (por la naturaleza de las proporciones) con las componentes de

la segunda, las razones compuestas serán iguales y formarán proporcion.

Así, si tenemos las proporciones (a),  
(b), multiplicadas darán la compuesta (c).

$$4:5::8:10 \text{ (a)}$$

$$6:11::18:33 \text{ (b)}$$

---


$$24:55::144:330 \text{ (c)}$$

Luego, multiplicando ordenadamente una proporcion por sí misma, el resultado formará proporcion; de donde resulta, que si cuatro cantidades están en proporcion, tambien lo estarán sus cuadrados, sus cubos, y en general las potencias de un mismo grado; y al contrario, si cuatro cantidades están en proporcion, tambien lo estarán sus raíces de un mismo grado.

En efecto, la proporcion  $a:b::c:d$  da  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ; y elevando á la potencia  $n$  resultará  $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$ ; y formando proporcion será  $a^n:b^n::c^n:d^n$ , que es L. 1<sup>o</sup> Q. D. D.

La misma proporcion  $a:b::c:d$ , da  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ; y extrayendo la raíz del grado  $n$  será

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}} \quad \text{ó} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$$

que da  $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$ , que es L. 2<sup>o</sup> Q. D. D.

191 Al formar proporciones compuestas, convendrá simplificar las razones al tiempo de sacarlas; pero particularmente conviene tener presente, que si dos razones son tales que en la una es antecedente lo que en la otra es consecuente, se omite el término comun, y se ponen los

otros. Así, si tenemos  $\left\{ \begin{array}{l} P:Q::a:b \\ Q:R::c:d \end{array} \right\}$  se verificará  $P:R::ac:bd$ ;

porque, si se hiciera con estension, sería  $PQ:QR::ac:bd$ ; y simplificando la primera razon por  $Q$ , resultaría por último  $P:R::ac:bd$ .

*De la regla de tres y de compañía.*

---

192 Se llama *regla de tres ó regla de oro*, la que enseña á determinar los efectos por medio de las causas, ó las causas por medio de los efectos, cuando se conoce la dependencia que tienen entre sí.

La regla de tres puede ser *simple y compuesta*; es simple, cuando para determinar el efecto ó causa que se busca, sólo se atiende á una circunstancia; y compuesta cuando se necesita atender á dos ó mas.

La regla de tres simple se subdivide en *directa é inversa*; directa es aquella en que se trata de averiguar el efecto que produce una causa, ó la causa de que proviene un efecto, cuando se conoce el efecto producido por una causa de la misma especie; y la inversa es aquella en que se trata de averiguar la causa que se necesita para producir, junta con otra dada, el mismo efecto que han producido ya otras dos causas de la misma especie. Para que se vea bien la diferencia que hay entre las reglas de tres, nos valdrémos de estos ejemplos.

1.º *Sé que 12 sastres han hecho en una semana 72 vestuarios, y quiero averiguar cuántos vestuarios podrán hacer 24 sastres en el mismo tiempo, esto es, en una semana:* esta es una regla de tres simple; porque el número de vestuarios que busco, sólo depende de una circunstancia, á saber, del número de sastres que los han de hacer; además es directa, porque trato de averiguar los vestuarios, esto es, el efecto que han de producir los 24 sastres, que son la causa, por medio del conocimiento que tengo del que han producido en las mismas circunstancias 12 sastres.

Tambien sería simple y directa la regla de tres, si viniése propuesta en estos términos: *12 sastres han hecho en una semana 72 vestuarios; para hacer en el mismo tiempo 144 vestuarios, ¿cuántos sastres se necesitarán?*

Porque aquí se trata de averiguar la causa, esto es, los sastres que se necesitan para hacer los 144 vestuarios, que son el efecto, por medio del efecto conocido 72 vestuarios que han hecho los 12 sastres.

2.º Si sabiendo que 12 sastres han hecho en tres dias 72 vestuarios, quiero averiguar cuántos sastres se necesitarán para hacer los mismos 72 vestuarios en 6 dias: esta regla de tres será inversa; porque aquí tengo un mismo efecto, 72 vestuarios, para cuya produccion han concurrido dos causas, á saber: los 12 sastres y los 3 dias que han trabajado; y ahora trato de determinar una de las causas, á saber, el número de sastres, que junta con la otra, es decir, con los 6 dias que han de trabajar, ha de producir el mismo efecto de hacer los 72 vestuarios.

3.º Si sabiendo que 12 sastres han hecho en 4 dias 72 vestuarios, quiero averiguar los vestuarios que harán 36 sastres en 6 dias: esta regla de tres será compuesta; porque el número de vestuarios que busco depende de dos circunstancias, á saber, de los 36 sastres, y de los 6 dias que han de estar trabajando.

193 Toda cuestion, que conduce á una regla de tres, consta de dos partes: del *supuesto* y la *pregunta*; en el supuesto se da la dependencia que tiene la causa con el efecto; y en la pregunta, la causa ó efecto que se da, para determinar el efecto ó causa que se busca.

En toda regla de tres simple entran tres cantidades conocidas: dos del supuesto, y una de la pregunta; como esta ha de ser de la misma especie que una de las del supuesto, á las dos cantidades conocidas, que son de una misma especie, se les llama *principales*; la otra y la que se busca, se llaman *relativas*; pero como de las relativas solo se conoce una, se llama cantidad principal y su relativa á las dos del supuesto, siendo la principal la que es de la misma especie que la de la pregunta. V. g. cuando quiero averiguar los vestuarios que harán 24 sastres en el supuesto de que 12 hayan hecho 72 vestuarios, las dos cantidades principales son los 12 sastres y los 24; las relativas son los 72 vestuarios y los que busco; y las que se llaman cantidad principal y su relativa son los 12 sastres y los 72 vestuarios, siendo la principal los 12 sastres,

que es la de la misma especie que la de la pregunta.

194 Toda la dificultad de la regla de tres consiste en plantearla; porque despues todo está reducido á encontrar el cuarto término de una proporcion geométrica. Por lo cual vamos á deducir reglas generales para su plantéo.

Si la regla de tres es directa, y se pide el efecto que producirá la causa  $c$  sujeta á las mismas condiciones en que la causa  $a$  ha producido el efecto  $b$ , como no conocemos este efecto, le llamaremos  $x$ ; y siendo  $b$  el efecto que ha producido  $a$ , el efecto producido por cada

unidad de  $a$  será (§ 58, 4.º)  $\frac{b}{a}$ ; y como la  $c$  ha de producir  $x$ , una unidad de  $c$  producirá  $\frac{x}{c}$ ;

ahora, por ser  $c$  y  $a$  de la misma especie, será igual el efecto que produzca cada una de sus unidades; luego se

tendrá  $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$ ; que formando proporcion, será

$$b:a::x:c \quad \text{ó} \quad a:b::c:x \quad \text{ó} \quad a:c::b:x.$$

Luego para plantear una regla de tres directa, se pondrá por primer término la cantidad principal del supuesto; luego, cualquiera de las otras dos, á saber, la relativa del supuesto ó la principal de la pregunta; despues la otra, y el cuarto término de la proporcion será lo que se busca; que, para encontrarle, se practicará lo dicho (181).

Entendido esto, resolvamos algunos ejemplos.

1.º Se sabe que 40 soldados han abierto en un tiempo cualquiera 160 varas de trinchera; para abrir 800 varas en el mismo tiempo, ¿cuántos soldados se necesitarán?

Aquí la cantidad principal y su relativa son 160 varas y 40 soldados, siendo la principal 160 varas; luego plantearémos la cuestion del modo siguiente:

$$160^{v.s} : 800^{v.s} :: 40^{sold.s} : x = \frac{40 \times 800}{160} = 200,$$

y saco que se necesitan poner á trabajar 200 hombres.

2.º Un sugeto deséa saber lo que le producirán 78437 reales que va á imponer en un fondo al 6 por 100. Aquí

la cantidad principal del supuesto es 100; porque la cuestion quiere decir que 100 reales le dan de rédito al año 6 reales; y así, la operacion se ejecutará como aquí se ve:

$$100:78437::6:x = \frac{78437 \times 6}{100} = \frac{470622}{100} = 4706,22 = 4706 \text{ rs. y } 7 \text{ mrs.}$$

195 Si la regla de tres es inversa, y se supone que las dos causas  $a$  y  $b$  han producido un efecto  $K$ ; y dada una causa  $c$  de la misma especie que  $a$ , se quiere averiguar otra causa  $x$  de la misma especie que  $b$ , que junta con la  $c$ , produzca el mismo efecto  $K$ ; discurrirémos de este modo. Si la causa  $a$  sola produjese el efecto  $K$ ,

una unidad de  $a$  produciría  $\frac{K}{a}$ ; ahora, este efecto debe ser tanto menor en cuanto la causa  $a$  sea ayudada de la  $b$ ; luego el efecto que produzca una unidad cuando obra tambien la causa  $b$ , será  $\frac{K}{ab}$ .

Por la misma razon, el efecto de una unidad de  $c$ , si obrase sola, sería  $\frac{K}{c}$ ; y obrando ademas la causa  $x$  que buscamos, debería ser  $\frac{K}{cx}$ ; y como  $a$  y  $c$  son de una misma especie, el efecto de cada una de sus unidades será igual, y se tendrá  $\frac{K}{ab} = \frac{K}{cx}$ , ó  $Kcx = Kab$ ,

y dividiendo por  $K$ , será  $cx = ab$ , queda  $c:a::b:x$  ó  $c:b::a:x$ ; que manifiesta, que la regla de tres inversa se plantéa escribiendo por primer término la cantidad principal de la pregunta, despues las dos del supuesto, y el cuarto término será lo que se pide; que se hallará por lo dicho (181).

Apliquemos esta regla á algunos ejemplos.

1º Un comerciante ha ganado en 5 meses 450 doblones con un capital de 6000 doblones; para ganar los mismos 450 doblones con un capital de 1800 doblones, ¿cuánto tiempo necesitará?

Aplicando la regla de tres inversa, se tendrá  $6000:450::1800:x$ , de donde  $x = \frac{450 \times 1800}{6000} = 135$  meses.

2º Un comerciante ha ganado en 5 meses 450 doblones con un capital de 6000 doblones; para ganar los mismos 450 doblones con un capital de 1800 doblones, ¿cuánto tiempo necesitará?

Aquí la cantidad principal y su relativa son 6000 doblones y 5 meses, y la principal de la pregunta es 1800 doblones; por lo que, ejecutando la operacion como aquí se vé:

$$1800 \text{ d.}^s : 6000 \text{ d.}^s :: 5 \text{ m.}^s : x = \frac{6000 \times 5}{1800} = \frac{60 \times 5}{18} = \frac{10 \times 5}{3} = \frac{50}{3} = 16 \frac{2}{3},$$

hallo que necesitará 16 meses y  $\frac{2}{3}$ , que equivalen á 16 meses y 20 dias.

2.<sup>o</sup> *Un General de trinchera tiene calculado que con poner 3000 hombres á trabajar, ya á la zapa, ya á la trinchera, podrá en 6 dias hacer todas las obras que necesita para llegar al camino cubierto; tiene aviso de su mayor General, que es indispensable tomar el camino cubierto dentro de 4 dias; ¿cuántos hombres necesitará poner á trabajar?*

Aquí la cantidad principal y su relativa son 6 dias y 3000 hombres, y la principal de la pregunta es 4 dias; por lo cual plantearé la cuestion en estos términos:

$$4 \text{ d.}^s : 6 \text{ d.}^s :: 3000 \text{ h.}^s : x = \frac{3000 \times 6}{4} = 1500 \times 3 = 4500 \text{ h.}^s$$

que son los que tendrá que poner á trabajar.

196 Para resolver una regla de tres compuesta, se halla primero el resultado que corresponde á la pregunta, atendiendo á una sola circunstancia; despues el que corresponde á este resultado hallado, considerándole como pregunta, atendiendo á otra circunstancia, despues el que corresponde á este resultado hallado, atendiendo á otra circunstancia; y así sucesivamente, como manifiestan estos ejemplos.

1.<sup>o</sup> Quiero averiguar los cahices de trigo que podrán traer 36 carros en 6 dias, en el supuesto de haber traído 12 carros en 4 dias 72 cahices. Primero averiguaré los cahices que traerán los 36 carros en 4 dias, lo que ejecutaré como aquí se vé:

$$12 \text{ carr.}^s : 36 \text{ carr.}^s :: 72 \text{ cah.}^s : x \text{ cah.}^s = \frac{72 \times 36}{12} = 72 \times 3 = 216;$$

y encuentro que traerán 216 cahices. Ahora, si en 4 dias

traen 36 carros 216 cahices, en 6 dias ¿cuántos traerán?  
Ejecutaré la operacion como aquí se vé:

$$4^{d.^s} : 6^{d.^s} :: 216 \text{ cahices} : x = \frac{216 \times 6}{4} = 54 \times 6 = 324,$$

y saco que traerán 324 cahices.

2.º *Se que 4 soldados en 5 dias, trabajando en cada dia 8 horas, han hecho 1200 fajinas; 6 soldados en 8 dias trabajando 6 horas al dia, ¿cuántas fajinas harán?*

Aquí tendré que hacer las tres reglas de tres simples siguientes:

$$4^s : 6^s :: 1200 \text{ faj.}^s : 1800 \text{ faj.}^s$$

$$5^d : 8^d :: 1800 \text{ faj.}^s : 2880 \text{ faj.}^s$$

$$8^h : 6^h :: 2880 \text{ faj.}^s : 2160 \text{ faj.}^s$$

y saco que harán 2160 fajinas.

197 Se llama *regla de compañía* la que enseña á determinar quanto corresponde de la ganancia ó pérdida á cada uno de muchos compañeros que han puesto su caudal en un fondo con arreglo á lo que puso cada uno. Esta, como se suele decir, es de dos modos: *simple* y *compuesta* ó *con tiempo*; se acostumbra llamar simple, cuando el caudal que tiene cada uno en el fondo, permanece un mismo tiempo; y compuesta, cuando no permanecen los caudales el mismo tiempo en el fondo. Esta se reduce á la simple, multiplicando el tiempo por lo que puso cada uno; pues lo mismo es 50 doblones en dos años que 100 en un año. Esta regla se funda en la siguiente cuestion.

*Partir un número dado a en las partes que se quiera, v. g. en tres, que tengan entre sí la misma razon que las cantidades dadas m, n, p; esto es, que la primera tenga con la segunda la razon de m:n; y la primera con la tercera la de m:p.*

Si llamo  $x$  la primera parte, será

$$m:n::x:\frac{nx}{m} \text{ la segunda, y } m:p::x:\frac{px}{m} \text{ la tercera;}$$

y como todas juntas han de equivaler á  $a$ , se tendrá

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a;$$

que quitando los divisores será  $mx + nx + px = ma$ ,  
ó descomponiendo en factores  $x(m+n+p) = ma$ ,

de donde se saca  $x = \frac{ma}{m+n+p} = m \times \frac{a}{m+n+p}$ .

Si sustituimos este valor de  $x$  en lo que correspondía á la segunda, y simplificamos, se tendrá

$$\frac{nx}{m} = \frac{na}{m+n+p}; \text{ y la tercera será } \frac{px}{m} = \frac{pa}{m+n+p};$$

cuyos resultados manifiestan, que podemos hallar cada una de estas partes, por medio de la siguiente proporción,  $m+n+p$  (suma de las puestas) :  $a$  (ganancia ó pérdida) :: lo que puso cada uno : es á la ganancia ó pérdida que le corresponde.

*Ej.* Si de tres sugetos, el primero ha puesto en un fondo 500 doblones, 720 el segundo, y 300 el tercero; y han ganado 456 doblones; para hallar lo que corresponde á cada uno, será  $m=500$ ,  $n=720$ ,  $p=300$ , y  $m+n+p=1520$ ;

luego será la parte del primero  $= \frac{500 \times 456}{1520} = 150$  dobl.<sup>s</sup>,

la del segundo . . . . .  $= \frac{720 \times 456}{1520} = 216$  dobl.<sup>s</sup>,

y la del tercero . . . . .  $= \frac{300 \times 456}{1520} = 90$  dobl.<sup>s</sup>;

cuyas partes componen la ganancia total 456 doblones.

El no haber contado con el tiempo, indica, que las puestas permanecieron uno mismo en el fondo; pero si el primero la hubiese puesto por 8 meses, el segundo por 10, y el tercero por 5, permaneciendo la misma ganancia, para hallar lo que corresponde á cada uno, se observará que 500 doblones puestos por 8 meses, es lo mismo que  $500 \times 8$  por un solo mes; 720 doblones puestos por 10 me-

ses, es lo mismo que 720x10 doblones por un solo mes; y 300 doblones puestos por 5 meses, equivalen á 300x5 por un solo mes; de manera, que las puestas serán 4000, 7200 y 1500; cuya suma es 12700, y en este caso tocará

al primero  $\frac{456 \times 4000}{12700} = 143 \frac{79}{127}$ ,

al segundo  $\frac{456 \times 7200}{12700} = 258 \frac{66}{127}$ ,

y al tercero  $\frac{456 \times 1500}{12700} = 53 \frac{109}{127}$ ,

cuya suma es igual con 456 como ántes.

*Esc.* En las corporaciones y regimientos, ocurre con bastante frecuencia el hacer gastos que han de satisfacer los individuos ú oficiales á proporcion de sus sueldos; para determinar la cuota de cada uno se dirá: *el sueldo total de los individuos es al gasto que se ha hecho, como el sueldo de cada uno es á la parte que tiene que pagar.*

*De las reglas de falsa posicion; y de las importantísimas aplicaciones que su doctrina nos ha sugerido, proporcionándonos encontrar un nuevo método general y seguro, para resolver no solamente las cuestiones mas difíciles, sino las ecuaciones numéricas de todos los grados, que se resisten á cuantos procedimientos analíticos se han inventado hasta el dia, incluso los que suministra el Cálculo Infinitesimal.*

---

197a. *Mr. Bourdon*, en la página 332 de la undécima edición de sus *Elementos de Aritmética*, impresa en 1833, al concluir la resolución de varios problemas, haciendo uso del raciocinio solamente, dice "Las diversas cuestiones, que cabamos de resolver, son del género de las que muchos Autores tratan por la regla llamada de *falsa posicion simple ó doble*: Hemos creído deber pasar esta regla en silencio, porque, en general, deja mucho de vago en el espíritu" Es una verdad cuanto en esta parte asegura *Mr. Bourdon*; pues yo no he visto en ningun libro tratada como corresponde la doctrina de la espresada regla. Por esta causa, me fué preciso, al componer mi *Tratado Elemental de Matemá-*

*ticas* (§§ 281 y 282 T. I P. I) seguir el rumbo que me pareció mas exacto; y aunque no hice alarde de ello, me sirve ahora de satisfacción lo que acabamos de citar del referido Autor, que merece mucha consideracion de los Sabios. En efecto, no solo me es satisfactorio por la razon de haber sido yo el primero, que he dado á conocer con exactitud esta regla, sinó por el uso que, con tan buen éxito, he hecho en mi *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas*, para resolver ecuaciones que se resistían á cuantos métodos se han descubierto hasta el dia; y porque al mismo tiempo que en el Extranjero se desecha esta teoría como vaga, no pueden ménos de reconocerse como importantes mis investigaciones, cuando Autores de tanto mérito desechan esta doctrina, como de poca utilidad, al mismo tiempo que yo la restablezco para que sirva de fundamento y vehiculo el mas espedito para conducir á un *nuevo método de resolver las ecuaciones numéricas de todos los grados*, que es uno de los problemas de mayor importancia en las Matemáticas. Previas estas indicaciones, vamos á entrar en materia.

197b. Se llama regla de *falsa posicion* aquella en que, suponiendo un número arbitrario, pero determinado, nos servimos de él para encontrar el verdadero. Con el fin de darla á conocer, nos propondremos resolver por ella la cuestion del 1.<sup>er</sup> ejemplo (§ 156); y para que no resulten quebrados, el número, que se suponga en este género de problemas, debe tener las partes alícuotas que exige la cuestion; por lo cual, deberémos elegir, para la que nos ocupa, un número que tenga tercera y cuarta parte exactamente. Para encontrarle, no hay mas que multiplicar entre sí los denominadores que han de espresar las partes; y ejecutándolo en la presente, multiplicarémos el 4 por el 3 y resulta 12. Luego el número supuesto deberá ser ó 12 ó un múltiplo de 12; y como en general conviene siempre elejir el mas sencillo, supondrémos que 12 sea el verdadero número.

197c. Una de las cosas, que no hemos visto explicadas en ninguna parte, es que para poder aplicar la regla de falsa posicion, no se debe hacer uso de ecuaciones como la (A) de dicho párrafo, en que hay cantidades conocidas mezcladas con la incógnita en un mismo miembro por vía de suma ó de resta; sinó á las que se presentan como la (B) del mismo párrafo, en que todo lo que

hay en un miembro son los términos que contienen incógnita, y en el otro se hallan todos los conocidos; y que podríamos enunciar la cuestión, que le ha dado origen, del modo siguiente: *Hallar un número, tal que si se le quita su tercera parte, y de lo que quede, se quita la cuarta parte del mismo número, resulten quince unidades.* Tomando el 12 por número supuesto, si de él quitamos su tercera parte, que es 4, nos resultan 8; y si de esto volvemos á quitar la cuarta parte, que es 3, quedan 5; pero como habían de resultar 15, y el 15 es *tres veces* mayor que el 5, se verificará que el verdadero número será también *tres veces* mayor que el supuesto; y como este es 12, tendremos que el verdadero número será el triplo de 12, esto es, 36, como en efecto debe así verificarse; pues es el mismo que allí hemos encontrado.

197d. Se llama *regla de dos falsas posiciones ó de falsa posicion doble*, aquella en que para encontrar lo que se busca, se hacen dos supuestos. Por ejemplo, si la cuestión anterior, la quisiésemos resolver por la falsa posición doble, en vez de hacer el raciocinio de que el número buscado debe ser el triplo del supuesto, pues esta es la relación que tiene el 5 con el 15, supondríamos otro número, por ejemplo el 84, que también tiene tercera y cuarta parte, puesto que es el séptuplo de 12; y tendré que su tercera parte es 28, y su cuarta parte 21. Quitando 28, de 84, quedan 56; quitando ahora 21 de 56, quedan 35; pero como debían resultar 15, hay un error de 20 por *exceso*. Cuando supusimos el número 12, obtuvimos 5 por resultado; y como este debía ser 15, había un error de 10, pero por *defecto*, y que por lo mismo se señala  $-10$ . Ahora, la regla práctica, que se sigue para encontrar el verdadero número, es la siguiente: *multiplíquese cada número supuesto por la equivocación del otro: y si los errores son de una misma naturaleza, esto es, ambos por exceso, ó ambos por defecto, la diferencia de los productos se divide por la diferencia de los errores; pero si los errores son de naturaleza diferente, esto es, uno por exceso y otro por defecto, se dividirá la suma de los mencionados productos por la suma de los errores.* Aplicando esta regla á nuestro caso, tendremos que multi-

plicar el primer número supuesto, que es 12, por la equivocación ó error 20, que origina el segundo, lo que da 240. También deberémos multiplicar el segundo número supuesto 84 por 10, error que da el primer número supuesto 12; y el producto será 840. Y como los errores aquí son de diversa naturaleza, pues el primero es por defecto y el segundo por exceso, deberé sumar dichos productos; lo que dará  $240+840=1080$ ; y esta suma la dividiré por la suma de los errores, esto es, por  $10+20=30$ ; y como dividiendo 1080 por 30, resultan 36, queda encontrado lo que buscaba; y he obtenido el mismo resultado que dió la regla de falsa posición simple (197 c.), y también el mismo que dió el método general algebraico ó analítico (156 1º).

197 e. Ahora, lo que falta, es demostrar la regla práctica que se acaba de enunciar y aplicar.

Para esto, observaré, que si espresamos por  $x$  el verdadero número que buscamos; por  $a, b$ , los dos números supuestos, y por  $\alpha$  y  $\epsilon$  las dos equivocaciones, si la condición que se ha de verificar, la podemos espresar por

$\frac{m}{n} \cdot x$ , siendo  $m$  y  $n$  números enteros, se verificarán

las ecuaciones  $\frac{m}{n} \cdot x = \frac{m}{n} \cdot a + \alpha$ ;  $\frac{m}{n} \cdot x = \frac{m}{n} \cdot b + \epsilon$ ; ó

trasladando será  $\frac{m}{n} \cdot x - \frac{m}{n} \cdot a = \alpha$ ;  $\frac{m}{n} \cdot x - \frac{m}{n} \cdot b = \epsilon$ ;

formando proporción con estas dos ecuaciones será

$\alpha : \epsilon :: \frac{m}{n} \cdot x - \frac{m}{n} \cdot a : \frac{m}{n} \cdot x - \frac{m}{n} \cdot b :: \frac{m}{n} \cdot (x - a) : \frac{m}{n} \cdot (x - b) :: x - a : x - b$ ;

que da (§179)  $\alpha x - \alpha b = \epsilon x - \epsilon a$ ; y trasladando se tiene  $\alpha x - \epsilon x = \alpha b - \epsilon a$ ; ó  $(\alpha - \epsilon) \cdot x = \alpha b - \epsilon a$ ; de donde

de (148)  $x = \frac{\alpha b - \epsilon a}{\alpha - \epsilon}$ ; ecuación que espresa exactamente

la regla que acabamos de dar.

Aquí hemos supuesto que los errores  $\alpha$  y  $\epsilon$  eran ambos positivos, esto es, de de una misma naturaleza. Si

ambos errores fuesen negativos, que son tambien de una misma naturaleza entre sí, se verificaría tambien la misma regla. En efecto, si suponemos negativos los dos errores  $\alpha$  y  $\zeta$ , el valor de  $x$ , que acabamos de obtener, será (112)

$$x = \frac{-ab - \zeta a}{-\alpha - \zeta} = \frac{-ab + \zeta a}{-\alpha + \zeta} = \frac{-(ab - \zeta a)}{-(\alpha - \zeta)} = \frac{ab - \zeta a}{\alpha - \zeta};$$

luego siempre se verifica, que cuando los errores ó equivocaciones son de una misma naturaleza ó tienen un mismo signo, la diferencia de los productos se ha de dividir por la diferencia de los errores.

197 f. Mas si los errores ó equivocaciones son de naturaleza diferente, como en el caso de que uno de los errores  $\alpha$  ó  $\zeta$  sea negativo y el otro positivo, entónces el verdadero valor de  $x$  se encuentra dividiendo la suma de dichos productos por la suma de los errores ó equivocaciones. En efecto, si suponemos negativa la  $\alpha$ , tendremos que el valor hallado ántes para  $x$ , será

$$x = \frac{-ab - \zeta a}{-\alpha - \zeta} = \frac{-(ab + \zeta a)}{-(\alpha + \zeta)} = \frac{ab + \zeta a}{\alpha + \zeta}.$$

Si supusiéramos negativa la  $\zeta$ , tendríamos (112)

$$x = \frac{ab - \zeta a}{\alpha - \zeta} = \frac{ab + \zeta a}{\alpha + \zeta}.$$

Resultados que conducen á la misma regla.

197 g. Así en el Tratado Elemental, como en lo que hemos dicho (197 e), vemos que esta regla supone que la condicion, que se ha de verificar, sea proporcional con

$x$ , y por eso la hemos supuesto espresada por  $\frac{m}{n}x$ ;

pero hay muchísimas cuestiones en que el resultado de la condicion que se ha de verificar, no se puede suponer proporcional con  $x$ . Lo que vamos á comprobar con la primera cuestion de las resueltas (§ 169), que conduce á la ecuacion  $x^2 - 9x = -14$ ; que, descomponiendo en factores el primer miembro, se tiene  $x(x-9) = -14(1)$ ; donde vemos que lo que multiplica á  $x$ , es  $x-9$ ; valor

que depende del que supongamos á  $x$ ; lo que no se verifica cuando el factor que suponíamos multiplicar á  $x$ , para satisfacer á la cuestion, era el  $\frac{m}{n}$ , en que los núme-

ros  $m$  y  $n$  representaban números, cualesquiera sí, pero conocidos y determinados, y que no dependiesen del valor de  $x$ .

Y así, aplicado el procedimiento de la regla de *falsa posicion*, tanto simple como compuesta, á dicha ecuacion, no sacaremos de ningun modo los números 7 y 2, que allí hemos encontrado, y que son los que satisfacen á dicha cuestion y ecuacion.

Veámoslo: supongamos que el número supuesto sea el 15; esto es, que  $x=15$ ; en este caso  $x^2=225$ ; y  $9x=135$ . Por lo que  $x^2-9x=225-135=90$ ; el resultado debía ser  $-14$ ; el valor 90 supera á 0 en 90; y como 0 supera (105) al  $-14$  en 14, resulta que el 90 supera al  $-14$  en 104.

Si quisiéramos aplicar el procedimiento de la regla de falsa posicion simple, diríamos: el *primer miembro de la ecuacion por el supuesto  $x=15$ , se nos convierte en 90*; ¿qué valor deberá tener  $x$  para que dicho primer miembro sea  $-14$ ? La cual se escribirá así,

$$90:15:: -14:x = \frac{15 \times -14}{90} = \frac{-14}{+6} = -\frac{7}{3};$$

donde vemos que el valor de  $x$  dista mucho de ser el número 7, ni el número 2; y que además de ser muy diferente el valor numérico, es tambien diferente en naturaleza, pues este resultado es fraccionario y negativo, y los dos números 7 y 2, que satisfacen á la cuestion, son enteros y positivos.

197<sup>h</sup>. Apliquémosle el procedimiento de las *dos falsas posiciones*; y como acabamos de ver que el supuesto 15 da un error  $+104$ , tomaremos para otro número supuesto el 20; y tendremos que  $x^2=20^2=400$ , y  $9x=180$ ; luego será

$$x^2-9x=400-180=220.$$

Por la misma consideracion de ántes, el 220 supera

al  $-14$  en  $234$ ; luego el error aquí es  $+234$ , que es tambien por exceso.

Para aplicar la regla (197 *d* y *e*), multiplicaré el primer número supuesto  $15$  por la segunda equivocacion ó error que es  $234$ ; y el producto será  $3510$ ; el producto del segundo número supuesto  $20$  por la equivocacion ó error del primero, que es  $104$ , será  $2080$ ; y como aquí los errores tienen un mismo signo, deberémos dividir la diferencia de los productos, por la diferencia de los errores, esto es,  $3510 - 2080 = 1430$ , lo deberé dividir por  $234 - 104 = 130$ ; y haciendo la division, resul-

ta  $\frac{1430}{130} = \frac{143}{13} = 11$ ; número bien diferente de los  $7$

y  $2$  que satisfacen á la ecuacion propuesta.

Resulta pues comprobado, que la *doctrina de la falsa posicion, simple ó doble, solo se puede aplicar á cuestiones en que el primer miembro de la ecuacion á que conduzcan sea proporcional con el número buscado*; lo que no hemos visto aclarado como corresponde en ningun libro.

197 *i*. Para dar á conocer el procedimiento, que á ello nos debe conducir, observaremos que el primer miembro de la (ec. 1 § 197 *g*), guarda la razon compuesta de sus dos factores  $x$ , y  $x-9$ ; el primer factor es proporcional á  $x$ ; y el otro es proporcional á  $x-9$ . Este  $x-9$  no es proporcional á  $x$ ; pero aumenta con  $x$ , y disminuye con  $x$ ; resulta, pues, que de los dos factores, el uno es proporcional exactamente con  $x$ , y el otro crece y mengua cuando  $x$ , lo que origina el que se aproxima mas á ser proporcional con  $x$ , que si fuese absolutamente independiente de  $x$ . Luego en la razon compuesta que guarda el producto  $x(x-9)$ , la parte dominante es la de ser proporcional á  $x$ ; por lo que, si aplicamos á dicha ecuacion alguna fórmula que esté fundada en ser el primer miembro proporcional á  $x$ , dicha fórmula dará valores aproximados; ó la propiedad que espresa dicha fórmula se verificará con una cierta aproximacion, respecto del primer miembro. Ahora bien, toda ecuacion se puede poner bajo una forma análoga. En efecto, la ecuacion general (1 § 170 *q*), trasladando el término  $L$  al segun-

do miembro, y descomponiendo en factores lo que queda en el primero, sacando fuera de un paréntesis la  $x$ , que es comun en los términos que quedan en dicho primer miembro, se convierte en

$$x.(x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} \dots + K) = -L.$$

Donde vemos, que el primer factor es proporcional á  $x$ ; y el otro, aunque no es esencialmente proporcional con  $x$ , varía con  $x$ ; luego siempre la parte dominante de las variaciones del primer miembro es el ser proporcional á  $x$ ; y cuantas fórmulas apliquemos á dicho primer miembro, que estén sacadas en el supuesto de la proporcionalidad con  $x$ , darán resultados que, aunque no serán exactos, se aproximarán á los verdaderos. Y en esto se funda la parte mas esencial de mi nuevo método.

197 j. En las profundas y serias meditaciones, que me ha costado hallar el mencionado procedimiento, he tenido que luchar con varias proposiciones que, á primera vista, parecen evidentes, y que en realidad no lo son. Tales por ejemplo una en que incurre *Mr. Bourdon* pág. 539 de la 7.<sup>a</sup> edicion de su *Álgebra*, hecha en el año de 1834, y es como sigue.

«A fin de estrechar mas los límites de esta raiz, hagamos en la ecuacion

$$(x^3 - 5x - 3 = 0), \quad x = 2 + \frac{1}{2} = 2,5;$$

y se halla por resultado  $+0,125$ . Por otra parte, 2 puesto en lugar de  $x$ , da  $-5$ . Así, la raiz está comprendida entre 2 y 2,5.

»Actualmente, si se atiende á que el resultado de la sustitucion de 2,5 difiere ménos de 0, que el resultado de la sustitucion de 2, se debe inferir de esto, que la raiz está mas cerca de 2,5 que de 2». Esto no es verdadero en todos los casos; porque como, en general, hay tantas raices como unidades tiene el esponente, podrá suceder que el número que da mayor error numérico, se acerque mas á una de las raices que el número que da el menor error numérico se acerca á otra.

Para aclarar esto, supongamos que se traslade al primer miembro el  $-14$  del segundo de la (ec. 1 § 197 g); lo que nos dará  $x^2 - 9x + 14 = 0$ ; y que se sustituyan

por  $x$  los diferentes números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc., lo cual nos dará la tabla siguiente:

<u>Supuestos</u>	<u>Errores</u>
$x = 1. . . . .$	+6
$x = 2. . . . .$	$\pm 0$ (*)
$x = 3. . . . .$	-4
$x = 4. . . . .$	-6
$x = 5. . . . .$	-6
$x = 6. . . . .$	-4
$x = 7. . . . .$	$\mp 0$
$x = 8. . . . .$	+6
&c.	&c.

Donde se observa, que el supuesto 1 da +6 de error; y el supuesto 3, da -4 de error. Cualquiera que sea el sentido en que se tomen las cantidades negativas respecto de las positivas, ménos distancia ó diferencia hay del valor -4 al *cero*, que del +6 al *cero*: y sin embargo, el número 1 y el número 3, que producen errores tan diferentes, distan igualmente de la raíz 2. Los números 4 y 5 dan ambos el mismo error en magnitud y en sentido; y sin embargo, aunque el 4 y el 5 distan igualmente de las raíces 2 y 7, no obstante el uno lo hace por *exceso* y el otro por *defecto*. Luego el aserto de *Mr. Bourdon* no es exacto.

Otra de las cosas, que se suele reputar como evidente por los Autores, es que, un *error ó equivocacion por exceso indica siempre que el número supuesto que le produce, es mayor que el verdadero; y que un error por defecto es siempre indicio de que el número supuesto era menor de lo que le corresponde*, lo cual no se verifica.

En efecto, el supuesto  $x=1$ , da un error +6; y sin embargo 1 es menor que el 2 y que el 7, que son

(\*) Ponemos aquí el signo  $\pm$  al 0, y abajo el  $\mp$ , por las razones espuestas en los párrafos 479 y 480 de la segunda edición del T. II P. II T. E. que contiene el Cálculo Diferencial é Integral.

los verdaderos valores de  $x$ , ó las verdaderas raices de la ecuacion.

El supuesto 3 da el mismo error que el supuesto 6; y aunque hay la misma distancia del 3 al 2 que del 6 al 7, se verifica que en el uno, por ejemplo, en el 3, es por *exceso* y en el 6 es por *defecto*.

Los supuestos 4 y 5 dan los mismos errores; y se verifica que el 4 escede á una de las raices en dos unidades; y al 5 le faltan las mismas unidades para la otra raiz 7. Todo esto proviene de que los Autores incurren en los inconvenientes, que mencionamos en la nota del § 365 del Tomo 2.º P. I T. E.

Por esta causa, mis investigaciones han sufrido graves entorpecimientos, hasta que por un asiduo y constante trabajo, me he convencido de que *dichos asertos, que toman por evidentes los Autores, no tienen la competente exactitud; y á fuerza de constancia y penalidades, he logrado hallar un método general y sencillo, que hasta el presente no reconoce ningun vacío ni tiene límites, para encontrar todas las raices reales de las ecuaciones numéricas, aun las que se resisten á los procedimientos mas sublimes de la Análisis, incluso los que suministra el Cálculo Infinitesimal.*

197 k. Para dar á conocer dicho método, principiarié hallando la diferencia, que hay entre un número supuesto y el verdadero, en el caso de ser la espresion proporcional á  $x$ , ó que se le puede aplicar la regla de falsa posicion doble. Hemos supuesto que, tomando para  $x$ , un valor  $a$ , se ha obtenido un error ó equivocacion espresado por  $\alpha$ ; y tambien hemos supuesto que tomando para  $x$  otro valor  $b$ , ha dado un error ó equivocacion espresado por  $\epsilon$ .

Los errores  $\alpha$  y  $\epsilon$  pueden ser iguales enteramente, como hemos visto en los de la ecuacion anterior; pues los supuestos 1 y 8 dan ambos  $+6$  de error; los 3 y 6 dan ambos  $-4$  de error; y los supuestos 4 y 5 dan ambos el mismo error  $-6$ . Pero en general, los supondrémos desiguales para evitar una discusion que nos distraería; pues en el caso de ser iguales los errores, harémos otro supuesto, y consideraremos los dos números que produzcan errores diferentes.

Supongámos tambien que  $a$  sea el número que dé el menor error numérico, esto es, el error que prescindiendo del signo, tenga ménos unidades; y puesto que produce un error ó equivocacion  $\alpha$ , resulta que  $a$  no será (170 e) raiz de la ecuacion; y por consiguiente entre  $a$  y el verdadero valor de  $x$ , habrá una diferencia, que espresarémos por  $D$ ; y será  $a+D=x$ ; que, trasladando, se tiene  $D=x-a$ .

Si por  $x$  sustituimos el valor hallado (197 e), será

$$D = \frac{\alpha b - \zeta a}{\alpha - \zeta} - a = \frac{\alpha b - \zeta a - \alpha a + \zeta a}{\alpha - \zeta} = \frac{\alpha b - \alpha a}{\alpha - \zeta} = \frac{\alpha(b-a)}{\alpha - \zeta}.$$

Aquí observamos, que el factor  $b-a$  del numerador es la diferencia de los números supuestos; en la cual hace de sustraendo el número supuesto, que da el menor error; y que el denominador  $\alpha-\zeta$  es la diferencia de los errores, estando por minuendo el menor. Nada se sabe de cierto acerca de si  $b$  será mayor ó menor que  $a$ ; pero como vamos en el supuesto de que  $\alpha$  es menor en unidades que  $\zeta$ , resulta, que obtendríamos alguna mayor simplificacion en el uso continuado de esta fórmula, si hiciéramos que en el denominador estuviese  $\alpha$  por sustraendo; lo cual se consigue mudando los signos al numerador y denominador, que equivale á multiplicar ambos términos por  $-1$ ; lo que no altera (118 esc.) el valor del que-

brado; y así tendremos  $D = \frac{\alpha(a-b)}{\zeta-\alpha}$  (U); cuya espresion ó fórmula podremos traducir en regla, diciendo:

*cuando se han hecho dos supuestos, se puede hallar la diferencia entre el número que produce el menor error numérico y el verdadero valor de la incógnita, multiplicando dicho menor error por la diferencia entre los dos números supuestos, haciendo de minuendo el que produce el menor error numérico, y dividiendo este producto por la diferencia de los errores, haciendo de sustraendo el menor error numérico; pero teniendo mucho cuidado de atender á los signos tanto de los errores como de los números supuestos, para saber el signo que deba tener la  $D$ , á fin de*

que, agregada al valor de  $a$ , nos resulte el verdadero valor de  $x$ .

197 l. Si esta fórmula la aplicamos á una ecuacion, en que se verifique la proporcionalidad con  $x$ , tendremos para  $D$  un valor exacto; si la aplicamos á una ecuacion en que no se verifique la proporcionalidad con  $x$ , no hallaremos un valor exacto; pero en virtud de lo espuesto (197 i), deberémos tener un valor aproximado.

Para comprobar todo esto, lo aplicaremos á la misma cuestion, (197 d).

De suponer  $x=12$ , provino el error  $-10$ ; suponiendo  $x=84$ , resultó un error de  $+20$ . El que da menor error numérico es el 12; por consiguiente, para encontrar lo que se debe agregar al 12 para que se convierta en el valor de  $x$ , practicaremos la regla anterior, multiplicando el menor error numérico  $-10$  por la diferencia entre el 12 y el 84, estando el 12 por minuendo; luego se deberá multiplicar por  $12-84=-72$ ; y se tendrá  $-10 \times -72 = +720$ .

Esto lo deberémos dividir por la diferencia de los errores, pero tomando el menor error numérico por sustraendo; luego lo deberémos dividir por  $20 - (-10) = (\S 112) 20 + 10 = 30$ . Y como dividiendo  $+720$  por  $30$ , resulta  $24$ , este será el valor de  $D$ , y por consiguiente  $x = a + D = 12 + 24 = 36$ .

Luego nos ha resultado para  $x$  el mismo valor que ya hemos obtenido por otros tres métodos (§§ 156, 197 c y 197 d).

197 ll. Aplicada la fórmula (U § 197 k), que espresa el valor de  $D$ , á una ecuacion en que no se verifique la proporcionalidad con  $x$ , no tendremos un valor exacto para  $D$ ; pero nos resultará un valor aproximado.

Apliquemos este procedimiento á la ecuacion  $x^2 + 2x = 80$ ; cuyas raices sabemos (169. 2.<sup>a</sup>) que son  $x=8$ ;  $x=-10$ ; y que se puede transformar en  $x.(x+2) = 80$ : el primer miembro no se puede suponer proporcional á  $x$ ; pues lo es en razon compuesta de  $x$ , y de  $x+2$ ; luego, aplicada la mencionada fórmula (U § 197 k), no dará un valor exacto para  $D$ ; pero lo dará aproximado.

Para mayor sencillez y uniformarnos con el uso general, trasladaremos todos los términos al primer miembro, y será

$$x^2 + 2x - 80 = 0 \quad (2).$$

Supongamos á  $x$  un valor cualquiera arbitrario; pero disparatado, para ver la excelencia del método; y sea por ejemplo  $x=1000$ ; con lo cual, el primer miembro se convertirá en

$$1000^2 + 2 \times 1000 - 80 = 1000000 + 2000 - 80 = 1002000 - 80 = \dots + 1001920;$$

luego el error es +1001920.

Supongamos  $x=50$ ; y dicho primer miembro se convertirá en  $50^2 + 2 \times 50 - 80 = 2500 + 100 - 80 = 2600 - 80 = +2520$ , que será el error.

Aquí vemos, que el número supuesto, que da el menor error numérico, es el 50. Para averiguar lo que le deberemos añadir ó quitar, á fin de que se convierta en el verdadero, á lo cual llamamos *correccion*, deberemos multiplicar el menor error numérico por la diferencia de los dos números supuestos, tomando por minuendo el 50; luego deberemos multiplicar el +2520 por  $50 - 1000 = -950$ ; lo que nos dará  $+2520 \times -950 = -2394000$ .

Este producto lo deberemos dividir por la diferencia de los errores; pero haciendo de sustraendo el menor; luego deberemos dividir por  $+1001920 - 2520 = 999400$ .

$$\text{Luego la correccion será } \frac{-2394000}{999400} = \frac{-23940}{9994} = -2,4.$$

Por lo que  $D = -2,4$ ; y agregando este valor al número supuesto 50, que es el que da menor error numérico, tendremos  $50 - 2,4 = 47,6$ ; el cuál deberá acercarse á alguna de las raices, mas que los números 50, y 1000; y observando que las raices de dicha ecuacion ( $169\dots 2^a$ ) son  $x=8$ , y  $x=-10$ , queda comprobado perfectamente.

Ahora se toma este valor 47,6 por *tercer número supuesto*; y se sustituye en el primer miembro de la misma ecuacion; el cual se convertirá en  $(47,6)^2 + 2 \times 47,6 - 80$ ; y como  $(47,6)^2 = 47,6 \times 47,6 = 2265,76$ ; y  $2 \times 47,6 = 95,2$ ; dicho primer miembro se convertirá en  $2265,76 + 95,2 - 80 = +2280,96$  que es el error.

Para encontrar la correccion, que se debe hacer al 47,6, multiplicaré el menor error +2280,96 por  $47,6 - 50 = -2,4$ ; y resulta  $2280,96 \times -2,4 = -5474,304$ . Esto lo dividiré por  $2520 - 2280,96 = 239,04$ ; y se tiene

$$D = \frac{-5474,304}{239,04} = -22,48.$$

Agregando esta correccion al tercer número supuesto 47,6, tendremos para otro valor mas aproximado á una de las raices  $47,6 - 22,48 = 25,12$ , que en efecto está ya mucho mas cerca de +8 y de -10.

Tomemos este valor 25,12 por *cuarto número supuesto*, y

sustituyéndole en el primer miembro de la misma ecuacion se convierte en  $631,0144+50,24-80=+601,2544$ , que es el error.

Para encontrar la correccion, que se debe hacer al  $25,12$ , multiplicarémos el menor error  $+601,2544$  por  $25,12-47,6=-22,48$ ; lo que da  $-13516,198912$ .

Esto se debe dividir por  $2280,96-601,2544=1679,7056$ ; y resulta  $-8$  para la correccion; la cual, agregada al  $25,12$ , da  $25,12-8=17,12$ , que ya se acerca mas al  $8$  y al  $-10$ .

Tomemos este valor  $17,12$  por *quinto número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de la misma ecuacion, le reduce á  $+247,3344$ , que es el error ó equivocacion.

Para encontrar la correccion que debo hacer al  $17,12$ , multiplicaré  $+247,3344$  por  $17,12-25,12=-8$ ; lo que da  $-1978,6752$ ; y dividido esto por  $601,2544-247,3344=353,9200$ , resulta  $-5,59$ ; que agregado al  $17,12$  se obtiene  $17,12-5,59=11,53$ ; que se acerca ya mucho al  $8$ .

Tomemos este valor  $11,53$  por *sexto número supuesto*; y sustituyéndole en el primer miembro de la misma ecuacion, se convierte en  $76,0009$ , que es el error.

Para encontrar la correccion, multiplicarémos esto por  $11,53-17,12=-5,59$ ; lo que da  $-424,845031$ ; esto se debe dividir por la diferencia de los errores, que es  $171,3335$ ; y se obtiene  $-2,48$ ; que, agregada al  $11,53$ , le convierte en  $9,05$ ; que se aproxima ya mucho al  $8$ .

Tomemos este valor  $9,05$  por *séptimo número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de la ecuacion, le convierte en  $+20,0025$ , que es el error ó equivocacion.

Para encontrar la correccion, que debo hacer al número  $9,05$ ; multiplicaré esta equivocacion  $+20,0025$ , por

$9,05-11,53=-2,48$ ; y obtengo  $-49,6062$ . Esto lo dividido por  $76,0009-20,0025=55,9984$ ; lo que da  $-0,88$  para la correccion; que, agregándola al  $9,05$ , se tiene  $8,17$ , que ya escede en muy poco al  $8$ .

Tomo este valor  $8,17$  por *octavo número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de la misma ecuacion, le convierte en  $+3,0889$ , luego este será el error.

Para encontrar la correccion, que debo hacer al  $8,17$ , multiplicaré  $+3,0889$  por  $8,17-9,05=-0,88$ ; dividiendo el producto  $-2,718232$  por  $20,0025-3,0889=16,9136$ ; obtengo para la correccion  $-0,16$ ; que, agregada al  $8,17$ , da  $8,01$ .

Ahora, en cualquier cálculo que encontrásemos por resultado  $8,01$ , si la unidad á que se refería este número no era de mucha

consideracion, deberíamos despreciar la centésima, que hay ademas del 8, y tomaríamos este número por resultado.

Sustituyendo este número 8 en el primer miembro de la misma ecuacion, se convierte en  $8^2 + 2 \times 8 - 80 = 64 + 16 - 80 = 80 - 80 = 0$ ; y como este es el segundo miembro, resulta (170 e) que 8 es una de las raíces de la ecuacion, como en efecto ya sabiamos (169..2.<sup>a</sup>).

Para encontrar la otra, dividiremos el primer miembro de la misma (ec. 2) por  $x-8$ , y ejecutándolo como aquí se ve:

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x - 80 \quad | \quad x - 8 \\
 -x^2 + 8x \quad \quad | \quad x + 10 \\
 \hline
 0 + 10x - 80 \\
 -10x + 80 \\
 \hline
 0 \quad \quad 0
 \end{array}$$

Obtengo por cociente  $x+10$ ; que igualado con 0 da  $x+10=0$ . Y trasladando, se tiene  $x=-10$  que es la otra raíz. Luego hemos hallado por este nuevo método los mismos resultados que ántes (169....2.<sup>a</sup>).

197 m. Este método es lo mas admirable y maravilloso que se puede imaginar; pues, ademas de no reconocer hasta el presente ningun limite, ni restriccion por parte del grado de las ecuaciones ni por la magnitud de los coeficientes, ni por estar la incógnita bajo forma trascendente, *nada importa por otra parte el que uno se equivoque*. Todos los métodos del mundo, en padeciendo una equivocacion, lo que es sumamente fácil, mayormente cuando se hacen cálculos numéricos, ya todo lo que venga despues es inútil, y conviene empezar de nuevo desde el parage donde se cometió el yerro. Así se ha verificado en los complicadísimos cálculos numéricos, que yo ejecuté al hallar la relacion del diámetro á la circunferencia tanto por Geometría, segun se vé (§ 505 T. I T. E.), como por el Cálculo Infinitesimal (§ 647 T. II); y tambien en los cálculos que hice para la construccion de la curva ó *trayectoria*, que trazaban las granadas arrojadas por los Franceses á Cádiz en el sitio de la guerra de la independencía, como puede verse en mi *Compendio de Mecánica práctica*.

Mas aquí nada importa, repito, el *equivocarse*; porque el mismo método conduce al verdadero resultado sin necesidad de inutilizar lo ya hecho, y á veces sin causar inconveniente alguno. Verifiquemos todo esto en la misma (ec. 2) que acabamos de resolver.

Supongamos que, al encontrar la correccion que produce el

*sesto número supuesto* 11,53, en vez de hallar que está correccion era  $-2,48$ , hubiésemos puesto que era  $-4,48$ . Entónces, agregada al número supuesto 11,53, hubiera dado  $11,53-4,48=7,05$ .

Hubiéramos tomado este número 7,05 por *séptimo número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de la misma ecuacion, hubiéramos obtenido  $-16,1975$ .

Esta equivocacion ó error sale por defecto; y para encontrar la correccion que se debe hacer al 7,05, multiplicaremos esta equivocacion  $-16,1975$  por  $7,05-11,53=-4,48$ ; lo que da  $-16,1975 \times -4,48 = +72,5648$ . Esto lo dividiré por

$$76,0009 - (-16,1975) = 76,0009 + 16,1975 = 92,1984;$$

y resulta  $\frac{72,5648}{92,1984} = 0,787$  para la correccion; que, agregán-

dola al 7,05, se tendrá  $7,05 + 0,787 = 7,837$ .

Tomemos este valor 7,837 por *octavo número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de la ecuacion, le reduce á  $-2,907431$ , que será el error.

Multiplicando esto por  $7,837-7,05=0,787$ , resulta  $-2,288148197$ ; y dividiendo por

$$-16,1975 - (-2,907431) = -16,1975 + 2,907431 = -13,290069,$$

se tiene  $+0,171$ . Agregando esto al último número supuesto 7,837, resulta 8,008.

Donde vemos, que pudiendo despreciarse ya las *ocho milésimas* que resultan de mas, obtenemos el mismo número 8; y se ha encontrado con el mismo número de supuestos.

Si en vez de haber tomado  $-4,48$ , por  $-2,48$ , hubiéramos tomado solo  $-1$ ; entónces agregado esto al 11,53, hubiéramos tenido 10,53.

Tomando este valor 10,53 por *séptimo número supuesto*, y sustituido en el primer miembro de la misma ecuacion, se nos hubiera convertido en  $+51,9409$ ; multiplicando esto por  $10,53-11,53=-1$ , resulta  $=-51,9409$ ; y dividiéndolo por  $76,0009-51,9409=24,0600$ , se obtiene,  $=-2,15$ . Agregando esta correccion al 10,53, resulta 8,38.

Tomando este valor 8,38 por *octavo número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de la ecuacion, lo reduce á  $+6,9844$ . Multiplicando esto por  $8,38-10,53=-2,15$ , se halla  $-15,01646$ ; y dividiendo esto por  $51,9409-6,9844=44,9565$ , resulta  $-0,33$ . Agregando esta correccion al 8,38 será 8,05.

Y como las *cinco centésimas*, que hay de mas, las puedo des-

preciar, si la unidad á que se refiere el número no es de mucha importancia, resulta que tendré el número 8, para raíz de la ecuacion como por el método anterior.

Si en vez de despreciar las 5 décimas, tomáramos el 8,05 por *noveno número supuesto*, hubiéramos obtenido 0,9025 de error; y  $-0,048$  para la correccion; que, agregada al 8,05, da 8,002 que se diferencia mucho menos del 8.

Queda pues comprobado, que *en este método, aunque por distraccion ó por la fragilidad humana, cometamos descuidos, ya en mas ó en ménos, el método es tan sumamente apreciable, que nos conduce por sí á los verdaderos resultados, sin necesidad de corregir ni enmendar los cálculos anteriores*; prerrogativa tan singularísima, que es necesario verla para creerla. Únicamente podrá suceder en los casos mas desventajosos, el tener que hacer uno ó dos supuestos mas, cuyo inconveniente será ménos grave, en la mayor parte de las ocasiones, que el tener que rehacer los cálculos posteriores al en que se cometió el descuido ó yerro etc.

197n. Esta circunstancia nos proporciona otra de mucho mayor interes todavía; y es, que, *pues no importa el poner de mas ó de ménos en el error ó equivocacion ó en los números que sirven para encontrar los errores ó las correcciones, podemos siempre despreciar gran parte de los guarismos decimales, sin que esto produzca inconveniente; y que al mismo tiempo nos sirva para hacer las simplificaciones, en términos que podamos encontrar los resultados, en la mitad, tercera ó cuarta parte del tiempo.*

Para que esto quede bien aclarado, volvamos á considerar los cálculos de esta ecuacion, para indicar las abreviaciones que se podrían haber hecho.

En la resolucion, que acabamos de dar, no hemos querido hacer ninguna abreviacion, ni aun las de las decimales, esplicadas (notas de los §§ 92 y 94), para hacer el método mas asequible á toda clase de personas; pero el que guste puede hacer uso tambien de dicha abreviacion y sacar aun mas ventaja. Entendido esto, reflexionemos acerca de lo que nos hubiéramos podido ahorrar en la resolucion de la ecuacion antecedente.

La primera correccion, que encontramos, fué  $-2,4$ .

Aquí no debíamos despreciar el guarismo decimal 4, por que no sabíamos si nos hallabamos muy léjos ó muy cerca de la raiz; y por eso hemos encontrado por medio de ella el tercer número supuesto 47,6; y así no hemos hecho mal en tomar por tercer número supuesto el mismo 47,6.

En vez de tomar por cuarto número supuesto el 25,12, deberíamos haber tomado el 25 solamente; y entónces hubiéramos hallado con mucha mayor sencillez la correccion.

En general, al hacer la multiplicacion de las decimales, se pueden suprimir algunas sin necesidad de practicar el método (nota del §92); y al hacer la division de las decimales, para encontrar mas breve el resultado aproximado, sin necesidad de practicar el método (nota del §94), podemos suprimir en dividendo y divisor igual número de guarismos decimales, y aun de guarismos enteros, si estos son muchos y los que se quieren hallar en el cociente son pocos.

Por ejemplo, al encontrar la correccion, que se debe hacer al cuarto número supuesto, hemos tenido que multiplicar  $+601,2544$  por  $-22,48$ , nos hubiera bastado multiplicar  $+601,25$  por  $-22,48$ ; y aun mejor por  $-22,5$ ; y luego, en vez de dividir  $-13516,198912$  por  $1679,7056$ , nos hubiera bastado dividir la parte entera por la parte entera; esto es, haber dividido  $-13516$  por  $1679$ ; lo que nos hubiera dado el cociente 8; y luego 0 en el lugar de las décimas. Tambien nos hubiera bastado suprimir el último guarismo de los enteros, y dividir  $1351$  por  $167$ , y hubiéramos tenido igualmente 8 por cociente entero, y *ceró* en las décimas. Para que en esto no quede el mas mínimo rastro de duda, recordaremos que el cociente no se altera ( $61\dots4.$ <sup>o</sup>) aunque dividendo y divisor se partan por un mismo número. Por esta causa, el cociente de dividir  $13516,198912$  por  $1679,7056$ , será el mismo que el de estos números corriendo la coma á la izquierda un número cualquiera de lugares; suprimiendo despues la parte decimal, suprimimos en ambos una cantidad menor que la unidad, lo que altera efectivamente el cociente; pero esta alteracion nunca se hará sensible hasta que lleguen á servir de dividendo parcial las unidades. Luego, en procurando que entre el último guarismo, que se conserve en dividendo y divisor, y el guarismo que queramos

apreciar en el cociente, quede uno ó dos lugares de mas, podemos prescindir de los otros guarismos; lo cual proporciona muchísimas ventajas en la práctica, como se verá en lo sucesivo.

En vez de tomar el 17,12 por quinto número supuesto, nos ahorraríamos la mitad del cálculo tomando solo el 17; y así sucesivamente.

En general, la correccion solo conviene que tenga un guarismo decimal, á no ser ya las últimas; sobre cuyo punto advertimos, que el calculador hallará con el uso muchas mas abreviaciones; pero en caso de duda, y de que el calculador no lo vea con claridad, es mejor seguir el método largo; pues á veces se consigue en ménos tiempo; á causa de no exigir ninguna otra atencion particular del espíritu, y poderse uno entregar á la práctica ordinaria. Por esta causa, al esponer el método, con el fin de hacerle independiente lo mas posible de las partes sublimes, usaré de muy pocas abreviaciones para que esté mas á los alcances de todos.

Como la diferencia entre los dos números supuestos, que dan los dos menores errores, es la correccion anterior, ya con el mismo signo que ella tenga cuando el menor error provenga del menor de los dos números supuestos, ya con un signo contrario, en el caso de ser el número menor de los supuestos el que da el menor error numérico, podríamos ahorrarlos tambien en muchos casos hacer esta resta.

Sentado esto, ya no tenemos que hacer otra cosa mas, que manifestar el orden con que se debe proceder para dirigirnos al verdadero resultado con los menores rodéos posibles; y voy á poner el que me parece mas adecuado, por lo que hasta ahora he observado en las ecuaciones resueltas. A proporcion que se vayan resolviendo mayor número de ecuaciones es probable que se encuentren, algunas modificaciones á la siguiente.

*Regla general para la resolucion de toda clase de ecuaciones numéricas por este nuevo método.*

197 p. Como las sustituciones de los números 1 y 2 resultan hechas con mucha facilidad, conviene principiari

por ellas; y en virtud de todo lo que precede, podrémos cifrar este nuevo método en la regla práctica siguiente.

Ante todas cosas debemos observar, que en este método no se necesita ni aun preparar (167) la ecuacion, es decir, que se puede aplicar indistintamente, ya tenga ó no coeficiente el término de la incógnita que lleva mayor esponente, que es el que se llama *primer término* de la ecuacion. El ordenarla (120) por las potencias descendentes de la incógnita no es tampoco necesario, ni aun hacer que el primer término sea positivo; pero la supondrémos ordenada, porque esto conduce á la claridad; y tambien el que se hallen todos los términos en el primer miembro, siendo *cero* el segundo miembro: en cuyo caso se procederá de esta manera:

1.<sup>o</sup> *Sustitúyase 1 en vez la incógnita en el primer miembro de la ecuacion; y véase en lo que se convierte dicho primer miembro. Si el resultado es 0, el 1, que se substituyó por x, será raiz de la ecuacion. Si dicho resultado no es 0, el número, que se obtenga, será el error ó equivocacion que se ha cometido de suponer que 1 sea el verdadero valor de x. Si el signo de dicho resultado es positivo, ó lo que es lo mismo, si tiene el signo +, se dice que el error ó equivocacion es por exceso; y si el resultado tiene el signo -, entónces el error ó equivocacion se dice, que es por defecto.*

2.<sup>o</sup> *Sustitúyase despues 2 por x en el primer miembro de la misma ecuacion; si, ejecutadas todas las operaciones resulta 0, el número 2 será raiz de la ecuacion; si no lo es, no lo será. Y dicho resultado espresará el error ó equivocacion que se ha cometido: siendo por exceso, si tiene el signo +, y por defecto si tiene el signo -.*

3.<sup>o</sup> *Si las substituciones de los números 1 y 2 diesen un mismo error numérico, lo que podrá suceder en algunos casos, se procederá á substituir 3 por x en el primer miembro de la mencionada ecuacion; y se averiguará el error ó equivocacion, que produzca, en los mismos términos que se acaba de espresar.*

4.<sup>o</sup> *Hecho esto, deberémos observar cual de los números supuestos 1 y 2 da menor error numérico, es decir, que tenga ménos unidades, cualquiera que sea su signo; y*

procederemos á encontrar la correccion que se le debe hacer para aproximarse al verdadero. Esta correccion se halla, practicando la regla siguiente: multiplíquese el menor error numérico por la unidad positiva, si el espresado menor error numérico proviene del supuesto 2; y por la unidad negativa si dicho menor error numérico proviene del supuesto 1, atendiendo siempre á la regla de los signos; y divídase el producto por la diferencia de los dos errores, tomando por sustraendo el menor error numérico, es decir, el que tenga ménos unidades; y teniendo mucho cuidado con los signos. El cociente, que se obtenga, es lo que se llama la correccion; que se agregará con su signo al número de que provino dicho menor error; y haciendo la reduccion ó simplificacion, que convenga, se tendrá un resultado, que será el verdadero valor de  $x$ , ó de la raiz de la ecuacion, si esta es de primer grado; y si no lo es, se tendrá un valor mas aproximado á alguna de las raices, que todos los números supuestos.

En el caso de haber hecho el supuesto 3, si el error de este es menor numéricamente que el del 1, se multiplicará dicho error del 3 por 2; y el producto, se dividirá por la resta que resulte de quitar del error del 1, el del 3, teniendo mucho cuidado con los signos; y el cociente será la correccion que se debe hacer al 3. Y si el error del 1 fuese numéricamente menor que el del 3, se multiplicará el error del 1 por  $-2$ , y el producto se dividirá por lo que resulte de restar el error del 1, del error del 3; y el cociente espresará la correccion que se debe hacer al 1.

Cuando las raices son menores que la unidad, y los coeficientes de la ecuacion son muy grandes, la correccion que resulta para el 1 es muy pequeña; y agregada al 1, suele dar por resultado cero en enteros, y varios nueves en los lugares decimales. Entónces se toma para tercer número supuesto un solo 9, esto es 0,9, y se continúa por el método general que vamos á espresar.

5.º El valor que nos resulte, despues de agregada la correccion al número supuesto que produce el menor error numérico, y hecha la reduccion, destruccion ó simplificacion, se tomará por tercer número supuesto (ó por cuarto si fué necesario hacer el supuesto 3), supri-

miendo algunas cifras decimales, ó poniendo en vez de ellas una unidad mas al último guarismo que se conserve, si el primero de los que se suprimen es 5 ó mayor que 5. Se sustituye este número supuesto por  $x$  en el primer miembro de la mencionada ecuacion; si dicho primer miembro se reduce á 0 por esta sustitucion, aquel número supuesto es raiz de la ecuacion; y si dicho primer miembro no se reduce á cero, el número, que resulte para dicho primer miembro, espresará el error ó equivocacion que se comete de suponer aquel número por  $x$ , y se deberá tener cuidado de espresar el signo del valor que resulta para el mencionado primer miembro, aunque sea el signo  $+$ , pues esto es muy esencial.

Para encontrar la correccion, que se debe hacer al número supuesto, que da el menor error numérico de todos, multiplicarémolos el espresado menor error por la diferencia entre los dos números supuestos, que producen los dos menores errores, pero poniendo siempre por minuyendo el número, que produce el menor error numérico de todos; y el producto se dividirá por la diferencia de los dos menores errores, tomando siempre por sustraendo el menor error numérico de todos, y poniendo muchísimo cuidado en atender á la regla de los signos (112). El cociente que se obtenga, espresará la correccion que se debe hacer al número que produce el menor error numérico de todos; la cual se agregará con su signo al espresado número que produce el menor error numérico; y hecha la reduccion, destruccion á simplificacion que convenga, se obtendrá un número, que se acercará á una de las raices de la ecuacion propuesta, mas que cada uno de los anteriores.

6.º Este resultado, ya como se ha obtenido, ya suprimiendo alguno ó algunos guarismos decimales, ó bien añadiendo en vez de ellos una unidad al último guarismo que se conserva, si el primero de los que no se toman en consideracion es 5 ó mayor que 5, se tomará por otro número supuesto, y se sustituirá en el primer miembro de dicha ecuacion. Si le reduce á 0, será raiz de ella; y si no le reduce á 0, el número que resulte será el error. Y para encontrar la correccion, que se debe hacer al núme-

ro que haya producido el menor error numérico de todos, se multiplica dicho menor error por la diferencia entre los dos números que producen los dos menores errores, poniendo siempre por minuendo el número, que produce el menor de todos los errores; y el producto se dividirá por la diferencia de los dos menores errores, poniendo siempre por sustraendo el menor de ellos.

El cociente, que se obtenga, será la corrección, que se debe hacer al número que haya producido el menor de todos los errores, se agregará á dicho número; y hecha la simplificación, se tendrá un valor que se deberá aproximar á alguna de las raíces de la ecuación, mas que cada uno de los números supuestos anteriores.

7.º Se continuará del mismo modo hasta que se haya encontrado un valor, que sustituido por  $x$  en el primer miembro de la ecuación propuesta, dé cero por resultado; en cuyo caso, este número será raíz exacta de la ecuación; ó hasta que se halle para  $x$  un valor tan aproximado como el calculador juzgue que le conviene; en cuyo caso, este valor será una raíz aproximada de la ecuación.

8.º En el caso de que un error salga con el signo contrario á los anteriores, entónces hay precisamente (§ 170 s) al ménos una raíz real comprendida entre los dos números mas próximos de los que producen errores de signos contrarios; y para encontrar la corrección, se multiplicará el menor error numérico de los dos de signos contrarios procedentes de los números supuestos mas inmediatos entre sí, por la diferencia entre dichos dos números supuestos mas próximos de los que producen errores de signos contrarios, poniendo siempre por minuendo el número supuesto que produce el menor error numérico; y el producto se dividirá por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, que provienen de los números supuestos mas próximos entre sí, tomando siempre por sustraendo el menor error numérico de los dos; y el cociente que resulte será la corrección; la cual se añadirá al número supuesto que produzca el menor error numérico de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí. Lo que resulte se deberá tomar por otro número supuesto; si esta sustitucion reduce

á cero el primer miembro, dicho número supuesto será la raíz de la ecuacion; si dicho primer miembro no se reduce á cero, el resultado de la sustitucion será el error que da el citado número supuesto; y cualquiera que sea el signo que tenga, como los dos errores anteriores eran de signos contrarios, este que sacamos ahora será de signo contrario á uno de ellos: y la correccion se deberá hacer á aquel número supuesto que produce el menor de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí; lo que se efectuara por la regla, que acabamos de dar; y se continuará del mismo modo hasta encontrar un valor que reduzca á cero el primer miembro de la ecuacion, en cuyo caso este número será raíz de ella. Si esto no se consigue, y el calculador juzga que el valor ya encontrado le basta para su objeto, suspenderá allí sus operaciones, y tendrá una raíz aproximada de la mencionada ecuacion.

En algunas ocasiones, aun quando se tengan dos valores que hayan dado errores de signos contrarios, se puede llegar al verdadero resultado, encontrando la correccion por medio de los dos números supuestos que dan menores errores, como veremos (§§ 197 hh, 197 ii ecs. 21 y 21'), y á veces se halla el resultado con ménos supuestos; mas á pesar de esto, conviene encontrar la correccion por medio de los dos supuestos que producen errores de signos contrarios, procedentes de números supuestos mas próximos entre sí; pues de este modo no sólo nos vamos aproximando á la raíz, sinó que se presenta á nuestra vista su aproximacion, pues siempre se va viendo entre qué números debe hallarse. Por manera, que la tenemos siempre como encerrada entre los dos números mas próximos entre sí, que producen errores de signos encontrados, y esto nos hace caminar con un paso seguro hasta obtener lo que buscamos. Si queremos, en este caso, llegar al resultado por el camino mas breve, quando se observe que los errores de signos encontrados difieren mucho entre sí, harémos supuestos intermedios entre los dos números que los producen, hasta que dichos errores tengan igual número de guarismos; y quando hayamos conseguido esto, hallarémos la correccion, valiéndonos de los dos supuestos, que dan errores

de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, y la correccion se hallará al número de estos dos, que produzca el menor de los dos errores de signos contrarios.

Conviene percibir muy bien esto; porque hay ocasiones, como se verá (§ 197 dd ec. 16) en que la correccion no se halla, valiéndose de los números que producen los dos menores errores; pues allí se observa que los errores 3.º, 4.º, 5.º y 6.º, van creciendo numéricamente, y sin embargo se halla la correccion por medio de este error y el que resulta positivo que es mayor que todos.

9.º En general, la equivocacion ó error, que se debe obtener desde el tercer supuesto en adelante, debe ser menor, al ménos, que una de las equivocaciones ó errores, que dan los dos números supuestos, que han servido para encontrar la correccion; y en el caso de que la sustitucion de un número supuesto, calculado por dos anteriores, produzca un error mayor y del mismo signo (\*) que los dos errores que han servido para determinarle por medio de la correccion, ó un error igual al anterior, entónces hay dos circunstancias que considerar.

1.<sup>a</sup> Si el mayor error, que se obtiene, es el del tercer número supuesto, que se ha deducido por la correccion hallada por los supuestos 1 y 2 (ó 1 y 3, cuando se haya hecho este tercer supuesto), entónces puede ser esto indicio de que, teniendo las raices valores numéricos muy grandes respecto de los números supuestos 1 y 2, sea tan corta la diferencia que produzcan estos números en los errores, que no basten para encontrar la correccion oportuna, que conduzca á un número que dé un error menor que uno ó los dos de los errores anteriores; y tambien puede provenir de estar muy próximas las raices: en este caso, conviene tomar para primeros supuestos, números que disten mas entre sí.

2.<sup>a</sup> Si el salir un error del mismo signo y mayor que los anteriores, ó igual con el último, fuese despues de ha-

---

(\*) Si fuese mayor numéricamente, pero de signo contrario á los errores anteriores, ya teniamos como encarcelada una raiz real al ménos; y por lo espuesto n.º 8.º determinaríamos una raiz.

ber dado otras equivocaciones menores, entónces aquello es indicio de que la ecuacion propuesta tiene raices imaginarias en que la parte real ó el factor que multiplique á  $\sqrt{-1}$  no se halla muy distante de alguna de las raices.

Si se obtienen correcciones, que cambien la ley de los números supuestos, es indicio de que hay varias raices, que no se diferencian mucho de dichos supuestos; y cuando se advierta que ya siguen un orden constante, tanto los errores como las correcciones, es indicio de que ya aquellos números supuestos están como en la esfera de actividad de una sola de las raices; y que, yéndose acercando cada vez mas á ella, se conseguirá muy pronto el determinarla.

10.º El procedimiento, que se debe seguir en todas estas circunstancias para conciliar la exactitud y seguridad con la sencillez y brevedad, es el siguiente. Tómense por números supuestos el 10, el 100, el 1000, ó en general la unidad seguida de ceros, hasta que la equivocacion ó error que resulte, varíe de signo, ó que por la naturaleza de la ecuacion se vea que, con sustituir mayores números, jamás se conseguirá que el error ó equivocacion cambie de signo. Si se logra obtener cambio de signo, en muchos casos se podrá continuar el método combinando de dos en dos varios de los errores con sus respectivos números supuestos; pero lo mas seguro y breve en general es tomar como dos supuestos primitivos los dos números mas próximos entre sí de los que producen errores de signos contrarios, hallando por ellos la correccion que se debe hacer al número de dichos dos supuestos, que produce menor error numérico. Y se continuará el método, tomando siempre para determinar la correccion los dos números supuestos mas próximos entre los que producen errores de signos contrarios. Cuando los números supuestos que producen errores de signos contrarios, disten ó se diferencien mucho entre sí, podrá el calculador hacer algun otro supuesto intermedio para encontrar errores de signos contrarios, cuyos números se hallen mas próximos entre sí: elijiendo, para estos supuestos intermedios, números redondos, esto es, que se compongan ó de decenas solas, ó de centenas solas, ó de mi-

llares solos etc., para que se obtenga el resultado con menos molestia.

Si se quiere conseguir el objeto con la mayor brevedad, se deberán hacer supuestos intermedios entre los números que producen errores de signos contrarios, hasta que los errores tengan igual número de guarismos en enteros; y, despues que esto se haya logrado, se continúa el método por el procedimiento que acabamos de manifestar.

Si suponiendo  $x=10$ ,  $x=100$ ,  $x=1000$  etc., no se consigue cambio de signo, se sustituirán por  $x$  en dicho primer miembro los números  $-1$ ,  $-10$ ,  $-100$ ,  $-1000$  etc., hasta que se logre que cambie de signo la equivocacion ó error, ó se vea por la naturaleza de la ecuacion, que jamás esto se logrará. Luego que se haya conseguido cambio de signo en el error ó equivocacion, se elejirán, para seguir el método, los números mas próximos entre sí, que dan los errores ó equivocaciones de diferente signo; y se continuará como se ha dicho (8<sup>o</sup>) hasta encontrar un valor exacto de la raiz, ó un valor tan aproximado como el calculador juzgue conveniente.

Si no se logra cambio de signo en el error por estos supuestos, es señal ó de que no hay ninguna raiz real en aquella ecuacion, ó que las hay en número par; y sus valores se hallan comprendidos entre dos de los supuestos hechos, esto es, entre los números  $1$ ,  $10$ ,  $100$ ,  $1000$ , etc.,  $-1$ ,  $-10$ ,  $-100$ ,  $-1000$  etc. Y para determinarlas, procederémos del modo siguiente.

11.<sup>o</sup> Fórmese la ecuacion derivada de la ecuacion primitiva; lo que se consigue multiplicando el esponente de la incógnita en cada término, por su coeficiente, disminuyendo cada esponente en una unidad, suprimiendo el término constante de la primitiva é igualando á cero todo este conjunto de términos. Se resolverá esta ecuacion derivada, encontrando sus raices reales por el procedimiento anterior; lo cual será mas fácil, pues la ecuacion derivada resulta siempre un grado inferior á la primitiva. Los valores, que se obtengan para las raices de la ecuacion derivada, se sustituirán en la ecuacion primitiva; si diesen resultados de signos contrarios á los que se hayan obtenido por los otros supuestos, se tomarán para dos primeros números

supuestos respecto de esta combinacion, aquellos dos números mas próximos entre sí, de los que produzcan errores de signos contrarios; y con ellos se continuará hasta encontrar las raices reales que contengan, sean exactas, sean aproximadas. Y si ninguno de estos valores produce mudanza de signo, es señal de que ya no existe ninguna raiz real en la ecuacion.

No se necesitan encontrar todas las raices de la ecuacion derivada; pues, segun se vayan encontrando podrán sustituirse estos valores en la ecuacion de que se ha encontrado la ecuacion derivada; si da error de signo contrario á los anteriores, por medio de este y el que corresponde al número mas próximo de los conocidos de signos contrarios, se hallará una de las raices; despues, en vez de seguir sacando los valores de la ecuacion derivada para sustituirlos en la principal, será generalmente mas breve tratar de hallar las demas raices de la propuesta, como vamos á manifestar.

12.º Obtenida ya, por los procedimientos anteriores una de las raices, se divide todo el primer miembro de la ecuacion dada por  $x$  ménos el valor hallado para la raiz, si ha sido un número positivo; ó por  $x$  mas dicho número si este ha resultado negativo; cuya operacion se practica del modo explicado (120). El cociente que obtengamos, se igualará con cero; y por el mismo procedimiento, que acabamos de espresar (1º al 11º), hallaremos una raiz de esta última ecuacion, que será tambien raiz de la primitiva; dividiremos el primer miembro de la ecuacion, que acabamos de considerar, por  $x$  ménos esta segunda raiz, si se obtuvo para ella un valor positivo, ó por  $x$  mas dicho valor, si se obtuvo un valor negativo.

13.º El cociente que obtengamos, le igualaremos con 0; y por el mismo procedimiento se hallará una raiz de esta última ecuacion, que tambien será raiz de todas las anteriores, inclusa la primitiva; y continuando del mismo modo, llegaremos por último, si la ecuacion tiene reales todas sus raices, á un cociente del primer grado, ó de dos términos, en que el uno contenga la incógnita y el otro sea un número; y este será la última raiz de la ecuacion, pero con un signo opuesto al que tenga en dicho cociente. Todo

lo cual se aclarará por la resolución de las cuestiones en que vamos á entrar (\*).

197 q. Hemos aplicado el método á la ecuacion ((1) § 197 g) que nos ha dado dos números positivos 2 y 7 para las raíces; lo hemos aplicado (197 ll) á la (ec. 2), que da un número positivo y otro negativo. Ahora nos dirigimos á aplicarlo á otras ecuaciones, tambien del segundo grado, en que se manifiesten las demas circunstancias que pueden ocurrir, cuales son: las de ser negativas las dos raíces, presentar las circunstancias que se han espresado en el número 9º de la regla, la de ser inconmensurables las dos raíces, y la de ser imaginarias; y como los resultados que obtengamos por este nuevo procedimiento se pueden hallar por lo espuesto al tratar de las ecuaciones del segundo grado, tenemos un medio de comprobacion; y hallándose nuestros resultados idénticos con los que dan los procedimientos conocidos, se concebirá con claridad y exactitud, que nuestro nuevo método debe inspirar una completa confianza, aunque en los demas casos no se pueda comparar con los resultados de los otros métodos, por ser ellos insuficientes: bien que por otra parte no se

---

(\*) Para manifestar la utilidad que trae la consideración de la ecuacion *derivada* de la propuesta, recordaremos, que cuando por la sustitucion de los números 1, 10, 100 etc. y  $-1$ ,  $-10$ ,  $-100$  etc. no se consiguen errores de signos contrarios, se debe inferir que ó no hay ninguna raíz real en aquella ecuacion, ó que las hay en número par, y sus valores se hallan comprendidos entre dos de los supuestos hechos; y para determinarlas, hemos dicho que se recurra á la ecuacion *derivada*; que, siendo por una parte de un grado ménos elevado que la ecuacion propuesta, presenta alguna mayor sencillez para encontrar sus raíces; y si la propuesta es de grado par, que es en las que mas generalmente hay que acudir al recurso de la *derivada*, esta es de grado impar que siempre tiene (170 s... 1.º) al ménos una raíz real. Ademas, por la teoría de los *máximos* y *mínimos*, resulta (II § 166 y siguientes) que las raíces de la ecuacion *derivada* son los valores que tiene la incógnita para los *mayores* y *menores* valores del primer miembro de la ecuacion propuesta; y como estos valores mayores ó menores del primer miembro, cuando este no es *cero*, son justamente los mayores y menores valores que pueden tener los errores, resulta que por la resolución de la ecuacion *derivada*, venimos en conocimiento de si existen casos en la propuesta de haber errores que sean ó mayores que los que le preceden y siguen inmediatamente, ó menores que los que le preceden y siguen inmediatamente; y si los hay, y se llegan á determinar, tendremos límites dentro de los cuales deberán hallarse las raíces, si es que las hay. Sobre cuyo punto se harán algunas otras aclaraciones en la segunda nota del § 197 dd.

necesita semejante comprobacion con ningun otro procedimiento extraño; puesto que, por los resultados que obtengamos, volveremos á formar las primitivas ecuaciones; y por lo mismo este nuevo método reúne cuantas circunstancias son apetecibles; pues que, despues de haber descompuesto las ecuaciones, hallando sus raices, las volveremos á recomponer, que es la prueba mas decisiva de su exactitud.

En seguida, pasaremos á resolver ecuaciones indistintamente de todos los grados.

197 r. Sea la ecuacion  $x^2+32x+87=0$  (3).

Para aplicarle la regla, supondremos  $x=1$ ; y sustituyendo este valor en el primer miembro, da

$$1^2+32\times 1+87=1+32+87=110$$
 (\*),

pero como debía dar 0, resulta una equivocacion ó error de +110.

Tomemos por *segundo número supuesto* el 2; y sustituyéndole en el primer miembro de dicha ecuacion, se convertirá en  $2^2+32\times 2+87=+155$ ; que es el error.

Aquí el supuesto que da menor error es el 1; y para encontrar su correccion, multiplicaré el error +110 por la unidad negativa y tendré -110. Esto lo dividiré por la diferencia de los errores que es  $155-110=45$ ; y tengo -2,4 para la correccion; que, agregada al 1, da  $1-2,4=-1,4$ .

Tomo este valor -1,4 por *tercer número supuesto*; y sustituyéndole en el primer miembro de dicha ecuacion, resulta

$$(-1,4)^2+32\times -1,4+87=1,96-44,8+87=+44,16.$$

Como este error es menor que todos, hallo la correccion al -1,4. Para esto multiplico su error por la diferencia entre los dos números supuestos que dan los menores errores, que son 1 y -1,4, poniendo por minuendo el que da el menor error numérico; luego deberé multiplicar el 44,16 por  $-1,4-1=-2,4$  y obtengo -105,984; que dividido por la diferencia de los dos expresados errores, que es  $110-44,16=65,84$ ; y resulta -1,6

(\*) En comprobacion de que nada importa el padecer por este método alguna equivocacion, vamos á dejar correr este descuido, que cometimos en un principio. En efecto, la suma de los números  $1+32+87$  es 120, y no 110. No echamos de ver esta errata hasta volver á repasar los cálculos; y como aun con este yerro, hemos obtenido el resultado verdadero, no hemos querido corregirle *ex-profeso*, tanto para que se compruebe mas la verdad de nuestros asertos (197 m), cuanto para que los principiantes aprovechen esta ocasion de enmendar el yerro, y seguir por si el cálculo.

para la correccion; que, agregada al  $-1,4$ , se tiene  
 $-1,4-1,6=-3$ .

Tomo este valor  $-3$  por *cuarto número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de la ecuacion, le convierte en  
 $(-3)^2+32 \times -3+87=9-96+87=96-96=0$ .

Y como dicho primer miembro se reduce á *cero*, que es lo mismo que hay en el segundo miembro, se infiere (170 e), que  $-3$  es raiz de la ecuacion.

Dividiendo (120) su primer miembro por  $x+3$ , resulta por cociente  $x+29$ ; que igualado á 0, y trasladando, se tiene  $x=-29$ , que es la otra raiz, como deberán verificar los principiantes, resolviendo dicha ecuacion (3) en virtud de lo espuesto (168).

197 rr. Apliquemos nuestro método á la ecuacion

$$x^2-2x-956483=0 \quad (4).$$

Suponiendo  $x=1$ , y sustituyendo este valor en su primer miembro, se convierte en  $-956484$ , que será el *error*.

Sustituyendo 2 por  $x$  en dicho primer miembro, resulta  $-956483$  de *error*; y como es menor que el anterior, deberá hallar la correccion al 2. Para esto, multiplico su error por la unidad positiva; y el producto será  $-956483$ . Dividido esto por la diferencia de los dos errores, que es

$-956484-(-956483)=(\S 112)-956484+956483=-1$ , resulta para la correccion  $+956483$ . La cual, agregada al 2, da 956485.

Tomando este valor 956485 por *tercer número supuesto*, da de *error* un número de doce guarismos, que es muchísimo mayor que los errores anteriores, que ninguno pasa de seis guarismos. Esto indica que nos hallamos en la circunstancia 1.<sup>a</sup> del número 9.<sup>o</sup> de la regla, esto es, de ser las raices sumamente grandes en comparacion de los números supuestos 1 y 2. Lo cual se comprueba solo con ver el tercer término de dicha ecuacion que tiene seis guarismos; y así deberemos sustituir por  $x$  los números 10, 100, 1000 etc. hasta ver si logramos cambio de signo en el error.

El supuesto  $x=10$ , da  $-956403$  de *error*;  $x=100$ , da  $-946683$ ;  $x=1000$ , da  $+41517$  de *error*; que, siendo ya positivo, indica (§ 170 s) que hay al ménos una raiz real comprendida entre 100 y 1000; es decir, que hay una raiz mayor que 100 y menor que 1000.

Para continuar el método, se podrán combinar de diferentes modos los números supuestos; pues podemos combinar el supuesto 1, con el supuesto 1000, que dando errores de signos con-

trarios, indican que la raíz que buscamos se halla entre 1 y 1000; lo que en efecto se verifica, pues que sabemos que se halla entre 100 y 1000. También podríamos combinar el supuesto 10 con el 1000; pues que dando ambos errores de signos contrarios, no hay duda en que la raíz se halla entre 10 y 1000; pero lo mas breve es buscar la raíz entre 100 y 1000.

No obstante, como es conveniente hacer ver la exactitud y excelencia singular del método, empezaremos por lo mas desventajoso; pues si por este medio hallamos el verdadero resultado, es una prueba de la prerrogativa singular del método. Para combinar el supuesto 1 con el supuesto 1000, observaremos que el error que da el 1000, siendo numéricamente menor que el del 1, debemos hallar la correccion al 1000. Para esto, multiplico el error 41517 por  $1000-1=999$ ; lo que da 41475483. Esto lo divido por la diferencia de los errores del 1 y del 1000, que es  $-956484-41517=-998001$ ; y resulta  $-41,5$  para la correccion; la cual, agregada al 1000, da  $1000-41,5=958,5$ .

Tomemos este valor 958,5 por *tercer número supuesto*; y sustituido en el primer miembro da  $-39677,75$  de error, que siendo de signo contrario al del 1000, se infiere que al ménos una raíz real se halla entre 958,5 y 1000; y como el error del 958,5 es menor, debo hallar la correccion al 958,5. Para esto, multiplico su error  $-39677,75$  por la diferencia entre los dos números supuestos, mas próximos entre sí, que producen errores de signos contrarios, esto es, por  $958,5-1000=-41,5$ ; lo que da 1646626,625. Esto lo divido por la diferencia de los dos errores de signos contrarios que corresponden á los dos números supuestos mas próximos entre sí, que (112) es 81194,75; y obtengo 20,2 para la correccion; la cual, agregada al 958,5, da 978,7.

Tomando este valor 978,7 por *cuarto número supuesto*; y sustituido en el primer miembro, da  $-586,71$  de error; que siendo de signo contrario al del 1000, se infiere que una raíz al ménos se halla entre 978,7 y 1000. Y como el error del 978,7 es menor, debo hallar la correccion al 978,7. Para esto, multiplico su error  $-586,71$  por la diferencia de los dos números supuestos mas próximos que producen los errores de signos contrarios, que, poniendo siempre por minuendo el que da el menor error numérico, es  $978,7-1000=-21,3$ ; lo que da  $+12496,923$ . Esto lo divido por la diferencia de los dos errores de signos contrarios que corresponden á los números mas próximos entre sí, que son los 978,7 y 1000. Luego deberé dividir por  $41517--586,71=41517+586,71=42103,71$ ; y

obtengo 0,29 para la correccion; que, agregada al 978,7, da 978,99.

Tomemos 979 por *quinto número supuesto*; y como sustituido por  $x$  en el primer miembro de dicha ecuacion, le reduce á 0, inferimos (170 e), que el número 979, es raiz de la (ec. 4). Dividiendo (120) el primer miembro de dicha (ec. 4) por  $x-979$ , resulta por cociente  $x+977$ ; que, igualado á *cero*, y trasladando, se tiene  $x=-977$ . Luego las dos raices son  $x=979$  y  $x=-977$ .

Hallando la correccion, que se debe hacer al 1000, por el error del 100, resulta para la correccion  $-37,8$ ; que, agregada al 1000, da  $1000-37,8=962,2$ .

Tomando este valor 962,2 por *tercer número supuesto*, da  $-32578,56$  de *error*. Para encontrar la correccion al 962,2, se multiplica por  $-37,8$ ; y se divide por 74095,56; y resulta  $+16,9$  para la correccion; que, agregada al 962,2, da 979,1, que podemos ya tomar por 979.

Donde aparece comprobado, que es siempre mas ventajoso elegir por primeros números supuestos aquellos que son mas próximos entre los que producen errores de signos contrarios; y que el método es tal, que, aunque se elijan otros cualesquiera de los que producen errores de signos contrarios, llegamos á obtener el mismo resultado, aunque con algun trabajo mas.

Veamos lo que resultaría empezando por los supuestos negativos. Supongamos  $x=-1$ , y el primer miembro se convertirá en  $1+2-956483=-956480$ , que será el *error*.

Suponiendo  $x=-10$ , resulta  $-956363$  de *error*.

Suponiendo  $x=-100$ , da  $-946283$  de *error*.

Suponiendo  $x=-1000$ , se tiene  $+45517$  de *error*; y como este valor es ya positivo, es indicio seguro é infalible (§ 170 s) de que al ménos uno de los valores de  $x$  ó una de las raices de la (ec. 4), se halla entre el  $-100$  y el  $-1000$ . Y para encontrar su valor por el camino mas breve y sin rodéos, deberémos hallar la correccion al  $-1000$ , teniendo en consideracion el supuesto  $-100$ . Para esto, multiplico 45517 por  $-1000--100=-1000+100=-900$ ; y sacó  $-40965300$ . Esto lo divido por  $-946283-45517=-991800$ ; y resulta 41,3 para la correccion; que, agregada al  $-1000$ , se tiene  $-958,7$ .

Tomando  $-958,7$  por *tercer número supuesto*, se tiene  $-35459,91$  de *error*; que, multiplicado por 41,3, da  $-1464494,283$ ; y dividido esto por  $45517--35459,91=80976,91$ , resulta  $-18,08$  para la correccion. La cual, añadida al  $-958,7$ , se tiene

$$-958,7-18,08=-976,78.$$

Tomando este valor  $-976,78$  por *cuarto número supuesto*, resulta  $-9430,2716$  de *error*, y  $-0,18$  para la correccion; que, agregada al  $-976,78$ , resulta  $-976,96$ , que reputándolo por  $-977$ , tenemos la raíz negativa de la ecuacion; y dividiendo el primer miembro por  $x+977$ , se obtiene por cociente  $x-979$ ; que igualado á *cero*, y trasladando, resulta  $x=979$ , que es la otra raíz; donde aparece la fecundidad y exactitud del método; pues obtenemos por este medio los mismos resultados de ántes. Los discípulos deberán resolver la (ec. 4) por la regla (168), y hallarán los mismos resultados que se acaban de obtener.

197 s. Pasemos ya á una ecuacion cuyas dos raíces sean incommensurables; y sea por ejemplo la  $x^2-2=0$  (5).

Suponiendo  $x=1$ , resulta  $-1$  de *error*.

Suponiendo  $x=2$ , resulta  $2$  de *error*. Por lo que se debe hallar la correccion al 1. Para esto, multiplico su error por la unidad negativa, y tengo  $+1$ ; dividiendo esto por la diferencia de los errores que es  $2--1=2+1=3$ , resulta  $0,333$  para la correccion; que, agregada al 1, da  $1,333$ .

Tomo  $1,33$  por *tercer número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de la (ec. 5) da  $-0,2311$  de *error*; y como es de signo contrario al del 2, infiero que entre  $1,33$  y 2 hay al ménos una raíz real; y siendo menor el error del  $1,33$ , hallo la correccion á este número, multiplicando su error  $-0,2311$  por la diferencia de los dos números supuestos mas próximos entre sí, de los que producen errores de signos contrarios, que es  $1,33-2=-0,67$ , lo que da  $+0,154837$ ; y dividiendo este producto por la diferencia de los dos errores de signos contrarios procedentes de los números supuestos mas próximos, que es  $2--0,2311=2+0,2311=2,2311$ , obtengo para la correccion  $+0,0693$ ; que, agregada al  $1,33$ , da  $1,3993$ .

Tomando  $1,4$  por *cuarto número supuesto*, da  $-0,04$  de *error*; y como es de signo contrario al del 2, infiero que entre  $1,4$  y 2 hay al ménos una raíz real, y siendo menor el error del  $1,4$ , hallo la correccion á este número. Para esto, multiplico su error  $-0,04$  por  $1,4-2=-0,6$ , y obtengo el producto  $+0,024$ ; que dividido por  $2--0,04=2+0,04=2,04$ , resulta  $+0,012$  para la correccion; que, agregada al  $1,4$ , da  $1,412$ .

Tomando este valor  $1,412$  por *quinto número supuesto*, da  $-0,006258$  de *error*. Para hallar la correccion que se debe hacer al  $1,412$  multiplico su error por  $1,412-2=-0,588$ ; y dividiendo el producto  $+0,003681904$  por la diferencia de los

errores de signos contrarios procedentes de números supuestos mas próximos entre sí, que es

$2 - 0,006258 = 2 + 0,006258 = 2,006258$ , da 0,00183 para la corrección; que, agregada al 1,412, da 1,41383.

Tomando 1,414 por *sexto número supuesto*, da  $-0,000644$  de *error*. Para encontrar la corrección, que se debe hacer al 1,414, multiplico su error por  $1,414 - 2 = -0,586$ ; y dividiendo el producto  $+0,000377384$  por  $2 - 0,000644 = 2 + 0,000644 = 2,000644$ , hallo 0,00018 para la corrección; que, agregada al 1,414 da 1,41418 que podemos reputar en 1,4142, que es la raíz cuadrada del 2, tomada positivamente, como en efecto debe ser; pues que la (ec. 5) trasladando el 2 al segundo miembro y despejando la  $x$  (§ 151), da  $x = \pm \sqrt{2}$ ; y estrayendo la raíz cuadrada (164) se tiene  $x = 1,4142$ .

Para encontrar por nuestro método la raíz negativa, no hay mas que dividir el primer miembro de la (ec. 5) por  $x - 1,4142$ , lo que da por cociente  $x + 1,4142$ ; siendo tal la exactitud que, para destruirse con el  $-2$ , resulta  $+1,99999275 \&c.$ ; y trasladando se tiene  $x = -1,4142$ ; que es la segunda raíz.

Propongámonos otro ejemplo de raíces inconmensurables; pero que ademas ofrezca la dificultad espresada (9.º de la regla), y sea por ejemplo la  $x^2 - 2213 = 0$  (6).

El supuesto  $x = 1$ , da  $-2212$  de *error*.

El supuesto  $x = 2$ , da  $-2209$  de *error*. Como este es numéricamente menor que el anterior, hallaré la corrección al 2. Para lo cual, multiplico su error por la unidad positiva; lo que da por producto  $-2209$ . Esto lo divido por la diferencia de los dos errores, que (112) es

$-2212 - -2209 = -2212 + 2209 = -3$ ; y obtengo 736 para la corrección; que, agregada al 2, da 738.

Tomemos este valor por *tercer número supuesto*; y substituido en el primer miembro de dicha ecuación, resulta un *error* de 542431; el cual, siendo mayor que los dos anteriores, indica que nos hallamos en el caso que espresa el número (9.º) de la regla (º). Para continuar el método, supondré  $x = 10$ , lo que

(\*) En la edición anterior no echamos de ver, que, aunque este error es mayor que los precedentes, sin embargo sigue contrario á ellos, se puede resolver por el número 8.º de la regla, sin necesidad de ocurrir á los procedimientos de su número 9.º Sin embargo, tanto para manifestar la fecundidad del método, como para que se ejerciten los principiantes, continuaremos por el procedimiento del número 9.º, exhortando á los principiantes á que resuelvan esta ecuación por el método del número 8.º de la regla.

da  $-2113$  de *error*; suponiendo  $x=100$  resulta  $+7787$  de *error*; y siendo este ya positivo, manifiesta por las mismas razones, dadas respecto de la (ec. 4), que hay al ménos un valor de  $x$  comprendido entre 10 y 100, es decir, que uno de los valores de  $x$  es mayor que 10 y menor que 100. De estos dos errores, el que tiene menor valor numérico es el  $-2113$ ; y tomando por números supuestos el 10 y el 100, deberé hallar la correccion al número 10. Para esto, multiplico su error por  $10-100=-90$ , lo que da 190170. Esto lo divido por  $7787-2113=9900$ ; y obtengo 19,2 para la correccion; que, agregada al 10, da 29,2.

Tomando este valor 29,2 por *tercer número supuesto*, hallo  $-1360,36$  de *error*; que, siendo de signo contrario al del 100, indica que entre 29,2 y 100 se halla al ménos una raíz real; y como el error del 29,2 es menor, debo encontrar la correccion al 29,2. Para esto, multiplico su error  $-1360,36$  por  $29,2-100=-70,8$ . Y dividiendo el producto  $+96311,788$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios que proceden de números mas próximos entre sí, que es  $7787-1360,36=9147,36$ , hallo 34,7 para la correccion; la cual, agregada al 29,2, da 63,9.

Tomando este valor 63,9 por *cuarta número supuesto*, hallo 1870,21 de *error*; que, siendo de signo contrario al del 29,2 indica, que entre 29,2 y 63,9 se halla al ménos una raíz real; y como el error del 29,2 es el menor, hallo la correccion al 29,2. Para esto, multiplico su error  $-1360,36$  por  $29,2-63,9=-34,7$ ; y dividiendo el producto  $47204,492$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, que proceden de números mas próximos entre sí, que es  $1870,21-1360,36=3230,57$ , resulta  $+14,6$  para la correccion al 29,2; que, agregándosela, da 43,8.

Tomando el 43,8 por *quinto número supuesto*, da  $-294,56$  de *error*; que, siendo de signo contrario al del 63,9, indica, que entre 43,8 y 63,9 hay al ménos una raíz real; y como el error del 43,8 es menor, hallo la correccion al 43,8. Para esto, multiplico su error  $-294,56$  por  $43,8-63,9=-20,1$ ; y dividiendo el producto  $5920,656$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios que proceden de números mas próximos entre sí, que es  $1870,21-294,56=2164,77$ , resulta  $+4,03$  para la correccion; que, agregada al 43,8, se convierte en 47,83.

Tomando este valor 47,83 por *sesto número supuesto*, da  $+74,7089$  de *error*; y  $-0,81$  para la correccion al 47,83;

que, agregándosele, resulta 47,02; y como la verdadera raíz de 2213 se halla (164) que es 47,04, la puedo reputar ya por exacta.

Dividiendo  $x^2-2213$  por  $x-47,02$  resulta por cociente  $x+47,02$ ; que, igualado á *cero*, da  $x=-47,02$  para la otra raíz.

197 t. Propongámonos ahora una ecuacion, que solo tenga raíces imaginarias; y sea la más sencilla de su especie, á saber

$$x^2+1=0. (7).$$

Para aplicarle el método, supongamos  $x=1$ ; lo que da 2 de *error*. El supuesto  $x=2$  da 5 de *error*. Por consiguiente, debemos buscar la correccion al 1. Para esto, multiplico su error 2 por la unidad negativa; lo que dá -2 por producto. Dividiendo esto por  $5-2=3$ , dá para la correccion -0,67; la cual, agregada al 1, da 0,33.

Tomando este valor 0,33 por *tercer número supuesto*, da +1,1089 de *error*; y como es menor que los anteriores, hallaré la correccion al 0,33. Para esto, multiplico su error por -0,67; y dividiendo su producto por la diferencia de los errores, resulta para la correccion -0,88; que, agregada al 0,33, da -0,55.

Tomando este valor -0,55 por *cuarto número supuesto*, da 1,3025 de *error*; el cual siendo mayor que el producido por el supuesto 0,33, conviene hallar la correccion que se debe hacer á este. Para lo cual, multiplico su error, que es 1,1089, por -0,88, y dividiendo el producto por la diferencia de los errores, resulta 5 para la correccion; la cual, agregada al 0,33, da 5,33.

Tomando este valor 5,33 por *quinto número supuesto*, da un *error* mayor que todos los anteriores; lo cual indica que nos hallamos en el caso del núm. 9.º de la regla. Para indagar si hay alguna raíz real, supondrémos  $x=10$ ; lo que da un *error* de 101; si supusiéramos  $x=100$ , el *error* sería 10001, y suponiendo  $x=1000$ ,  $x=10000$ , etc. siempre tendríamos errores, que irían creciendo indefinidamente; luego en este sentido no se debe esperar cambio de signo, ni por consiguiente ninguna raíz real.

Suponiendo  $x=-10$ , resulta 101 de *error*; suponiendo  $x=-100$ , da 10001 de *error*; y como suponiendo  $x=-1000$ ,  $x=-10000$  etc. iríamos obteniendo errores mayores y todos positivos, tampoco por este lado podemos esperar cambio de signo en el *error*.

Calculando la ecuacion derivada, resulta ser  $2x=0$ , que da  $x=\frac{0}{2}=0$ . Y como suponiendo  $x=0$ , el *error* que resulta, es 1 con signo positivo, que es el mismo que el signo de todos los de-

mas errores, debemos inferir que la ecuacion propuesta no tiene ninguna raiz real; por lo que las dos serán imaginarias, lo que en efecto así se verifica; pues trasladando y estrayendo la raiz, como se ha dicho (151), se tiene  $x = \pm \sqrt{-1}$ ; que, separando los valores, da  $x = +\sqrt{-1}$ ,  $x = -\sqrt{-1}$ .

Del mismo modo, hallaríamos que las raices de las ecuaciones  $x^2+20=0$ ,  $x^2+1000=0$ , y en general  $x^2 + \text{un número cualquiera } n=0$ ; eran todas imaginarias.

Apliquemos ahora nuestro método á la ecuacion  $x^2-14x=-54$ ; que sabemos por lo demostrado (169... 3.<sup>a</sup> y 170), que sus dos raices son imaginarias; veámos cómo nos lo manifiesta nuestro método. Para esto, la pondremos bajo esta forma

$$x^2-14x+54=0 \quad (8).$$

Suponiendo  $x=1$ , da 41 de *error*; suponiendo  $x=2$ , da 30 de *error*. Para encontrar la correccion al 2, multiplico 30 por 1, lo que da 30. Este producto lo divido por  $41-30=11$ ; lo que da 2,7 para la correccion; que, agregada al 2, da 4,7.

Tomando 4,7 por *tercer número supuesto*, da 10,29 de *error*. Para encontrar la correccion al 4,7, multiplico 10,29 por  $4,7-2=2,7$ ; lo que da 27,783. Esto lo divido por  $30-10,29=19,71$ , y obtengo 1,4 para la correccion; que, agregada al 4,7, da 6,1.

Tomando este valor 6,1 por *cuarto número supuesto*, resulta 5,81 de *error*. Para encontrar la correccion al 6,1, multiplico 5,81 por  $6,1-4,7=1,4$ ; lo que dá 8,134. Este producto lo divido por  $10,29-5,81=4,48$ , y obtengo 1,8 para la correccion; que, agregada al 6,1, da 7,9.

Tomando este valor 7,9 por *quinto número supuesto*, da 5,81 de *error*, que presenta la particularidad de ser el mismo que el anterior. Por lo cual, en realidad no sabemos á cual de los dos números supuestos 6,1 ó 7,9 debemos hallar la correccion. Pero, á cualquiera de ellos que la apliquemos, como ha de servir de divisor la diferencia de los errores, resulta que siendo estos iguales, dicha diferencia es *cero*; y no habiendo divisor no se puede continuar (°). Lo cual nos da á conocer que nos hallamos en el caso que espresa el núm. 9.<sup>o</sup> de la regla; y como con suponer

---

(\*) Mas adelante veremos, que cuando el divisor es *cero*, el cociente es *infinito*; y entónces siendo la correccion infinita es un indicio de que no tiene lugar lo que buscamos.

$x=10$ ,  $x=100$ ,  $x=1000$  etc.; y  $x=-10$ ,  $x=-100$ ,  $x=-1000$  etc., no lograremos jamás mudanza de signo, hallaremos la ecuacion derivada, que es  $2x-14=0$ ; la cual, da  $x=\frac{14}{2}=7$ .

Sustituyendo en la ecuacion (8), en vez de  $x$ , el valor 7, se nos convierte en  $+89$ ; que siendo positivo como los demas, no hay cambio de signo; y debemos inferir que las dos raices de dicha ecuacion son imaginarias, como así debía verificarse.

*Resolucion de las ecuaciones de tercer grado.*

---

197 u. La primera ecuacion, que resolveremos, será la de *Newton*, de que ya nos hemos ocupado (170 i); la cual, poniendo  $x$  en vez de  $y$ , por ser mas cómoda en los cálculos, resulta ser

$$x^3-2x-5=0 \quad (9).$$

Para aplicarle el método, supondremos  $x=1$ ; y su primer miembro se convertirá en  $(1)^3-2 \times 1-5$ ; y como  $(1)^3=1 \times 1 \times 1=1$ , y  $-2 \times 1=-2$ , esta espresion será  $1-2-5=1-7=-6$ , que será el *error* del 1.

Supongamos  $x=2$ ; y dicho primer miembro se convertirá en  $8-4-5=8-9=-1$ . Luego el *error* ó equivocacion es  $-1$ , que tiene menor valor numérico que el  $-6$ , que dió el 1. Para encontrar la correccion al 2, multiplico el error  $-1$  por la unidad positiva; lo que da  $-1 \times +1=-1$ . Esto lo debo dividir por la diferencia de los dos errores, sirviendo de sustraendo el numéricamente menor; luego el divisor será (§ 112)

$$-6-(-1)=-6+1=-5;$$

por lo que la correccion será  $0,2$ ; y como este resultado tiene el signo positivo, lo debemos añadir al 2, que fué el que dió menor error numérico, y resulta  $2+0,2=2,2$ .

Tomando este valor  $2,2$  por *tercer número supuesto*; y sustituyéndole en el primer miembro de dicha ecuacion, se convertirá en  $10,648-4,4-5=+1,248$ , que es el *error* ó equivocacion; y como este es mayor que el  $-1$  que dió el supuesto 2, debemos averiguar la correccion, que se debe hacer al 2. Para esto, multiplico su error  $-1$  por  $2-2,2=-0,2$ ; lo que da  $-1 \times -0,2=+0,2$ . Esto lo divido por la diferencia de los dos menores errores, que (112) es  $1,248-(-1)=2,248$ . Luego dicha correccion será  $=0,0889$ ; que, añadida al 2, da  $2,0889$ .

Tomemos  $2,089$  por *cuarto número supuesto*; y sustituyéndole en el primer miembro de la ecuacion, se convierte en  $-0,061769031$ ; luego este será el *error*; y como tiene menor

valor numérico que todos los anteriores, deberé hallar la corrección al 2,089. Para esto, multiplico dicho error por  $2,089-2=0,089$ ; y tengo  $-0,005497443759$ . Esto lo divido por la diferencia de los dos menores errores, tomando por sustraendo el menor de todos, que es

$$-1-0,061769031=-0,938230969;$$

y obtengo 0,00585 para la corrección; que, agregada al 2,089, da 2,09485.

Tomando este valor 2,09485 por *quinto número supuesto*, da  $+0,003332455159125$  de error; que siendo de signo contrario al del supuesto 2,089, indica que la raíz es mayor que 2,089 y menor que 2,09485. Y como el error de este es numéricamente menor que el del 2,089, debo hallar la corrección al 2,09485. Para esto, multiplico su error, suprimiendo los seis guarismos últimos, y quedando reducido á 0,003332455, por  $2,09485-2,089=0,00585$ , y obtengo 0,00002994; dividiendo esto por la diferencia de los dos errores, que, tomando nueve guarismos decimales en ambos, es

$$-0,061769031-0,003332455=-0,065101486,$$

hallo  $-0,0002994$  para la corrección; que, agregada al 2,09485, da 2,0945506.

Tomando este valor 2,0945506 por *sexto número supuesto* da  $-0,000009839274898385784$  de error; que, siendo negativo, y positivo el del 2,09485, indica que entre 2,0945506 y 2,09485, hay al menos una raíz real; y como el error del 2,0945506 es menor que el del 2,09485, debo hallar la corrección al 2,0945506. Para esto, multiplico su error, suprimiendo los seis últimos guarismos y quedando reducido á  $-0,000009839274898$  por  $2,0945506-2,09485=-0,0002994$ , y obtengo por producto el número

$$0,0000000029458789044612;$$

esto lo divido por la diferencia de los dos menores errores, que, tomando en ellos únicamente los doce primeros guarismos decimales, es

$-0,000009839274-0,003332455159=-0,003342294433$ , resulta 0,000008814 para la corrección; que, agregada al 2,0945506, da 2,0945514814.

Este valor se separa del que hemos visto (170 i) halló *Newton* solo en una unidad decimal del octavo lugar; y comprueba exactamente lo que dice *Lagrange* pág. 31 de su *Tratado sobre la resolución de las ecuaciones numéricas de todos los grados*, de ser menor que 2,09455149 y mayor que 2,09455147; pues, el guarismo que en nuestro resultado ocupa el octavo lugar, es 8,

que justamente se halla entre el 9 y el 7 de los valores encontrados por *Lâgrange*. Sabemos por otra parte, que nuestro resultado es exacto hasta el décimo lugar decimal; pues habiendo calculado otro número supuesto, la correccion no tiene ningun valor en el espresado lugar decimal.

197 v. *Newton* no calculó mas que esta raiz de su ecuacion, dando á entender con su silencio que las otras dos eran imaginarias. *Lagrange* por sus investigaciones, pág 29 de su citada obra, deduce que las otras dos raíces son imaginarias. Nuestro método tambien nos demuestra lo mismo. En efecto, si, en virtud de lo que se previene (12.º) de la regla, dividimos (120) el primer miembro de la (ec. 9), por  $x-2,0945514814$ , é igualamos á *cero* el cociente, resulta

$$x^2+2,0945514814x+2,38714590823=0 \text{ (9')}.$$

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$  lo que da  $+5,4816973896$  de *error*.

El supuesto  $x=2$ , da  $+10,576248871$  de *error*. El menor de estos es el que proviene del 1; luego deberé hallar la correccion, que corresponde á este número. A cuyo efecto, multiplico dicho menor error por la unidad negativa; y tomando solo seis guarismos decimales, da por producto  $-5,481697$ . Esto lo divido por la diferencia de los dos errores; que, tomando tambien únicamente seis guarismos decimales, es  $10,576248-5,481697=5,094551$ ; lo que da  $-1,07$  para la correccion al 1; y agregándosela, resulta  $-0,07$ .

Tomando  $-0,07$  por *tercer número supuesto*, y apreciando únicamente los primeros seis guarismos decimales de los coeficientes numéricos, resulta  $2,245427$  de *error*; que siendo menor que todos, debo hallar la correccion al  $-0,07$ . Para esto, multiplico dicho menor error por  $-0,07=1=-1,07$ ; y tengo  $-2,40260689$ . Este producto lo divido por la diferencia de los dos menores errores, que es  $5,481697-2,245427=3,236270$ ; lo que da  $-0,74$  para la correccion; que, agregada al  $-0,07$ , da  $-0,07-0,74=-0,81$ .

Tomando  $-0,81$  por *cuarto número supuesto*, y apreciando únicamente los seis primeros guarismos decimales, se tiene  $+1,346659$  de *error*; y como es menor que todos, se halla la correccion al  $-0,81$ . Para lo cual, multiplico su error  $1,346659$  por  $-0,81-0,07=-0,81+0,07=-0,74$ ; y dividiendo el producto  $-0,99652766$  por la diferencia de los dos errores, que es  $2,245427-1,346659=+0,898768$ , resulta  $-0,11$  para la correccion; que, agregada al  $-0,81$ , se tiene  $-0,92$ .

Tomando  $-0,92$  por *quinto número supuesto*, y apreciando únicamente los seis primeros guarismos decimales, se tiene  $+1,226676$  de *error*; y como es menor que todos, se halla la corrección al  $-0,92$ . Para lo cual, multiplico su error por  $-0,92 = -0,81 = -0,92 + 0,81 = -0,11$ ; y dividiendo el producto  $-0,13493436$  por la diferencia de los dos errores, que es  $1,346659 - 1,226676 = 0,119983$ , resulta  $-0,12$  para la corrección; que, agregada al  $-0,92$ , da  $-1,04$ .

Tomando  $-1,04$  por *sexto número supuesto*, apreciando únicamente los seis primeros guarismos decimales, se tiene  $+1,2904146$  de *error*.

Como este error es mayor que el del  $-0,92$ , debo hallar la corrección al  $-0,92$ . Para esto, multiplico su error  $1,226676$  por  $-0,92 = -1,04 = -0,92 + 1,04 = 0,12$ ; y dividiendo el producto  $0,14720112$  por la diferencia de los dos menores errores, que es  $1,2904146 - 1,226676 = 0,0637386$ , resulta  $2,3$  para la corrección; que, agregada al  $-0,92$ , da  $-0,92 + 2,32 = 1,4$ .

Tomando  $1,4$  por *séptimo número supuesto*, resulta  $1,44477383417$  de *error*; que, siendo mayor que los tres últimos y del mismo signo, indica que la (ec. 9<sup>a</sup>) se halla en el caso del número 9.<sup>o</sup> de la regla.

Para examinar si hay alguna raíz real, supondremos  $x=10$ ,  $x=100$ ,  $x=1000$  &c.; y como se van obteniendo errores cada vez mayores y positivos, así como suponiendo  $x=-1$ ,  $x=-10$ ,  $x=-100$ ,  $x=-1000$ , &c. no hay esperanza de que haya cambio de signo.

Apliquemos el procedimiento de la *ecuación derivada*. En virtud de lo espuesto (11.<sup>o</sup>), la ecuación derivada de la (ec. 9<sup>a</sup>), tomando los cinco primeros guarismos decimales del segundo término, es  $2x + 2,09455 = 0$ , que da (§ 150)  $x = -1,047275$ . Sustituyendo este valor por  $x$  en la (ec. 9<sup>a</sup>) se obtiene  $+1,33335861641955$  de *error*; que, siendo positivo, como todos los valores que de ella se han sacado, no hay cambio de signo; por lo que la espresada (ec. 9<sup>a</sup>) no tiene ninguna raíz real, y las dos serán imaginarias, como en efecto así se verifica. Los principiantes se pueden convencer de ello *a priori*; pues si toman solo dos guarismos decimales en los coeficientes, y resuelven dicha (ec. 9<sup>a</sup>) por la regla (168), obtendrán

$$x = -1,04 \pm \sqrt{(-1,04)^2 - 2,38} = -1,04 \pm \sqrt{-1,29}.$$

Donde es digno de observarse que las irregularidades que se notan en los errores, se verifican en la proximidad del supuesto

-1,04, que es justamente la parte real de las dos raíces imaginarias.

197 x. Pasemos ahora á la resolución de la ecuacion á que Mr. *Lagrange* aplica su método en la pág. 33 y siguientes de su citada obra.

Dicha ecuacion es  $x^3 - 7x + 7 = 0$  (10).

Antes de aplicarle nuestro método, convendrá que los discípulos vuelvan á leer lo que hemos dicho (§§ 170 x, 170 y) sobre el método de *Lagrange*, para que se pueda comparar con el nuestro, y deducir con claridad las consecuencias oportunas.

Sustituyendo 1 por  $x$  en el primer miembro de la (ec. 10) se tiene  $(1)^3 - 7 \cdot 1 + 7 = 1 - 7 + 7 = +1$ , que es el *error* ó equivocacion.

Suponiendo  $x=2$ , el mismo primer miembro se convierte en  $(2)^3 - 7 \cdot 2 + 7 = 8 - 14 + 7 = 15 - 14 = +1$ ; y como dicho primer miembro debía ser 0, nos hallamos aquí con un *error* +1; que es el mismo que dió el supuesto 1; y en virtud de lo espresado (3.º) de la regla, inferimos que hay mas de una raiz, cuyos valores se hallen próximos al 1 y al 2; lo que en efecto es así, pues por lo espresado (170 x), resulta que una de las raíces es menor que  $x=1,6923$ , y otra menor que  $x=1,35714$ , hallándose ambas entre el 1 y el 2.

Previas estas indicaciones, deberémos continuar segun previene la regla, suponiendo  $x=3$ ; y sustituyendo 3 por  $x$  en el primer miembro de la (ec. 10), se convierte en +13; y como debía ser 0, tenemos un *error* ó equivocacion de +13.

Ahora está á nuestro arbitrio, pues que los supuestos  $x=1$  y  $x=2$  producen un mismo *error*, el elegir uno de ellos. Mas para entregarnos decididamente al método, sin usar de ninguna parcialidad, harémos igual operacion con los dos números, empezando, como si los dos supuestos hubieran sido los del 2 y del 3.

El supuesto  $x=2$ , da 1 de *error*; y el  $x=3$  da 13. Para encontrar la correccion al 2, que es el que da menor *error*, multiplico su *error* 1, por la diferencia de los dos números supuestos 2 y 3, esto es, por  $2-3=-1$ ; lo que da -1. Esto lo divido por la diferencia de los dos menores errores, que es  $13-1=12$ ; y obtengo  $-0,0833$ . Suprimiendo los treses, apreciaré sólo  $-0,08$ . Agregado esto al 2, que fué el que dió menor *error*, será  $2-0,08=1,92$ .

Tomemos 1,9 por *cuarto número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de la ecuacion, será  $(1,9)^3 - 7 \times 1,9 + 7$ ; y como  $(1,9)^3 = 1,9 \times 1,9 \times 1,9 = 6,859$ , y  $-7 \times 1,9 = -13,3$ , la espresion anterior se convertirá en  $6,859 - 13,3 + 7 = +0,559$ ,

que será el *error*. Para encontrar la correccion al 1,9, multiplico su error 0,559 por  $1,9-2=-0,1$ ; lo que da  $-0,0559$ . Esto lo divido por  $1-0,559=0,441$ ; y obtengo  $-0,127$  para la correccion; que, agregada al 1,9, da 1,773.

Tomando 1,77 por *quinto número supuesto*, resulta  $+0,15523$  de *error*. Para hallar la correccion al 1,77, multiplico su error 0,15523 por la diferencia entre los números 1,77 y 1,9, que es  $-0,13$ ; lo que da  $-0,0208029$ . Dividiendo esto por la diferencia de los dos menores errores, que es  $0,559-0,15523=0,40377$ , resulta  $-0,04998$  para la correccion; que, agregada al 1,77, da 1,72002.

Tomando 1,72 por *sesto número supuesto*, resulta  $+0,048448$  de *error*. Para encontrar la correccion al 1,72, multiplico su error por  $1,72-1,77=-0,05$ ; y tendré  $-0,00242240$ . Dividido esto por la diferencia de los dos menores errores, que es 0,106774, resulta  $-0,02268$  para la correccion; que, agregada al 1,72, da 1,69732.

Tomando 1,697, por *séptimo número supuesto*, resulta 0,008035873 de *error*; y para encontrar la correccion al 1,697, multiplico este error por  $1,697-1,72=-0,023$ ; y dividiendo el producto  $-0,00185285079$  por la diferencia de los dos menores errores, que es  $+0,040412127$ , obtengo  $-0,004585$  para la correccion; que, agregada al 1,697, da 1,692415.

Tomando 1,6924 por *octavo número supuesto*, da  $+0,000602137024$  de *error*. Para hallar la correccion al 1,6924, multiplico su error por  $1,6924-1,697=-0,0046$ ; y obtengo  $-0,0000027698303104$ . Dividido esto por la diferencia entre los dos menores errores, que es 0,007433735926, resulta  $-0,000372$  para la correccion; que, agregada al 1,6924, da 1,692028.

Tomando este valor 1,692028 por *noveno número supuesto*, da  $+0,0000103725556059525$  de *error*. Para encontrar la correccion al 1,692028, multiplico este error por  $1,692028-1,6924=-0,000372$ , lo que da  $-0,0000000038585906832$ . Dividido esto por la diferencia de los dos menores errores, que es 0,0005917644784, resulta  $-0,0000065$  para la correccion; que, agregada al 1,692028, da 1,6920215.

Resulta, pues, que una de las raíces de la (ec. 10) es 1,6920215. La que saca Lagrange (§ 170  $x$ ) es 1,6923, que en virtud de lo allí espuesto es mayor de lo que debe ser; lo que se comprueba con la nuestra, pues sale menor que ella en el cuar-

to guarismo decimal; y como nuestra correccion ha consistido ya en el lugar sexto decimal, aparece que debemos estar por nuestro resultado. Podríamos haber omitido el último supuesto; pues ya el anterior 1,6924 convenía con el de *Lagrange* en los tres primeros guarismos decimales que eran exactos; pero hemos querido estendernos aun mas de lo necesario, para que resalte mas la ventaja de nuestro método; y el que guste tomarse la molestia de pasar la vista por la obra de *Lagrange*, ó por lo que hemos extractado de ella (§§ 170 *x* y 170 *y*) se convencerá, á no poderlo dudar, de que *ménos trabajo cuesta la resolucion completa por nuestro método, que las primeras transformaciones ú operaciones preliminares, que exige el método de Lagrange*; y si se atiende á que nuestras operaciones las pueden practicar toda clase de personas, sin profundos ni sublimes conocimientos, no se podrá ménos de convenir en cuanto hemos asegurado acerca de las ventajas de nuestro método.

197 *y*. Para encontrar las demas raices por él, dividiremos (120), el primer miembro de la (ec. 10), por *x* ménos el valor de la raiz hallada, esto es, por  $x-1,6920215$ ; é igualando el cociente á *cero*, da

$$x^2 + 1,6920215x - 4,13706324353775 = 0 \quad (10')$$

Siendo digno de notarse, que se obtiene para destruirse con el término constante 7, el número 6,99999996; de lo cual debemos inferir: 1.º que el número 1,6920215 es una raiz verdadera de la ecuación; pues dividido el primer miembro por *x* con este valor negativo, resulta un cociente tan exacto; y 2.º que este cociente igualado á 0 dará las otras dos raices, aplicándole este mismo método, pues que sabemos que son reales.

Supongamos pues en la espresada (ec. 10')  $x=1$ , y su primer miembro se convertirá en  $-1,44504174$  tomando únicamente ocho guarismos decimales.

Suponiendo  $x=2$ , resulta 3,2469798 de *error*. Aquí observe, que el error del supuesto 1 es negativo, y el del supuesto 2 es positivo; lo cual indica (170 *s*), que entre 1 y 2 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1 es el menor, debo hallar la correccion al 1. Para esto, multiplico su error por  $-1$ ; lo que da  $+1,44504174$ . Esto lo divido por la diferencia de los dos errores, que (112) es

$$3,2469798 - -1,44504174 = 4,69202154,$$

y obtengo 0,3 para la correccion; que, agregada al 1, da 1,3.

Tomando 1,3 por *tercer número supuesto*, resulta  $-0,24743529353775$  de *error*. El cual, siendo de signo contrario al error del 2, indica, que al ménos una raiz real se halla

entre 1,3 y 2. Y como el error del 1,3 es menor que el del 2, debo hallar la correccion al 1,3. Para esto, multiplico su error que, tomando solo siete guarismos decimales (96) es  $-0,2474353$ , por la diferencia de los dos números supuestos mas próximos entre los que producen errores de signos encontrados, que es  $1,3-2=-0,7$ ; lo que da  $+0,17320471$ ; y dividiendo esto por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los números supuestos mas próximos entre sí, que, tomando solo siete guarismos decimales, es  $3,2469798-0,2474353=3,4944151$ , resulta 0,049 para la correccion; que, agregada al 1,3, da 1,349.

Tomando 1,35 por *cuarto número supuesto*, da  $-0,0202342103775$  de *error*; que, siendo de signo contrario al del 2, indica que entre 2 y 1,35 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1,35 es menor, hallo la correccion á dicho número, multiplicando su error por  $1,35-2=-0,65$ ; y dividiendo el producto, que, tomando solo seis guarismos decimales, es  $0,013142$ , por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los números supuestos mas próximos entre sí, que, tomando siete guarismos decimales, es  $3,2469798-0,0202342=3,2672140$ , da  $+0,004$  para la correccion; que, agregada al 1,35, da 1,354.

Tomando este valor 1,354 por *quinto número supuesto*, da  $-0,01675013353775$  de *error*; que siendo de signo contrario al del 2, indica que entre 2 y 1,354 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1,354 es menor, se hallará la correccion á dicho número. Para lo cual, tomando los ocho primeros guarismos decimales del error, tengo  $-0,01675013$ ; que multiplicado por  $1,354-2=-0,646$ , da  $+0,01081058398$ ; esto lo divido por la diferencia de los dos errores de signos contrarios procedentes de los números supuestos mas próximos entre sí, que, tomando únicamente siete guarismos decimales, es  $3,2469798-0,0167501=3,2637299$ , da 0,003 para la correccion; que, agregada al 1,354, da 1,357.

Tomando 1,357 por *sesto número supuesto*, resulta  $+0,0004589319225$  de *error*; que, siendo positivo, indica que entre 1,354 y 1,357 hay al ménos una raiz real de la ecuacion. Para hallar la correccion al 1,357, que da menor error numérico, multiplico su error, apreciando únicamente ocho guarismos decimales, por  $1,357-1,354=+0,003$ ; y dividiendo el producto  $0,00000137679$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, que poviennen de los números supuestos mas próximos entre sí, que, apreciando únicamente siete gua-

rismos decimales, es  $-0,0167501-0,0004589=-0,017209$ , da  $-0,00006$  para la correccion; que, agregada al  $1,357$ , da  $1,357-0,00006=1,35694$ .

Tomando este valor  $1,35694$  por *séptimo número supuesto*, resulta  $+0,00017457427225$  de *error*; que, siendo positivo, indica que entre  $1,354$  y  $1,35694$  hay al ménos una raiz real de la ecuacion. Para hallar la correccion al  $1,35694$ , que da menor error numérico, multiplico su error, apreciando únicamente ocho guarismos decimales, por  $1,35694-1,354=0,00294$ ; y dividiendo el producto  $0,0000005132358$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, que provienen de los números supuestos mas próximos entre sí, que, apreciando únicamente siete guarismos decimales, es  $-0,0167501-0,0001745=-0,0169246$ , se tiene  $-0,00003$  para la correccion; que, agregada al  $1,35694$ , da  $1,35694-0,00003=1,35691$ .

Tomando  $1,35691$  por *octavo número supuesto*, resulta  $0,00006240021435$  de *error*; que, siendo positivo, indica que, entre  $1,354$  y  $1,35691$  hay al ménos una raiz real. Para hallar la correccion al  $1,35691$ , que da menor error numérico, multiplico su error, apreciando únicamente ocho guarismos decimales, por  $1,35691-1,354=0,00291$ ; y dividiendo el producto  $0,000000163584$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, que provienen de los números supuestos mas próximos entre sí, que, apreciando únicamente ocho guarismos decimales, es  $-0,01675013-0,00006240=-0,01681253$ , resulta  $-0,0000097$  para la correccion; que, agregada al  $1,35691$ , da  $1,3569003$ .

Tomando este valor  $1,3569003$  por *noveno número supuesto*, resulta  $0,00002206738399$  de *error*; que, siendo positivo, indica que entre  $1,354$  y  $1,3569003$  hay al ménos una raiz real. Para hallar la correccion al  $1,3569003$ , que da menor error numérico, multiplico su error, apreciando únicamente ocho guarismos decimales, por  $1,3569003-1,354=0,0029003$ ; y dividiendo el producto  $0,00000084002678$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, que provienen de los números supuestos mas próximos entre sí, que, apreciando únicamente ocho guarismos decimales, es  $-0,01675013-0,00002206=-0,01677219$ , resulta  $-0,000005$  para la correccion; que agregada al  $1,3569003$ , se tiene  $1,3569003-0,000005=1,3568953$ . Este valor concuerda con el segundo que hemos puesto ( $170 x$ ) de *Lagrange* en los dos primeros guarismos, siendo menor que él, como debe así verificarse en virtud de lo allí ma-

nifestado; y el nuestro tiene la ventaja de ser exacto lo ménos hasta el sexto guarismo decimal; pues la correccion no ha tenido valor hasta dicho guarismo.

197 z. Para encontrar la tercera raiz, dividiremos el primer miembro de la (ec. 10'), por  $x-1,3568963$ , y resulta por cociente  $x+3,0481175$ ; que, igualado á *cero*, y trasladando, se tiene  $x=-3,0481175$ ; luego la segunda raiz de la (ec. 10') y por consiguiente la tercera raiz de la (ec. 10) es  $-3,0481175$ . La que saca *Lagrange* es  $-3,04918$ ; y por lo mismo nuestra raiz conviene con la suya en los dos primeros guarismos decimales; pero la de *Lagrange* no puede ménos de estar equivocada desde el tercer guarismo en adelante; pues que, segun lo espuesto (170 x) el valor obtenido por *Lagrange* debía ser numéricamente menor que el verdadero. Lo cual procede de que *Lagrange* calcula solo dos denominadores en el quebrado continuo. Aparece, pues, de todo esto, que nuestros resultados van conformes con los de tan sabio Autor, sin mas diferencia que el ser los nuestros mas exactos, y haberlos obtenido con ménos fatigas, y siguiendo procedimientos mas elementales.

197 aa. Aquí podríamos dar por concluido nuestro trabajo, relativo á la espresada (ec. 10); pero con el fin de no dejar ningun cabo suelto y comprobarlo todo con los hechos mas positivos, debemos ahora proceder á encontrar las mismas raices de la (ec. 10), partiendo de los supuestos  $x=1$  y  $x=3$  que se hicieron (197 x).

El supuesto  $x=1$  da 1 de *error*. El supuesto  $x=3$ , dió 13 de *error*. Para encontrar la correccion al 1, que es el que da menor error, multiplico su error 1 por  $1-3=-2$ , que es lo que hemos dicho en el número 4.º de la regla, y obtenemos  $-2$  por producto. Dividido esto por la diferencia de los errores, que es  $13-1=12$ , resulta  $-0,17$  para la correccion; que, añadida al 1, da  $1-0,17=0,83$ .

Tomando 0,8 por cuarto número supuesto, da 1,912 de *error*; y como es mayor que el del 1 y menor que el del 3, debo hallar la correccion al 1 por medio de los dos supuestos 1 y 0,8. Para lo cual, multiplico el error del 1, que es 1, por  $1-0,8=0,2$ ; lo que da 0,2; y dividiendo esto por  $1,912-1=0,912$ , se halla 0,21 para la correccion; que, agregada al supuesto 1, da 1,21.

Tomando 1,2 por quinto número supuesto, da 0,328 de *error*; que siendo menor que los anteriores, hallaré la correccion al 1,2, multiplicando su error 0,328 por  $1,2-1=0,2$ ; lo que da 0,0656; dividiendo esto por  $1-0,328=0,672$ , resulta 0,0946 para la correccion; que, añadida al 1,2, da 1,2946.

Tomando este valor  $1,2946$  por *sexto número supuesto*, da  $0,107535566536$  de *error*. Para encontrar la correccion, multiplico este error por  $1,2946 - 1,2 = 0,0946$ ; lo que da  $0,0101726645943056$ . Este producto lo divido por la diferencia de los dos menores errores, que es  $0,221464433464$ , y obtengo  $0,04614$  para la correccion; que, agregada al  $1,2946$ , da  $1,34074$ .

Tomando  $1,341$  por *octavo número supuesto*, resulta  $0,024494821$  de *error*; que como es el menor, deberé hallar la correccion al  $1,341$ . Para esto, multiplico su error por la diferencia de los dos números que produjeron menores errores, que es  $1,341 - 1,2946 = 0,0464$ , lo que da  $0,0011365596944$ ; y dividiendo esto por la diferencia de los dos menores errores que es  $0,08304074536$ , obtengo  $0,0136869$  para la correccion; que, agregada al  $1,341$ , da  $1,3546869$ .

Tomando  $1,355$  por *noveno número supuesto*, da  $0,002823875$  de *error*; que, siendo el menor, deberé hallar la correccion al  $1,355$ . Para esto, multiplico dicho error por  $1,355 - 1,341 = 0,014$ ; y obtengo  $0,00039534250$ ; que, dividido por la diferencia de los dos menores errores, que es  $0,021670946$ , resulta  $0,001824$  para la correccion; que, agregada al  $1,355$ , da  $1,356824$ ; valor que coincide con el que obtuvimos (197 *y*) en cuatro guarismos decimales, y que es inútil continuar mas adelante.

Aquí observamos que hemos sacado primero la segunda raiz de la (ec. 10). Esto proviene de que la raiz que ántes obtuvimos por primera fué  $1,692415$ ; la cual se acerca al número supuesto 2 mas que al número supuesto 1, y mas tambien que lo que la raiz  $1,356824$  se acerca al 1.

Y ahora, como los dos supuestos de que hemos partido eran 1 y 3, la raiz  $1,356824$  se acerca mas al 1, que al 3, y se acerca tambien mas al 1 que la  $1,692415$  se acerca al 3. Lo cual manifiesta la maravillosa escelencia del método.

Dividiendo el primer miembro de la (ec. 10) por  $x - 1,356824$ , igualando á *cero* el cociente, y aplicándole nuestro método, se obtendrán las otras dos raices, que ya hemos encontrado, y que aconsejamos á los principiantes lo ejecuten por sí mismos.

197 *bb*. Todas las ecuaciones, de que hasta aquí nos hemos ocupado, pueden resolverse, y en efecto se han resuelto con mas ó menos penalidades por métodos ya sabidos; pero las que ahora vamos á considerar, con dificultad podrán resolverse por ninguno de los métodos conocidos, á no ser empleando un tiempo, fatigas y molestias sumamente extraordinarias.

Sea primero la ecuacion

$$x^3 - 979x^2 - 954529x + 934483891 = 0 \quad (11).$$

Para aplicarle el método, supondremos  $x=1$ ; y sustituido este valor en el primer miembro, se convierte en 933528384, que será el *error*. Sustituido 2 por  $x$ , en el mismo primer miembro, se convierte en 932570925 que será el *error*; y como es menor que el anterior, debo hallar la correccion al 2. Para esto, multiplico su error 932570925 por 1, y obtengo 932570925. Dividido esto por la diferencia de los dos menores, que es  $933528384 - 932570925 = 957459$ , resulta 974,006 para la correccion; que, agregada al 2, se tiene 976,006.

Tomemos 976 por *tercer número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de dicha ecuacion, da 817859 de error; y como es el menor de todos, debo hallar la correccion al 976. Para esto, multiplico su error por  $976 - 2 = 974$ ; lo que da por producto 796580666. Dividido esto por la diferencia de los dos menores errores, que es  $932570925 - 817859 = 931753066$ , resulta 0,8 para la correccion; la cual, agregada al 976, da 976,8.

Tomando 977 por *cuarto número supuesto*; y sustituyéndole en el primer miembro de la (ec.11) se convierte en 0; de donde se deduce (170 e) que el número 977 es una raiz de la (ec. 11).

Ahora, dividiendo el primer miembro de dicha ecuacion por  $x - 977$ , é igualando á 0 el cociente, resulta

$$x^2 - 2x - 956483 = 0;$$

y como esta ecuacion la tenemos resuelta (197 rr), pues es la (ec. 4), resulta que las tres raices de la (ec. 11) son

$$x = 977, \quad x = 979, \quad \text{y} \quad x = -977.$$

197 cc. Pasemos ahora á la resolucion de las ecuaciones de tercer grado, que contienen una raiz real con dos imaginarias.

Sea primero la ecuacion  $x^3 - 17x^2 + 96x - 162 = 0$  (12).

El supuesto  $x=1$  da  $-82$  de *error*; el supuesto  $x=2$  da  $-30$  de *error*. Como este es numéricamente menor que el del 1, hallo la correccion al 2. Para esto, multiplico su error  $-30$  por 1; lo que da  $-30$ . Este producto lo debo dividir por la diferencia de los dos errores, que es  $-82 - (-30) = -82 + 30 = -52$ , y obtengo 0,57 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 2,57.

Tomando 2,6 por *tercer número supuesto*, resulta  $-9,744$  de *error*; y 0,24 para la correccion; que, agregada al 2,6, da 2,84.

Tomando 2,84 por *cuarto número supuesto*, se obtiene

—3,568896 de *error*; y 0,13 para la correccion; que, agregada al 2,84, le convierte en 2,97. Como este número se acerca ya tanto al 3, tomaré 3 por *quinto número supuesto*; y como sustituido en el primer miembro se reduce á 0, deduzco (170 e), que 3 es una de las raíces de la ecuacion; y dividiendo su primer miembro por  $x-3$ , é igualando á *cero* el cociente, resulta  $x^2-14x+54=0$ ; cuyas dos raíces hemos visto ya (197 t) que son imaginarias; pues esta ecuacion es la (8) que allí hemos resuelto.

Sea ahora la ecuacion  $x^3+x^2+x+1=0$  (13).

El supuesto  $x=1$  da 4 de *error*. El supuesto  $x=2$  da 15 de *error*; luego deberémos hallar la correccion al 1; y resulta ser —0,36; que, agregada al 1, da 0,64.

Tomando este valor 0,64 por *tercer número supuesto* resulta 2,311744 de *error*, y —0,49 para la correccion al 0,64; que, agregándosela, da 0,15.

Tomando 0,15 por *cuarto número supuesto*, resulta 1,175875 de *error*; y —0,5 para la correccion; que, agregada al 0,15, da —0,35.

Tomando —0,35 por *quinto número supuesto*, resulta 0,729625 de *error*; y —0,8 para la correccion; que, agregada al —0,35, da —1,15.

Tomando —1,15 por *sesto número supuesto*, resulta —0,348375 de *error*; y como es de signo contrario al error del —0,35, indica que entre —0,35 y —1,15 hay al ménos una raíz real; y siendo el error del —1,15 el menor, hallo la correccion al —1,15.

Para esto, multiplico su error —0,348375 por —1,15— —0,35=—1,15+0,35=—0,80;

y dividiendo el producto 0,27870000 por la diferencia de los dos errores de signos contrarios procedentes de los números supuestos mas próximos entre sí, que es

$$0,729625 - -0,348375 = 1,078000;$$

resulta +0,26 para la correccion; que, agregada al —1,15, da —0,89.

Tomando —0,89 por *séptimo número supuesto*, resulta 0,197769 de *error*; y como es de signo contrario al del —1,15, indica que entre —1,15 y —0,89 hay al ménos una raíz real; y siendo el error del —0,89 numéricamente menor, hallo la correccion al —0,89. Para esto, multiplico su error 0,197769 por —0,89— —1,15=—0,89+1,15=0,26; y dividiendo el producto 0,05141994 por —0,348375—0,197769=—0,546144, se halla —0,009 para la correccion; que, agregada al —0,89, da —0,899.

Tomando  $-0,899$  por *octavo número supuesto*, obtengo  $+0,18263$  de *error*; y  $-0,011$  para la correccion al  $-0,899$ ; que, agregándosela, da  $-0,91$ .

Tomando  $-0,91$  por *noveno número supuesto*, resulta  $+0,163529$  de *error*; y  $-0,09$  para la correccion al  $-0,91$ ; que, agregándosela, da precisamente  $-1$ .

Tomando  $-1$  por *décimo número supuesto*, resulta que el primer miembro se convierte en 0; luego  $-1$  es raíz de la (ec.13); y dividiendo su primer miembro por  $x - (-1) = x + 1$ , é igualando á 0 el cociente, se obtiene  $x^2 + 1 = 0$ ; cuyas raíces hemos hallado (197 t) que son imaginarias; pues esta ecuacion es la (7) que allí hemos resuelto; y por lo mismo las tres raíces de la (ec.13)

son  $x = -1$ ,  $x = +\sqrt{-1}$ , y  $x = -\sqrt{-1}$ .

Sea también la ecuacion  $x^3 - 20x^2 + 138x - 324 = 0$  (14).

Suponiendo  $x = 1$ , resulta  $-205$  de *error*. Suponiendo  $x = 2$ , da  $-120$  de *error*; y como este es numéricamente menor, hallaré la correccion al 2. Para esto, multiplico su error por 1, lo que da por producto  $-205$ . Esto lo divido por la diferencia de los errores  $-205 - (-120) = -85$ ; y obtengo  $1,4$  para la correccion; que, agregada al 2, da  $3,4$ .

Tomando este valor  $3,4$  por *tercer número supuesto*, resulta  $-46,696$  de *error*; y como es numéricamente menor que los anteriores, debo hallar la correccion al  $3,4$ . Para esto, multiplico su error por  $1,4$ ; y el producto  $-65,3744$  lo divido por la diferencia de los dos menores errores, que es  $-73,304$ ; lo que dá  $0,89$  para la correccion; la cual, agregada al  $3,4$ , da  $4,29$ .

Tomando  $4,3$  por *cuarto número supuesto*, resulta un *error* de  $-20,893$ , que siendo numéricamente menor que todos, debo hallar la correccion al  $4,3$ . Para lo cual, multiplico su error por  $4,3 - 3,4 = 0,9$ ; y dividido el producto  $18,8037$  por  $-46,696 - (-20,893) = -25,803$ ; se tiene  $0,73$  para la correccion; que, agregada al  $4,3$ , da  $5,03$ .

Tomando 5 por *quinto número supuesto*, resulta  $-9$  de *error*; y  $+0,57$  para la correccion; que, agregada al 5, da  $5,57$ .

Tomando  $5,6$  por *sesto número supuesto*, resulta  $-2,784$  de *error*; y  $0,268$  para la correccion; que, agregada al  $5,6$ , da  $5,868$ .

Tomando  $5,87$  por *séptimo número supuesto*, resulta  $-0,815997$  de *error*, y  $0,11$  para la correccion; que, agregada al  $5,87$ , da  $5,98$ .

Tomando 6 por *octavo número supuesto*, y sustituido en el primer miembro de dicha ecuacion, la reduce á 0; lo cual manifiesta que el 6 es raiz de la mencionada ecuacion; y dividiendo el primer miembro por  $x-6$ , é igualando á 0 el cociente, se tiene  $x^2-14x+54=0$ ; cuyas dos raices son imaginarias (197 t ec. 8).

Pasemos ahora á la ecuacion

$$x^3-22x^2+166x-432=0 \quad (15).$$

Suponiendo  $x=1$ , da  $-287$  de *error*; suponiendo  $x=2$ ; da  $-180$  de *error*; y resulta para la correccion al 2, que es el que da menor error,  $+1,6$ ; que, agregándosela, da 3,6.

Tomando 3,6 por *tercer número supuesto*, resulta  $-72,864$  de *error*; y  $+1$  para la correccion; la cual, agregada al 3,6, da 4,6.

Tomando 4,6 por *cuarto número supuesto*, da  $-36,584$  de *error*, y  $+1$  para la correccion; que, agregada al 4,6, da 5,6.

Tomando 5,6 por *quinto número supuesto*, da  $-35,704$  de *error*; y  $+0,4$  para la correccion; que, agregada al 5,6, da  $+6$ .

Tomando este valor 6 por *sesto número supuesto*, resulta  $-12$  de *error*; y 0,1 para la correccion; que, agregada al 6, da 6,1.

Tomando 6,1 por *séptimo número supuesto*, resulta  $-11,089$  de *error*, y  $+0,4$  para la correccion; que, agregada al 6,1, da 6,5.

Tomando 6,5 por *octavo número supuesto*, da  $-7,875$  de *error*; y  $+0,9$  para la correccion; la cual, agregada al 6,5, da 7,4.

Tomando 7,4 por *noveno número supuesto*, resulta  $-3,096$  de *error*; y  $+0,5$  para la correccion; que, agregada al 7,4, da 7,9.

Tomando 8 por *décimo número supuesto*, resulta que el primer miembro es *cero*; por lo cual el número 8 es (170 e) raiz de la ecuacion.

Dividiendo el primer miembro de la (ec. 15) por  $x-8$ , é igualando á *cero* el cociente, se halla  $x^2-14x+54=0$ , cuyas raices sabemos ya (197 t ec. 8) que son imaginarias.

197 dd. Las ecuaciones que nos hemos propuesto resolver, las elegimos *ex-profeso*, no para disminuir las dificultades, como suele hacerse generalmente, sinó mas bien con el fin de aumentarlas, para enseñar al modo de vencerlas. Por esta causa, nos vamos á proponer para última ecuacion del tercer grado, una que nos suministrará ocasion, no solo para acabar de comprender la regla

(197 p); sino para dar á conocer, que esta doctrina se halla enlazada con la mas sublime de las Matemáticas.

Y sea la  $x^3 - 7507x^2 + 104956x - 404622 = 0$  (16).

Suponiendo  $x=1$ , resulta  $-307172$  de error. Suponiendo  $x=2$ , se tiene  $-224730$  de error; y resulta 2,7 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 4,7.

Tomando 4,7 por *tercer número supuesto*, resulta  $-77055,607$  de error; y 1,4 para la correccion; que, agregada al 4,7, da 6,1,

Tomando 6,1 por *cuarto número supuesto*, resulta  $-43498,889$  para el error, y  $+1,4$  para la correccion; que, agregada al 6,1, da 7,5.

Tomando 7,5 por *quinto número supuesto*, resulta  $-39298,875$  para el error, y 13 para la correccion; que, agregada al 7,5, da 20,5.

Tomando 20,5 por *sexto número supuesto*, resulta  $-1399225,625$  de error; que, siendo numéricamente mayor que todos, indica, que nos hallamos en el caso del número 9.<sup>o</sup> de la regla; por lo que supondremos (10.<sup>o</sup> de la regla)  $x=10$ , lo que da  $-104762$  de error;  $x=100$ , da  $-5762$  de error;  $x=1000$ , da  $-6402448622$  de error;  $x=10000$ , da  $+250349155378$  de error; y como ya sale positivo, es indicio seguro (170 s) de que entre 1000 y 10000 hay al ménos una raiz real.

Considerémos como dos primeros supuestos, el 1000 y el 10000. Y para encontrar la correccion, que se debe hacer al 1000, que es el que produce menor error, multiplico su error  $-6402448622$  por  $1000-10000=-9000$ ; lo que da  $57622037598000$ . Esto lo divido por la diferencia de los errores de signos contrarios procedentes de los números supuestos mas próximos entre sí, que es

$$250349155378 - -6402448622 = 256751604000;$$

y obtengo  $+224$  para la correccion; la cual, agregada al 1000, da 1224.

Tomando 1224 por *tercer número supuesto*, resulta  $-9284978286$  de error; y como este es negativo y el del 10000 es positivo, sabemos de cierto (170 s) que una raiz al ménos se halla entre 1224 y 10000. Por lo que hallaré la correccion al 1224 que es el que da menor error que el 10000. Para esto, multiplico el error del 1224, que es  $-9284978286$  por la diferencia de los dos números mas próximos entre sí, que producen errores de signos contrarios, que es  $1224-10000=-8776$ ; y dividiendo el producto  $+81484969437936$  por la diferen-

cia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los números supuestos que distan ménos entre sí, que es  $250349155378 - 9284978286 = +259634133664$ , resulta 314 para la correccion; la cual, agregada al 1224, da 1538.

Tomando este valor 1538 por *cuarto número supuesto*, resulta  $-13958317530$  de *error*; y como todavía es negativo, se verifica que el número buscado es mayor que 1538 y menor que 10000; y siendo el error del 1538 menor que el del 10000, se debe hallar la correccion al 1538. Para esto, multiplico su error  $-13958317530$  por  $1538 - 10000 = -8462$ ; y dividiendo el producto  $+118115282938860$  por la diferencia de los errores procedentes de los números supuestos mas próximos entre sí, que es

$250349155378 - 13958317530 = 264307472908$ , da 447 para la correccion; que, agregada al 1538, se tiene 1985.

Tomando este valor 1985 por *quinto número supuesto*, resulta  $-21549989412$  de *error*; que, siendo de signo contrario al del 10000, indica que entre 1985 y 10000 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1985 es menor, debo hallar la correccion al 1985. Para esto, multiplico su error  $-21549989412$  por  $1985 - 10000 = -8015$ ; y dividiendo el producto  $+172723065137180$  por la diferencia de los errores procedentes de los números supuestos mas próximos entre sí, que es  $250349155378 - 21549989412 = 271899144790$ , resulta +636 para la correccion; que, agregada al 1985 da 2621.

Hemos ido haciendo supuestos en los mismos términos que salen los valores por la correccion, porque como de lo que tratamos es de dar á conocer el método, conviene seguirle sin interrupcion; pero tambien es parte del método el que se hagan supuestos intermedios hasta que los errores salgan con un mismo número de guarismos. Si esto lo hubiéramos hecho, ántes de hallar la correccion al 1000, hubiéramos encontrado el resultado con mucha mas brevedad. Pero, ahora, que ya se ha practicado el método en cinco supuestos, y que nos hallamos aun en el caso de que el error del 1985 tiene once guarismos y el del 10000 tiene doce guarismos, harémos supuestos intermedios hasta que los errores que produzcan los números supuestos que dan errores de signos encontrados, tengan el mismo número de guarismos.

Tomando, pues, 6000 por *sesto número supuesto*, da  $-53622668622$  de *error*; que, siendo negativo y el del 10000 resultando positivo, indica que entre 6000 y 10000 se halla al ménos una raiz real; y como el error del 10000 tiene toda-

vía un guarismo mas, elijo como supuesto intermedio  $x=8000$ .

Tomando, en efecto, 8000 por *séptimo número supuesto*, da  $+32391243378$  de *error*; que, siendo positivo, indica que entre 6000 y 8000 hay al ménos una raíz real; y como los errores del 6000 y 8000 tienen igual número de guarismos, deberémos proceder á encontrar la correccion al 8000, que es el que da menor error numérico. Para esto, multiplico dicho error  $32391243378$  por la diferencia de los dos números mas próximos entre sí, que producen errores de signos encontrados, que es  $8000-6000=2000$ . Y dividiendo el producto  $64782486756000$  por la diferencia de los dos errores correspondientes, que es

$-53622668622-32391243378=-86013912000$ , resulta  $-753$  para la correccion; que, agregada al 8000, da  $8000-753=7247$ .

Tomando 7247 por *octavo número supuesto*, da  $-12895250530$  de *error*; que, siendo negativo, indica que entre 7247 y 8000 hay al ménos una raíz real de la ecuacion; y como el error del 7247 es numéricamente menor, hallo la correccion á dicho número, multiplicando su error por la diferencia de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que producen errores de signos contrarios, que es  $7247-8000=-753$ ; y dividiendo el producto  $+9707123649090$  por la diferencia de los dos errores correspondientes, que es

$32391243378-(-1289550530)=45286493908$ , resulta 214 para la correccion; que, agregada al 7247, da 7461.

Tomando 7461 por *noveno número supuesto*, resulta  $-1611610872$  de *error*; que, siendo negativo, indica que entre 7461 y 8000 hay al ménos una raíz real de la ecuacion; y como el error del 7461 es numéricamente menor, hallo la correccion á dicho número, multiplicando su error por la diferencia de los dos números supuestos que produjeron los errores de signos contrarios mas próximos entre sí, que es  $7461-8000=-539$ ; y dividiendo el producto  $+868658460008$ ; por la diferencia de los dos errores correspondientes, que es  $32391243378-1611610872=34002854250$ , resulta 32 para la correccion; que, agregada al 7461, da 7493.

Tomando 7493 por *décimo número supuesto*, resulta *cero* de *error*; por lo que inferimos que el número 7493 es (170e) una de las raíces de la espresada ecuacion.

Para encontrar los demas, dividiré el primer miembro de la ecuacion por  $x-7493$ ; é igualando á *cero* el cociente, resulta

$x^2 - 14x + 54 = 0$ ; cuyas dos raíces hemos visto (197 t ec. 8), que son imaginarias.

Para que se vea la fecundidad de este método, vamos ahora á manifestar, que hay diferentes medios de obtener el resultado por un camino mas breve, que se presenta con facilidad al calculador.

En efecto, el error del 1000 tenía diez guarismos; y el del 10000 tenía doce. Y desde luego se nos presenta que podemos hacer un supuesto intermedio entre 1000 y 10000, que nos dará un signo encontrado con alguno de los de estos números, y tendremos números mas próximos entre los cuales se halle al ménos una raíz real.

Suponiendo  $x = 5000$  resulta  $-62150624622$  de error; y como es negativo, manifiesta que el valor de  $x$  es mayor que 5000 y menor que 10000. Podemos, pues, proceder á encontrar la correccion al 5000, combinando su error con el del 10000, lo que nos da por correccion 994,7; la cual, agregada al 5000, resulta 5994,7.

Tomando 5995 por *tercer número supuesto*, da  $-53712511197$  de error. Y como es negativo, indica que la raíz es mayor que 5995, y menor que 10000; y hallando la correccion al 5995 se obtiene 707; que, añadida al 5995, da 6702.

Tomando 6702 por *cuarto número supuesto*, da  $-35455016730$  de error; y se obtiene 409 para la correccion; que, agregada al 6702, da 7111,

Tomando este valor 7111 por *quinto número supuesto*, resulta  $-19278325622$  de error y 204 para la correccion; que, agregada al 7111, da 7315.

Tomando este valor 7315 por *sesto número supuesto*, resulta  $-9506426522$  de error; y 98 para la correccion; que, agregada al 7315, da 7413.

Tomando 7413 por *séptimo número supuesto*, da  $-438790280$  de error; y 44 para la correccion; que, agregada al 7413, da 7457.

Tomando este valor 7457 por *octavo número supuesto*, da  $-2087684558$  de error, y 21 para la correccion; que, agregada al 7457, da 7478.

Tomando este valor 7478 por *noveno número supuesto*, resulta  $-837436692$  de error; y 8 para la correccion; que, agregada al 7478, da 7486.

Tomando este valor 7486 por *décimo número supuesto*, da  $-491548122$  de error; y 4,9 para la correccion; que, agregada al 7486, da 7490,9.

Tomando 7491 por undécimo número supuesto; da  $-112014522$  de error; y 1 para la correccion; que, agregada al 7491, se tiene 7492.

Tomando este valor 7492 por duodécimo número supuesto, da  $-41126270$  de error; y 0,4 para la correccion; que, agregada al 7492, da 7492,4.

Tomando 7492,4 por décimo tercero número supuesto, resulta  $-33618730,896$  de error; y 0,3 para la correccion; que, agregada al 7492,4 da 7492,7.

Tomando 7493 por décimo cuarto número supuesto; y sustituido este valor en el primer miembro de la (ec. 16), la reduce á 0; por lo que se infiere que el número 7493 es (170 e) una de sus raíces.

Luego hemos encontrado la misma raíz por otra combinacion de números supuestos; y si continuáramos haciendo otras combinaciones y otros supuestos intermedios llegaríamos siempre al mismo resultado con ménos fatigas. Todo lo cual corrobora la escelencia é importancia de este nuevo método (\*).

(\*) *En las páginas IX y X del prólogo de la segunda edicion del Tomo II P. II de mi Tratado Elemental de Matemáticas, que contiene el Cálculo Diferencial é Integral, manifesté, que en todas ocasiones habia procurado evitar el escollo en que habian caido algunos escritores, segun d' Alembert, por creer que les resultaba mas ventaja de poner alguna piedra en lo mas alto del edificio científico, que de facilitar la entrada. Y siguiendo constante en mi propósito de preferir siempre las investigaciones que conducen á resultados útiles, tanto en las Ciencias como en las Artes y en todas las circunstancias de la vida, mi objeto principal, en cuantas investigaciones me he propuesto, ha sido el simplificar los métodos, para que la instruccion se generalice y propague cual conviene, mayormente entre nosotros. Y en la parte, que ahora llama nuestra atencion, me parece no haber sido del todo infructuosos mis esfuerzos; pues creo haber simplificado la resolucion de las ecuaciones numéricas hasta el punto de resolverse las mas difíciles, por los discípulos de las Escuelas normales, de los que algunos carecian de todo conocimiento de lectura catorce meses ántes.*

*Mas, teniendo en consideracion por otra parte, que se critica á Neuton, y con razon, el haber ocultado el camino que habia*

*Resolucion de las ecuaciones de cuarto grado.*

197 ee. Nos propondrémos por primera ecuacion de 4.<sup>o</sup> grado la

$$x^4 - 996x^3 - 937886x^2 + 950710884x - 15886226147 = 0 \quad (17).$$

Supongamos  $x=1$ ; y sustituido este valor en el primer miembro de dicha ecuacion, resulta  $-14936454144$

*seguido en sus descubrimientos, me ha parecido conveniente hacer aquí algunas indicaciones acerca del medio que me ha conducido á este importantísimo procedimiento, por el influjo que esto puede tener en los progresos de las Ciencias.*

*Á pesar de todo el grado de sencillez, con que lo expongo, independientemente de todo conocimiento sublime; sin embargo, para llegar á este grado de simplicidad, he sido conducido por las mas profundas meditaciones sobre los puntos de mayor trascendencia; y todo esto se halla enlazado con las ideas que me condujeron á los nuevos é importantes resultados, que obtuve y publiqué en la segunda edicion del espresado volumen, y que especifico en su prólogo bajo los números 2.<sup>o</sup>, 4.<sup>o</sup>, 6.<sup>o</sup> y 7.<sup>o</sup> Y para dar alguna idea sobre este particular, me valdré de la oportunidad de este ejemplo, haciendo algunas reflexiones acerca del modo con que he redactado la regla (197 p). Queda demostrado (197j) no ser cierto lo que suponen los Autores, de que un error menor indica que el valor que lo produce se halla mas próximo al verdadero valor de la incógnita; lo cual lo comprobamos allí con los resultados de la (ec. 1); y aquí en la (ec. 16) se ve que los menores errores son los que producen los supuestos 6,1 y 7,5; los cuales distan bien considerablemente del verdadero valor 7493 de la incógnita. Sin embargo, una gran parte de nuestra regla estriba en cierto modo bajo el mismo principio. En efecto, el decir que se busque siempre la correccion al número que produce el menor error numérico, supone tácitamente que él es el que se halla mas próximo á la verdadera raiz; y es de la mayor importancia el demostrar que nuestra regla no reposa en ningun principio erróneo; y el dar á conocer en qué casos un error menor es indicio de irse acercando el número supuesto al verdadero valor de la raiz, y en qué otros se verifica lo contrario.*

*Lo que llamamos equivocaciones ó errores, que dan las ecuaciones*

para el error. Suponiendo  $x=2$ , resulta  $-13985187475$  de error; y como es numéricamente menor que el del su-

ciones por los diferentes valores que se supongan á las incógnitas, no es mas que determinar los valores de las ordenadas de una curva en que haga de abscisa la incógnita de la ecuacion; y que el primer miembro de la ecuacion propuesta fuese el valor de la ordenada de la curva que se considera. En cuyo caso, los valores de  $x$ , que son raíces de la ecuacion, serán los que marquen los puntos en que la curva corte al eje de las  $x$ , que es el denominado de las abscisas. Cuando una curva continua llega á cortar al eje de las abscisas, se va acercando por grados mas ó ménos sensibles á dicho eje, en cuyo caso las ordenadas van disminuyendo; y cuando la curva pasa del punto en que corta el eje de las abscisas, se va separando de dicho eje, y van creciendo sus ordenadas, bien sea indefinidamente si no vuelve á cortar al espresado eje, ó bien hasta que despues vuelvan á disminuir para irse acercando la curva al eje de las abscisas si le ha de volver á cortar.

Contraido esto ahora á los errores ó equivocaciones, resulta que cuando los supuestos, que se vayan dando á la  $x$ , se aproximen á los verdaderos valores de la raíz; los errores ó equivocaciones irán disminuyendo; luego en este caso se verifica con toda exactitud que un menor error es señal de que el valor de la incógnita que lo produce, se halla mas cerca del verdadero valor de la raíz; y por eso hemos querido aclarar esto cuando hemos dicho (9.<sup>o</sup> de la regla) que esto se verifica en los valores de  $x$  que se hallan como en la esfera de actividad de la raíz; pero cuando, bien sea porque principien los valores de  $x$ , ó porque hayan pasado por una raíz, van aumentando los errores ó equivocaciones cuando crecen los valores de  $x$ , en este caso, se verifica lo contrario; esto es, que mientras mayores son los errores ó equivocaciones, se va uno acercando mas á la raíz.

Pero cuando, por valores sucesivos de la incógnita va resultando, que los errores aumentan numéricamente, si continuando creciendo los valores de  $x$ , ha de haber alguna raíz, llegará un caso en que los errores ó equivocaciones, de ir aumentando numéricamente, principien á disminuir; por lo que, ántes de llegar al valor de la otra raíz, habrá uno de aquellos valores, que se llaman máximos ó mínimos. Todo esto se comprueba perfectamente en la (ec. 16); y la doctrina de los máximos y mínimos ilustra esto de un modo muy satisfactorio, y ratifica

puesto 1, hallaré la corrección al 2. Para esto, multiplico su error por la unidad positiva, lo que da

tanto mas su importancia: comprobando que no hemos exagerado nada cuando hemos recomendado tanto el influjo de su doctrina en el volumen que se ha citado, y con particularidad en el (§ 601).

Veámoslo. Sea  $z$  igual con el primer miembro de la (ec. 16); y tendremos  $z=x^3-7507x^2+104956x-404622$ . Para indagar si esta ecuación tiene máximo ó mínimo, hallaremos el primer coeficiente diferencial según previene la regla (§ 168 II), y tendremos  $\frac{dz}{dx}=3x^2-15014x+104956$ .

Igualando esto á cero, resulta  $3x^2-15014x+104956=0$ ; que dividiendo por 3, será  $x^2-5004,67x+34985,33=0$ ; y en virtud de la regla (168 de este tomo), tendremos

$$x=+2502,33 \pm \sqrt{(2502,33)^2 - 34985,33} = +2502,3 \pm \sqrt{6226670,0989} = 2502,3 \pm 2495,3;$$

que, separando los valores, resulta  $x=7$ , y  $x=4997,6$ .

Para ver si en estos valores de  $x$  hay máximo ó mínimo, haremos uso de dos de los tres métodos de verificación que hemos manifestado (§ 168 II de este Comp. y § 564 II T. E.) pueden emplearse. Para hacerlo ver por el primero, observaremos que el supuesto  $x=6$ , da de error  $-44922$ ; el  $x=7$  da  $-37430$ ; el  $x=8$ , da  $-54910$ ; donde se ve que el error correspondiente al supuesto 7 es menor numéricamente que el valor que le precede y que le sigue, lo que es señal de ser un mínimo; pero como estos valores son negativos, en virtud de lo manifestado (§§ 563 y 601 II T. E.), resulta que el valor correspondiente á  $x=7$  es un verdadero máximo.

Veamos lo que resulta en el otro valor 4997,6. El supuesto  $x=4997$ , da  $-62125562080$ ; el  $x=4997,6$ , da  $-63370260748,544$ ; y el  $x=4998$  da  $-62228574570$ ; y siendo el error del 4997,6 mayor numéricamente que los que inmediatamente le preceden y siguen, es señal de haber máximo; pero como estos valores son negativos, resulta que en virtud de lo supuesto (§§ 563 y 601 II T. E.) será un verdadero mínimo. Para emplear el tercer método de verificación, hallaremos el segundo coeficiente diferencial, que es  $\frac{d^2z}{dx^2}=6x-15014$ .

Si sustituimos 7 por  $x$ , se nos convierte en

—13986187475. Esto lo divido por la diferencia de los errores, que es

—14936454144—13985187475=—951266669; y su-  
primiendo tanto en el dividendo como en el divisor los  
cuatro últimos guarismos, quedan reducidos el dividendo

$\frac{d^2z}{dx^2}=42-15014=-14972$ ; que como no desaparece, y es  
negativo, indica que cuando  $x=7$ , hay máximo, ó lo que es  
lo mismo (§§ 563 y 601 II. T. E.) mínimo negativo; sustituyen-  
do 4997,6 por  $x$  en dicho segundo coeficiente diferencial,  
se nos convierte en  $+14971,6$ ; que como no desaparece y es  
positivo, manifiesta, que cuando  $x$  es igual con 4997,6, el va-  
lor de  $z$  ó de la equivocacion es un mínimo, ó lo que es lo mis-  
mo un máximo negativo (§§ 563 y 601 II T. E.).

De todo esto resulta, que mientras los supuestos pasen de  
4997,6, ya por la regla general de ir calculando por los dos  
menores errores, podremos encontrar la verdadera raiz.

El valor 7 de  $x$  es justamente el término real de las rai-  
ces imaginarias (169 y 170) del factor  $x^2-14x+54=0$ , y  
este es el motivo de aparecer esas irregularidades. Por lo cual,  
cuando estas se presenten, se ha aconsejado, que se hagan su-  
puestos distantes hasta encontrar dos errores de signos encon-  
trados; y luego proceder, siempre hallando la correccion al nú-  
mero supuesto que dá el menor de los dos errores numéricos, en-  
tre los dos errores de signos encontrados, procedentes de los dos  
números supuestos mas próximos entre sí.

Esta regla podría muy bien servir esclusivamente, así como  
la de tomar por primeros dos supuestos el 1 y 10, que tam-  
bien se calculan con facilidad; pero, en muchas ocasiones, se  
obtendrían los resultados con mas penalidad. Esta especie de  
irregularidad que se nota, es la circunstancia mas recomenda-  
ble del método; pues esto indica, que en las inmediaciones de  
los valores que las producen, hay alguna particularidad que de-  
be llamar la atencion; de ellas hemos discutido y aclarado mu-  
chas, al ocuparnos en la segunda edicion del espresado volúmen  
de nuestro Cálculo Diferencial é Integral, y son las que allí  
hemos espresado por valores extremos, valores aislados; y cuando  
se deben considerar el cero y el infinito como de tránsito donde  
mude la naturaleza de las cantidades; y de que no todo valor  
cero es un mínimo, ni todo valor infinito un máximo, así co-  
mo al tratar de los puntos de inflexion etc. etc.

á  $-1398518$ ; y el divisor á  $-95126$ . Practicada la division, resulta  $14,7$  para la correccion; que, agregada al  $2$ , da  $16,7$ .

Tomando este valor  $16,7$  por *tercer número supuesto*, da  $-271482464,2559$  de *error*; y como es menor que todos, hallaré la correccion al  $16,7$ . Para esto, multiplico dicho error por  $16,7-2=14,7$ , y obtengo  $-3990792224,56173$ . Este producto lo divido por la diferencia de los dos menores errores, que es  $-13717001410,7441$ . Suprimiendo en ambos cinco guarismos enteros, ademas de los decimales, quedan reducidos, el dividendo á  $-39907$ , y el divisor á  $-137170$ ; y ejecutando la division, resulta  $0,29$  para la correccion; que, añadida al  $16,7$  da  $16,99$ .

Ahora, en cualquier cálculo, que encontrásemos un valor de esta naturaleza, si la unidad á que se refiere, no era de una importancia muy extraordinaria, deberíamos reputar la parte decimal por una unidad; y en su consecuencia, tomarémos por *cuarto número supuesto* el  $17$ . Y como sustituido  $17$  por  $x$  en el primer miembro de dicha ecuacion, se convierte en  $0$ , resulta ( $170 e$ ) que  $17$  es una de sus raices. Dividiendo el primer miembro de la (ec.  $17$ ) por  $x-17$ , é igualando á *cero* el cociente, resulta  $x^3-979x^2-954529x+934483891=0$ ; y como las raices de ésta, las tenemos ya sacadas ( $197 bb$ ), pues es la (ec.  $11$ ), inferimos que las cuatro raices de la (ec.  $17$ ) son  $x=17$ ,  $x=977$ ,  $x=979$  y  $x=-977$ .

Propongámonos por segundo ejemplo de ecuaciones de cuarto grado, la  $x^4-14x^3+52x^2+28x-108=0$  ( $18$ ).

El supuesto  $x=1$ , da  $-41$  de *error*.

El supuesto  $x=2$ , da  $+66$  de *error*. Como estos errores tienen signos encontrados, inferimos que entre  $1$  y  $2$  hay al ménos una raiz real. Y siendo el error del  $1$  menor que el del  $2$ , se debe hallar la correccion al  $1$ . Para esto, multiplico su error  $-41$  por  $-1$ ; lo que da  $+41$ ; y dividiendo este producto por la diferencia de los dos errores, que es  $66-41=107$ , se obtiene  $0,38$  para la correccion; que, agregada al  $1$ , da  $1,38$ .

Tomando este valor  $1,38$  por *tercer número supuesto*; resulta  $-3,49746864$  de *error*; que, siendo negativo, indica, que entre  $1,38$  y  $2$  hay al ménos una raiz real; y como el error del  $1,38$  es menor, debo hallar la correccion al  $1,38$ . Para esto, multiplico su error  $-3,49746864$  por  $1,38-2=-0,62$ ; y dividiendo el producto  $2,1684405568$  por la diferencia de los dos

errores de signos contrarios, procedentes de los dos números mas próximos entre sí, que es  $+66 - 3,49746864 = 69,49746864$ , resulta 0,035 para la correccion; que, agregada al 1,38, da 1,415.

Tomando este valor 1,415 por *cuarto número supuesto*, resulta  $+0,0805272700625$  de *error*; y  $-0,000824$  para la correccion; que, agregada al 1,415, da 1,414176 que podemos reputar en 1,4142, que ya conocemos (197 s) ser la raíz de 2. Dividiendo el primer miembro de la (ec. 18) por  $x - 1,4142$ , é igualando el cociente á *cero*, resulta

$$x^3 - 12,5858x^2 + 34,20116164x + 76,367282791288 = 0 \quad (18')$$

Para mayor sencillez, y sin perjudicar á la exactitud, podremos suprimir los guarismos decimales, que siguen al cuarto, en los dos últimos números; pero en el penúltimo añadiremos una unidad al cuarto guarismo; porque el siguiente es mayor que 5; y no lo haremos al cuarto guarismo del último término, porque, aunque es 8 el que le sigue, como tiene el mismo signo que el término anterior, si añadiésemos una unidad al cuarto, resultarían dos aproximaciones por exceso.

En este concepto, quedará reducida la ecuacion á

$$x^3 - 12,5858x^2 + 34,2012x + 76,3672 = 0 \quad (18'')$$

Suponiendo  $x=1$ , resulta 98,9826 de *error*.

El supuesto  $x=2$ , da  $+102,4264$  de *error*; y resulta  $-28,7$  para la correccion al 1; que, agregándosela, da  $-27,7$ .

Tomando este valor  $-27,7$  por *tercer número supuesto*, resulta  $-31786,947522$  de *error*; el cual, siendo de signo contrario al del supuesto 1, indica que entre 1 y  $-27,7$  hay al ménos una raíz real; y como el error del 1 es numéricamente menor que el del  $-27,7$ , se debe hallar la correccion al 1. Para esto, se multiplica su error 98,9826 por  $1 - -27,7 = 28,7$ ; y dividiendo el producto 2840,80062 por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es

$$-31786,947522 - 98,9826 = -31885,930122, \text{ resulta } -0,089 \text{ para la correccion al 1; que, agregándosela, da } 0,911.$$

Tomando 0,911 por *cuarto número supuesto*, resulta 97,7365315092 de *error*; que, siendo positivo, indica que entre 0,911 y  $-27,7$  hay al ménos una raíz real de la ecuacion; y como el error del 0,911 es numéricamente menor que el del  $-27,7$  se debe hallar la correccion al 0,911. Para esto, se multiplica su error 97,7365315092 por  $0,911 - -27,7 = 28,611$ ; y dividiendo el producto 2796,3401050097212 por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas pró-

ximos entre sí, que es  $-31884,312837092$ , resulta  $-0,09$  para la correccion; que, agregada al  $0,911$ , da  $0,821$ .

Tomando este valor  $0,821$  por *quinto número supuesto*, resulta  $96,4058397432$  de *error*; el cual, siendo de signo contrario al del supuesto  $-27,7$ , indica que entre  $0,821$  y  $-27,7$  hay al ménos una raiz real; y como el error del  $0,821$  es numéricamente menor que el del  $-27,7$ , se debe hallar la correccion al  $0,821$ . Para esto, se multiplica su error  $96,4058397432$  por  $0,821 - -27,7 = +28,521$ ; y dividiendo el producto  $+2749,58867743$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $-31883,3533617432$ , se tiene  $-0,096$  para la correccion; que, agregada al  $0,821$ , da  $0,725$ .

Tomando  $0,725$  por *sesto número supuesto*, resulta  $94,92873090$  de *error*; el cual, siendo de signo contrario al del supuesto  $-27,7$ , indica que entre  $0,725$  y  $-27,7$  hay al ménos una raiz real; y como el error del  $0,725$  es numéricamente menor que el del  $-27,7$ , se debe hallar la correccion al  $0,725$ . Para esto, se multiplica su error por  $0,725 - -27,7 = 28,425$ ; y dividiendo el producto  $2698,35784025$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $-31881,8762529$ , resulta  $-0,085$  para la correccion al  $0,725$ ; que, agregándosela, da  $0,64$ .

Aquí se observa que las correcciones se van aproximando al verdadero valor, porque los errores van disminuyendo; pero tambien se advierte que dichas correcciones son muy lentas; lo cual proviene de que el error del  $-27,7$  tiene cinco guarismos y el del  $0,725$  tiene dos; por lo cual, en virtud del n.º 8.º de la regla, pasaremos á hacer supuestos intermedios hasta lograr que los errores tengan un mismo número de guarismos. Esto lo pudimos haber hecho desde luego; pero hemos querido continuar el método para que se conozcan mejor los diferentes medios de llegar al mismo resultado.

Suponiendo  $x = -15$  da  $-6533,4558$  de *error*; suponiendo  $x = -10$  da  $-2523,6448$  de *error*; suponiendo  $x = -5$  da  $-534,1838$ ; suponiendo  $x = -3$  da  $165,5086$ ,  $x = -2$  da  $-47,3784$ ; y como ya tiene igual número de guarismos que el error producido por el supuesto  $0,725$ , los combinaremos entre sí; y siendo menor el supuesto del  $-2$ , halló á este la correccion, multiplicando su error  $-47,3784$  por  $-2 - 0,725 = -2,725$ ; y dividiendo el producto  $+129,10614$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios que pro-

dujeron los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $142,3071309$ , resulta  $0,9$  para la correccion; que, agregada al  $-2$ , da  $-1,1$ .

Tomando  $-1,1$  por *duodécimo número supuesto*, resulta  $+22,186162$  de *error*; que, siendo positivo, indica que entre  $-2$  y  $-1,1$  hay al ménos una raiz real de la ecuacion; y como el error del  $-1,1$  es numéricamente menor, hallo la correccion al  $-1,1$ . Para esto, multiplico su error por  $-1,1$   $---2 = -1,1 + 2 = +0,9$ ; y dividiendo el producto  $19,9675458$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios; procedentes de los dos números mas próximos entre sí, que es  $-69,564562$ , resulta  $-0,2$  para la correccion; que, agregada al  $-1,1$ , da  $-1,3$ .

Tomando  $-1,3$  por *décimo tercero número supuesto*, resulta  $8,448638$  de *error*; que, siendo positivo, indica que entre  $-1,3$  y  $-2$  hay al ménos una raiz real; y como el error del  $-1,3$  es numéricamente menor, hallo la correccion al  $-1,3$ . Para esto, multiplico su error por  $-1,3$   $---2 = -1,3 + 2 = 0,7$ ; y dividiendo el producto  $5,9140466$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números mas próximos entre sí, que es  $-55,82703$ , resulta  $-0,113$  para la correccion; que, agregada al  $-1,3$ , da  $-1,413$ .

Tomando  $-1,413$  por *décimo cuarto número supuesto*, da  $+0,0914$  de *error*; que, siendo positivo, indica que entre  $-1,413$  y  $-2$  hay al ménos una raiz real; y como el error del  $-1,413$  es numéricamente menor, hallo la correccion al  $-1,413$ , multiplicando su error por  $-1,413$   $---2 = -1,413 + 2 = +0,587$ ; y dividiendo el producto  $0,0536518$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $-47,9654$ , resulta  $-0,0012$  para la correccion; que, agregada al  $-1,413$ , da  $-1,4142$ ; cuyo valor numérico siendo la raiz cuadrada negativa del  $2$ , inferimos que esta es otra raiz de la (ec. 18).

Dividiendo ahora el primer miembro de la (ec. 18'') por  $x + 1,4142$ , no podemos ménos de admirar la exactitud del método; pues resulta  $x^2 - 14x + 54$  por cociente exacto, sin mas equivocacion en la resta que *cuatro diez milésimas*. Luego las raices de la (ec. 18) son  $x = 1,4142$ , y  $x = -1,4142$ ; y las otras dos son las de la (ec. 8 § 197 t); y como  $1,4142$  es la raiz de  $2$ , resulta que la (ec. 18) tiene dos raices incommensurables y dos raices imaginarias.

*Resolucion de las ecuaciones de quinto grado.*

197 ff. La primera ecuacion de 5.<sup>o</sup> grado, á que aplicaremos nuestro método, es la siguiente:

$$x^5 - 1013x^4 - 920954x^3 + 966654946x^2 - 32048311175x \dots + 270065844499 = 0 \quad (19).$$

Con el fin de resolverla, supondremos  $x=1$ ; y sustituyendo este valor en su primer miembro, se convierte en 238983266304, que será el *error* ó equivocacion. Supongamos  $x=2$ ; y sustituido este valor en dicho primer miembro resulta 209828458125 de *error*; y como es menor que el anterior, debo hallar la correccion al 2. Para esto, multiplico su error 209828458125 por la unidad positiva; lo que da el mismo número, y dividido por la diferencia de los dos errores, que es 29154808179, se halla 7 para la correccion; que, agregada al 2, resulta 9.

Tomando este valor 9 por *tercer número supuesto*, resulta 59252642140 de *error*; y como es menor que todos los anteriores, debo hallar la correccion al 9. Para esto, multiplico su error por la diferencia entre 9 y 2, que es 7, lo que da 414768494980; y dividido este producto por la diferencia de los dos menores errores, que es 150575815985, resulta 2,7 para la correccion; que, agregada al 9, da 11,7.

Como el guarismo decimal 7 es ya mayor que 5, tomaré 12 por *cuarto número supuesto*, lo que da 23072257375 de *error*; y siendo menor que todos los anteriores, debemos hallar la correccion al 12. Para determinarla, multiplico este error por  $12-9=3$ ; lo que da 69216772125; y dividido esto por la diferencia de los dos menores errores, que es 36180384785, se tiene 1,9 para la correccion; que, agregada al 12, da 13,9.

Tomando 14 por *quinto número supuesto*, resulta 8288382105 de *error*; y 1 para la correccion al 14; que, agregándosela, da 15.

Tomando este valor 15 por *sesto número supuesto*, da 4768996324 de *error*; y 1,3 para la correccion; que, agregada al 15, da 16,3.

Tomando este valor 16,3 por *séptimo número supuesto*, da 450147951,38313 de *error*; y 0,12 para la correccion; que, agregada al 16,3, se tiene 16,42.

Tomando este valor 16,42 por *octavo número supuesto*, da

269169751,4362094432 de *error*; y 0,18 para la correccion; y agregándosela al 16,42, resulta 16,6.

Tomemos este valor 16,6 por *noveno número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de la misma ecuacion da +158935292,90496 de *error*; y 0,2 para la correccion; que, agregada al 16,6, da 16,8.

Tomando 17 por *décimo número supuesto*, y sustituyéndole en el primer miembro de la (ec. 19), se convierte en 0; por lo que en virtud de lo espuesto (170 e), resulta que 17 es una de las raíces de la (ec. 19).

Para encontrar las demas, dividiré el primer miembro de la ecuacion primitiva (19), por  $x-17$ ; é igualando á *cero* el cociente, resulta

$$x^4 - 996x^3 - 937886x^2 + 950710884x - 15886226447 = 0 \text{ (19')}.$$

Y como esta es la (ec. 17), que tenemos ya resuelta (197 ee), y sus raíces son  $x=17$ ,  $x=977$ ,  $x=979$  y  $x=-977$ , resulta que la (ec. 19) tiene dos raíces iguales con 17; dos raíces iguales en valor numérico á 977, pero una positiva y otra negativa; y por último una raíz positiva igual con 979. Por lo cual, en virtud de lo espuesto (170 s), resulta que el primer miembro de la espresada (ec. 19), se podrá descomponer en factores del modo siguiente:  $(x-17)^2(x-977)(x+977)(x-979)=0$ . Los que efectúen este producto, hallarán el primer miembro de la (ec. 19); y quedarán plenísimamente convencidos de que nuestro método es completo.

197 gg. Para 2.º ejemplo de ecuaciones de 5.º grado, elegiré la

$$x^5 + x^4 + x + 1 = 0 \text{ (20)}.$$

El supuesto  $x=1$  da +4 de *error*.

El supuesto  $x=2$  da +51 de *error*; y resulta -0,08 para la correccion al 1; que, agregándosela, da +0,92.

Tomando 0,9 por *tercer número supuesto*, resulta 3,14659 de *error*; y -0,36 para la correccion; que, agregada al 0,9, da 0,54.

Tomando 0,5 por *cuarto número supuesto*, resulta 1,6875 de *error*; y -0,4 para la correccion; que, agregada al 0,5, da 0,1.

Tomando 0,1 por *quinto número supuesto*, resulta 1,10011 de *error*; y -0,75 para la correccion; que, agregada al 0,1, da -0,65.

Tomando -0,65 por *sesto número supuesto*, resulta 0,412127 de *error*; y -0,449 para la correccion; que, agregada al -0,65, da -1,099.

Tomando -1,1 por *séptimo número supuesto*, resulta

$-0,34641$  de *error*, y  $+0,2$  para la correccion; que, agregada al  $-1,1$ , da  $-0,9$ .

Tomando  $-0,9$  por *octavo número supuesto*, resulta  $0,16561$  de *error*; y como es de signo contrario al error del  $-1,1$ , indica que entre  $-0,9$  y  $-1,1$  hay al ménos una raiz real; y siendo el error del  $-0,9$  numéricamente menor que el del  $-1,1$ , se debe hallar la correccion al  $-0,9$ . Para esto, se multiplica su error por  $-0,9 - -1,1 = -0,9 + 1,1 = 0,2$ ; y dividiendo el producto  $0,033122$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $-0,51021$ , se tiene  $-0,06$  para la correccion; que, agregada al  $-0,9$ , da  $-0,96$ .

Tomando  $-0,96$  por *noveno número supuesto*, resulta  $0,0740232224$  de *error*; y como es de signo contrario al error del  $-1,1$ , indica que entre  $-0,96$  y  $-1,1$  hay al ménos una raiz real; y siendo el error del  $-0,9$  numéricamente menor que el del  $-1,1$  se debe hallar la correccion al  $-0,96$ . Para esto, se multiplica su error por  $-0,96 - -1,1 = -0,96 + 1,1 = 0,14$ ; y dividiendo el producto  $0,010363251136$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $-0,4381232224$ , se tiene  $-0,02$ , para la correccion; que, agregada al  $-0,96$ , resulta  $-0,98$ .

Tomando  $-1$  por *décimo número supuesto*, y sustituido en el primer miembro de la ecuacion, resulta 0; por lo que  $-1$  es raiz de la (ec. 20); y dividiendo su primer miembro por  $x+1$ , é igualando á *cero* el cociente, resulta  $x^4+1=0$ ; cuyas raices podríamos deducir por nuestro método, segun lo hicimos en la (ec. 7), que eran imaginarias, y tambien por lo manifestado (151); pues trasladando y estrayendo la raiz cuarta, resulta  $x = \pm \sqrt[4]{-1}$ .

*Resolucion de las ecuaciones numéricas superiores al quinto grado.*

197 hh. Propongámonos la ecuacion del séptimo grado siguiente:

$$x^7 - 51x^6 - 587x^5 + 41777x^4 + 88723x^3 - 7105993x^2 - 3055689x + 253887179 = 0 \quad (21).$$

Para aplicarle el método, supondrémos  $x=1$ ; y sustituido este valor en su primer miembro, resulta  $243855360$  de *error*. Sustituido 2 por  $x$  en el mis-

mo primer miembro, da 220708125 de error. Y siendo este menor que el del 1, deberé multiplicar el error procedente del supuesto 2 por la unidad positiva; lo que da por producto el mismo error 220708125. Esto lo dividiré por la diferencia entre los dos errores, que es 23147235, y obtengo 9 para la correccion; que, agregada al 2, da 11.

Tomando 11 por tercer número supuesto, da -75202560 de error; que siendo de signo contrario (\*) al del supuesto 2, indica que entre 2 y 11 hay al ménos una raiz real; y como el error del 11 es menor, hallo la correccion al 11. Para esto, multiplico su error por 11-2=9; y dividiendo el producto -676823040 por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es

(\*) En la edicion anterior no advertimos que el signo de este error era contrario al del 2; y siendo menor que el error del 2 y del 1, continuamos hallando la correccion al 11 como siendo su error el menor. Este procedimiento nos condujo á las mismas raices que ponemos en el texto; pero no se encontraron en el mismo órden.

Así es, que despues del supuesto 11, hicimos el 9; luego los -8,2, y el -23, que nos resultó ser raiz de la ecuacion.

Dividido el primer miembro de la (ec. 21) por  $x+23$ , resultó

$$x^6 - 74x^5 + 1115x^4 + 16132x^3 - 282313x^2 - 612794x + 11038573 = 0 \text{ (XXI')}.$$

En la cual, se hicieron los supuestos 1, 2, 8,6, 7,6, 6,7 y 7; resultando que 7 era otra raiz de la ecuacion.

Dividido el primer miembro de la (ec. XXI') por  $x-7$ , é igualado á *cero* el cociente, se obtuvo

$$x^5 - 67x^4 + 646x^3 + 20654x^2 - 137735x - 1576939 = 0 \text{ (XXI'')}.$$

La cual, en virtud de los supuestos 1, 2, -22,4, 10,02, 10,1, 10,12, 10,14, 10,2, 12 y 13, nos dió, que 13 era una de sus raices.

Dividido el primer miembro de la (ec. XXI'') por  $x-13$ , é igualado á *cero* el cociente, resultó

$$x^4 - 54x^3 - 56x^2 + 19926x + 121303 = 0 \text{ (XXI''')}.$$

295910685, resulta  $-2$  para la corrección; que, agregada al 11, da 9.

Tomando 9 por *cuarto número supuesto*, resulta  $-67502984$  de *error*; que, siendo negativo, indica que entre 2 y 9 hay al ménos una raíz real; y como el error del 9 es menor, hallo la corrección á dicho número, multiplicando su error por  $9-2=7$ ; y dividiendo el producto  $-472520888$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $288211109$ , resulta  $-1,9$  para la corrección; que, agregada al 9, da 7,1.

Tomando 7 por *quinto número supuesto*, y substituido en el primer miembro de la ecuación, le reduce á 0; por lo que infiero (170 e) que el 7 es una de las raíces de la (ec. 21).

La cual, por medio de los supuestos 1, 2,  $-6$ ,  $-7$ , nos manifestó que  $-7$  era raíz de la ecuación.

Dividido el primer miembro de la (ec. XXI''') por  $x+7$ , é igualando á *cero* el cociente, obtuvimos

$$x^3-61x^2+371x+17329=0 \text{ (XXI''').}$$

Esta, en virtud de los supuestos 1, 2,  $-89$ , 10, 100, 1000,  $-1$ ,  $-10$ ,  $-100$ ,  $-10,4$ ,  $-11$ ,  $-13$ , nos da por raíz el  $-13$ .

Dividiendo el primer miembro de la (ec. XXI'') por  $x+13$ , é igualando el cociente á *cero*, resulta

$$x^2-74x+1333=0 \text{ (XXI'').}$$

La que, por medio de los supuestos 1, 2, 19, 24, 29, 30,2 y 31, da á conocer que 31 es raíz suya.

Dividiendo el primer miembro de la (ec. XXI') por  $x-31$ , é igualando á *cero* el cociente, se obtiene  $x-43=0$ , que da  $x=43$ ; y resultan las mismas raíces de la (ec. 21). Además, se advierte en los supuestos hechos, que se van acercando cada uno mas á una de las raíces. Al principio suelen andar divagando los valores acercándose unos á una raíz y otros á otra; pero siempre acercándose á una de ellas mas que todos los supuestos anteriores. Todo lo cual es un comprobante mas de la fecundidad de este admirable y maravilloso método.

197 ii. Dividiendo su primer miembro por  $x-7$ , é igualando á 0 el cociente, se tiene

$$x^6 - 44x^5 - 895x^4 + 35512x^3 + 337307x^2 - 4744844x - 36269597 = 0 \quad (21')$$

Para aplicarle el método, supondré  $x=1$ , y sustituido este valor en el primer miembro de la (ec. 21'), da  $-40642560$  de *error*. Sustituyendo 2 por  $x$  en el primer miembro, resulta  $-44140729$  de *error*; que, siendo mayor numéricamente que el del 1, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por  $-1$ ; y dividiendo el producto  $+40642560$  por la diferencia de los dos errores, que es  $-3498169$ , resulta  $-11$  para la correccion; que, agregada al  $+1$ , da  $-10$ .

Tomando  $-10$  por *tercer número supuesto*, resulta  $+9410143$  de *error*; que siendo positivo, indica que entre 1 y  $-10$  hay al ménos una raiz real de la ecuacion; y como el error del  $-10$  es numéricamente menor, hallo la correccion al  $-10$ , multiplicando su error por  $-10-1=-11$ ; y dividiendo el producto  $-9410143$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $-50052703$ , resulta  $+2$ , para la correccion; que, agregada al  $-10$ , da  $-8$ .

Tomando  $-8$  por *cuarto número supuesto*, resulta  $+5132515$  de *error*; que, siendo positivo, indica que entre 1 y  $-8$  hay al ménos una raiz real de la ecuacion; y como el error del  $-8$  es numéricamente menor, hallo la correccion al  $-8$ , multiplicando su error por  $-8-1=-9$ ; y dividiendo el producto  $-45192635$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $-45775075$ , resulta  $+0,99$  para la correccion; que, agregada al  $-8$ , da  $-7,01$ .

Tomando  $-7$  por *quinto número supuesto*, resulta 0 de *error*; por lo que inferimos que  $-7$  es raiz de la (ec. 21') y tambien lo será de la (ec. 21).

197 jj. Dividiendo el primer miembro de la (ec. 21') por  $x+7$ ; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^5 - 51x^4 - 538x^3 + 39278x^2 + 62361x - 5181371 = 0 \quad (21'')$$

Suponiendo  $x=1$ , da  $-5080320$  de *error*. Suponiendo  $x=2$  resulta  $-4904625$  de *error*; que, siendo numéricamente menor que el del 1, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1, y dividiendo el producto  $4904625$  por la diferencia de los dos errores, que es  $-175665$ , resulta  $+25,8$ , para la correccion; que, agregada al 2, da  $27,8$ .

Tomando 28 por *tercer número supuesto*, da  $-664935$

de *error*; que, siendo negativo y menor numéricamente que todos, hallo la correccion al 28, multiplicando su error por  $28-2=26$ ; y dividiendo el producto  $-35488410$  por la diferencia de los dos menores errores, que es  $-4339690$ , se tiene  $+3$  para la correccion; que, agregada al 28, da 31.

Tomando 31 por *cuarto número supuesto*, resulta *cero* de *error*; por lo que inferimos que 31 es raíz de la ecuacion (21'') y tambien de las (ecs. 21 y 21').

197 II. Dividiendo el primer miembro de la (ec. 21'') por  $x-31$ , é igualando á *cero* el cociente, resulta

$$x^4-20x^3-1158x^2+3380x+167141=0 \text{ (21''')}.$$

Para aplicarle el método, supondrémos  $x=1$ ; lo que dá  $+169344$  de *error*. Suponiendo  $x=2$ , se tiene  $+169125$  de *error*; que, siendo positivo y menor que el del 1, hallo la correccion al 2. Para esto, multiplico su error por 1, y dividiendo el producto 169125 por la diferencia de los dos errores, que es 219, resulta 751 para la correccion; que, agregada al 2, da 753.

Tomando 753 por *tercer número supuesto*, resulta 310294166400 de *error*; que, siendo positivo y mayor que todos, indica, que nos hallamos en el caso del número 9.<sup>o</sup> de la regla.

Suponiendo  $x=10$ , se tiene  $+75141$ ; suponiendo  $x=100$ , da  $+68925141$ ; suponiendo  $x=1000$ , resulta  $+867580157141$ ; y como iríamos obteniendo valores mayores y positivos de suponer  $x=10000$ ,  $x=100000$  etc. pasaremos á los supuestos negativos.

Suponiendo  $x=-1$ , resulta  $+162524$  de *error*. Suponiendo  $x=-10$ , se tiene  $+77961$  de *error*. Suponiendo  $x=-100$ , da  $+118249141$  de *error*. Y como suponiendo  $x=-1000$ ,  $x=-10000$  etc. iríamos obteniendo errores mayores y positivos, procederemos á sacar la *ecuacion derivada* de la (ec. 21'''); que, en virtud de lo espuesto (11.<sup>o</sup> de la regla) es

$$4x^3-60x^2-2316x+3370=0 \text{ (21''''')}.$$

Aunque por nuestro método, no hay necesidad de quitar el coeficiente al primer término, sin embargo, como aquí vemos que todos los coeficientes se pueden dividir por 4, lo haremos por la sencillez que de ello resulta; y la *ecuacion derivada*, que deberémos resolver por nuestro método, será

$$x^3-15x^2-579x+845=0 \text{ (21''''')}.$$

Suponiendo en ella  $x=1$ , se tiene  $+242$  de *error*. El supuesto  $x=2$ , da  $-365$  de *error*.

Como estos errores tienen signos diferentes, se infiere que al ménos una raíz real se halla entre 1 y 2. Y como el error del 1

es numéricamente menor, hallo la correccion al 1, y encuentro ser 0,4; que, agregándosela, da  $1+0,4=1,4$ .

Como aquí no se necesita un valor demasiado exacto, nos basta el valor 1,4 para ver si sustituido en la (ec. 21''') da un error de diferente signo que los anteriores. Y sustituyendo 1,4 por  $x$  en la (ec. 21'''), da +179552,2816 de *error*; que, siendo positivo como todos los demas, no nos dice nada relativo á si entre estos supuestos se halla alguna raiz.

Por esta causa, pasaremos á encontrar otra raiz de la ecuacion derivada. Para lo cual, dividiremos (120) su primer miembro por  $x-1,4$ ; é igualando á *cero* el cociente, nos resulta

$$x^2-13,6x-598,04=0 \text{ (21''')}'$$

Para aplicarle el método, supondremos  $x=1$ ; lo que da -610,64 de *error*. El supuesto  $x=2$ , da -621,24; y se obtiene -57 para la correccion al 1; que, agregándosela, da -56.

Tomando -56 por *tercer número supuesto*, se obtiene +3299,56 de *error*; y como es positivo y el error del 1 era negativo, se infiere que, entre 1 y -56 hay al ménos una raiz real: y como el error del 1 tiene tres guarismos en enteros, y el de -56 tiene cuatro, harémos como supuesto intermedio,  $x=-20$ ; y se obtiene +73,96 de *error*; el cual, siendo positivo, indica que entre 1 y -20 hay al ménos una raiz real: y como el error del -20 tiene solo dos guarismos en enteros, y el del 1 tiene tres, harémos todavía como supuesto intermedio  $x=-18$ ; lo que da -29,24 de *error*; el cual siendo negativo indica que una raiz al ménos se halla entre -18 y -20; y como ya los errores de estos números supuestos tienen igual número de guarismos, hallaremos la correccion al -18, que es el que da menor error. Para esto, se multiplica su error -29,24 por  $-18--20=-18+20=2$ ; y dividiendo el producto -58,48 por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+73,96--29,24=73,96+29,24=103,2$ , resulta -0,5 para la correccion; que, agregada al -18, da -18,5

Como la correccion es tan pequeña y en los valores de las raices de la ecuacion derivada no se necesita una exactitud estremada, sustituirémos desde luego este valor -18,5 en la (ec. 21''') y obtenemos -28946,9375 de *error*; que, siendo negativo, y habiendo resultado positivos los demas, tenemos ya acorralada al ménos una de las raices. Veamos ahora cual de los supuestos calculados es el que mas se aproxima al -18; y encontramos

ser el supuesto  $x = -10$ , cuyo error es  $+77961$ ; y como es menor el del  $-18,5$ , haremos la correccion á este número. Para lo cual, multiplicaremos su error  $+77961$  por  $-18,5 - (-10) = -18,5 + 10 = -8,5$ . Y dividiendo el producto  $+262164,9476$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $106907,9375$ , resulta  $+2,5$  para la correccion; que, agregada al  $-18,5$ , da  $-18,5 + 2,5 = -16$ .

Tomando  $-16$  por *tercer número supuesto* respecto de esta combinacion, resulta  $-25531$  de *error*; que siendo negativo, indica que entre  $-10$  y  $-16$  hay al ménos una raiz real; y como el error del  $-16$  es menor, hallo la correccion al  $-16$ . Para esto, multiplico su error  $-25531$  por  $-16 - (-10) = -16 + 10 = -6$ ; y dividiendo el producto  $+153186$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+77961 - (-25531) = +77961 + 25531 = 103492$ , resulta  $1$  para la correccion; que, agregada al  $-16$ , da  $-15$ .

Tomando  $-15$  por *cuarto número supuesto*, respecto de esta combinacion, se obtiene  $-16984$  de *error*; que, siendo de signo contrario al del  $-10$ , indica que al ménos una raiz real se halla entre  $-10$ , y  $-15$ . Y como el error del  $-15$  es menor, hallo la correccion al  $-15$ . Para esto, multiplico su error  $-16984$  por  $-15 - (-10) = -15 + 10 = -5$ . Y dividiendo el producto  $+84920$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+77961 - (-16984) = +77961 + 16984 = 94945$ , resulta  $0,98$  para la correccion al  $-15$ ; que, agregándosela, da  $-15 + 0,98 = -14,02$ .

Tomando  $-14$  por *quinto número supuesto*, respecto de esta combinacion, resulta  $-10311$  de *error*; el cual indica, que la raiz se halla entre  $-10$  y  $-14$ ; y como es menor el error del  $-14$ , hallo la correccion á este número. Para esto, multiplico su error  $-10311$  por  $-14 - (-10) = -14 + 10 = -4$ ; y dividiendo el producto  $+51244$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+77961 - (-10311) = +77961 + 10311 = 88272$ , resulta  $0,53$  para la correccion al  $-14$ ; que, agregándosela, da  $-14 + 0,53 = -13,47$ .

Tomando  $-13$  por *sesto número supuesto* respecto de esta combinacion, se obtiene *cero* de *error*; por lo que inferimos

(170 e) que 13 es raíz de la (ec. 21''') y tambien lo será de las (ecs. 21, 21' y 21'').

197 ll ll. Para encontrar las demas, dividirémos el primer miembro de la (ec. 21''') por  $x+13$ ; y practicando la division (120) é igualando el cociente á *cero*, resulta

$$x^3 - 33x^2 - 729x + 12857 = 0 \quad (21''').$$

Para aplicarle el método, supondrémos  $x=1$ , lo que da 12096 de *error*.

El supuesto  $x=2$ , da 11276; y se halla 7,6 para la correccion al 2; que, agregándosela, da  $2+7,6=9,6$ .

Tomando 10 por *tercer número supuesto*, da 3267 de *error*; y 2,6 para la correccion al 10; que, agregándosela, da 12,6.

Tomando 13 por *cuarto número supuesto*, resulta 0 de *error*; por lo que (170 e) el 13 es raíz de la (ec. 21'''); y tambien lo será de las (ecs. 21, 21', 21'' y 21''').

197 mm. Para encontrar las demas, dividirémos el primer miembro de la (ec. 21''') por  $x-13$ ; é igualando á *cero* el cociente, resulta

$$x^2 - 20x - 989 = 0 \quad (21''').$$

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ , lo que da  $-1008$  de *error*; el supuesto  $x=2$ , da  $-1025$ ; y se halla  $-59$  para la correccion al 1; que, agregándosela, da  $-58$ .

Tomando  $-58$  por *tercer número supuesto*, da  $+3535$ ; que, siendo de signo contrario al del 1, indica, que entre 1 y  $-58$  hay al ménos una raíz real; y como el error del 1 es menor, hallo la correccion al 1. Para esto, multiplico su error  $-1008$  por  $1 - (-58) = 1 + 58 = 59$ ; y dividiendo el producto  $-59472$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $3535 - (-1008) = 4543$ , resulta  $-13$  para la correccion al 1; que, agregándosela, da  $1 - 13 = -12$ .

Tomando  $-12$  por *cuarto número supuesto*, resulta  $-605$  de *error*; lo que indica, que la raíz se halla entre  $-12$  y  $-58$ . Y como el error del  $-12$  es menor, se halla la correccion al  $-12$ . Para esto, se multiplica su error por

$$-12 - (-58) = -12 + 58 = +46;$$

y dividiendo el producto  $-27830$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es

$3535 - (-605) = 3535 + 605 = 4140$ ; resulta  $-6,7$  para la correccion al  $-12$ ; que, agregándosela, da  $-18,7$ .

Tomando  $-19$  por *quinto número supuesto*, da  $-248$  de *error*; lo que indica, que la raíz se halla entre  $-19$  y  $-58$ ,

y resulta  $-3$  para la correccion al  $-19$ ; que, agregándola, da  $-19-3=-22$ .

Tomando  $-22$  por *sexto número supuesto*, resulta  $-65$  de *error*, y  $-0,7$  para la correccion; que, agregada al  $-22$ , da  $-22,7$ .

Tomando  $-23$  por *séptimo número supuesto*, da  $0$  de *error*; por lo que inferimos que  $-23$  es raiz de la (ec.  $21^v$ ), y tambien lo será de las (ec.  $21$ ,  $21'$ ,  $21''$ ,  $21'''$  y  $21^v$ ).

197 *nn*. Para encontrar la raiz que falta, dividiremos el primer miembro de la (ec.  $21^v$ ) por  $x+23$ , é igualando á *cero* el cociente, resulta  $x-43=0$ ; que da  $x=43$ . Luego las raices de la (ec.  $21$ ) son  $7$ ,  $-7$ ,  $31$ ,  $-13$ ,  $+13$ ,  $-23$  y  $43$ ; que son las mismas que se obtuvieron por el método de la edicion anterior, aunque con diverso orden segun aparece por la nota del § 197 *hh*.

Pero, aun hay mas que admirar en este método. Si dividimos el primer miembro de la (ec.  $21'''$ ) por  $x+18,5$  é igualamos el cociente á *cero*, se obtiene  $x-32,1=0$ ; que da  $x=32,1$ , que es la tercera raiz de la *ecuacion derivada* de la (ec.  $21'''$ ). Y si sustituimos este valor  $32,1$ , ó mas sencillamente el  $-32$  en el primer miembro de dicha (ec.  $21'''$ ) da  $-518175$  de *error*; el cual siendo negativo, y el del  $x=100$  resultando positivo, indica que entre  $32$  y  $100$  se halla al ménos una raiz real que es la  $43$ ; y continuando el método, llegaríamos á determinarla tambien por este procedimiento; lo cual es un nuevo comprobante de la fecundidad del método.

197 *oo*. Siendo nuestro objeto el que se presenten las mayores dificultades para enseñar el modo de vencerlas, vamos á proponernos una ecuacion, que formaremos *ex-profeso* aun mas complicada; y con el fin de que todo se vea con claridad, pondremos de manifesto su formacion.

Tomemos primero el factor  $x-7$ , que da por raiz  $x=7$ . Elijamos para otra raiz en enteros  $x=8$ , y tendremos que el producto  $(x-7)(x-8)$  igualado con *cero*, dará las dos raices reales y en enteros  $x=7$ , y  $x=8$ . Si dicho producto lo multiplicamos por el factor  $x^2-53$ , que da las dos raices  $x=+7,28$ ,  $x=-7,28$ , y ademas lo multiplicamos por el factor  $x^2-61$  que da por raices  $x=7,81$ ,  $x=-7,81$ , tendremos que el producto  $(x-7)(x-8)(x^2-53)(x^2-61)$ , igualado con *cero*, tendrá cuatro raices reales positivas, á saber:

$$x=7; \quad x=7,28; \quad x=7,81; \quad \text{y} \quad x=8;$$

que la diferencia de la mayor  $8$  á la menor  $7$  es  $1$ , y que las otras están comprendidas entre dichos valores.

Introduzcamos, además, el factor  $x^2+59$ , cuyas raíces son  $x=7,681\sqrt{-1}$ , y  $x=-7,681\sqrt{-1}$  en que el coeficiente real de la parte imaginaria se halla también comprendido entre 7 y 8.

Para mayor grado de complicación, introduzcamos todavía el factor  $x^2+61$ , cuyas dos raíces son

$x=7,81\sqrt{-1}$  y  $x=-7,81\sqrt{-1}$ , en que el coeficiente del radical imaginario es precisamente igual á una de las raíces incommensurables. Por manera, que la ecuación, que resulte, contendrá una raíz real y entera 7; otra raíz real y en enteros 8; dos raíces reales, pero incommensurables, que son 7,28 y 7,81; que son cuatro, todas reales y positivas; y que se hallan tan próximas entre sí, que de la menor á la mayor sólo hay una unidad de diferencia. Además, dos raíces imaginarias positivas en que el factor real que acompaña al  $\sqrt{-1}$  en una, tiene un valor intermedio entre los dos de las raíces reales, y otra tiene un valor exactamente igual á otra de las raíces; pero también comprendido entre las dos raíces reales 7 y 8.

Para valores negativos contendrá dos raíces reales pero incommensurables, á saber:  $x=-7,28$ ,  $x=-7,81$ ; cuya diferencia es 0,53; y además, dos raíces imaginarias,

una  $x=-7,681\sqrt{-1}$ , y otra  $x=-7,81\sqrt{-1}$ , de la misma forma que las positivas.

Indicando el producto de todos estos factores, será  
 $(x-7)(x-8)(x^2-53)(x^2-61)(x^2+59)(x^2+61)=0$ ;  
 que, efectuando las operaciones, se tiene  
 $x^{10}-15x^9+62x^8-90x^7-6512x^6+102720x^5-405814x^4$   
 $+334890x^3+10385311x^2-174533505x$ .....  
 $+651591752=0$  (22).

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ ; lo que da 487468800 de error;  $x=2$ , da 343120150 de error; y como es menor que el anterior, hallo la corrección al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto 343120150 por la diferencia de los dos errores, que es 144348650, resulta 2 para la corrección; que, agregada al 2, da 4.

Tomando 4 por tercer número supuesto, da 112530580 de error; y 0,977 para la corrección; que, agregada al 4, da 4,977.

Tomando 5 por cuarto número supuesto, da 43700753 de error, y 0,65 para la corrección; que, agregada al 5, da 5,65.

Tomando 6 por quinto número supuesto, da +7802750 de error; y 0,2 para la correccion; que, agregada al 6, da 6,2.

Tomando 6,2 por sexto número supuesto, da 1037550,1 etc. de error; y 0,03 para la correccion; que, agregada al 6,2, da 6,23.

Tomando 6,23 por séptimo número supuesto, da +903351,4 etc. de error; y +0,539 para la correccion; que, agregada al 6,23, da 6,769.

Tomando 7 por octavo número supuesto, da 0 de error; por lo que inferimos (170 e) que 7 es raiz de la (ec. 22).

197 pp. Dividiendo el primer miembro de dicha (ec. 22) por  $x-7$ ; é igualando á cero el cociente, se tiene

$$x^9 - 8x^8 + 6x^7 - 48x^6 - 6848x^5 + 54784x^4 - 22326x^3 \dots + 178608x^2 + 11635567x - 93084536 = 0 \quad (22').$$

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ ; lo que da -81244800 de error;  $x=2$ , da -68622002 de error; hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto -68622002 por la diferencia de los dos errores, que (112) es -12622798, resulta 5,4 para la correccion; que, agregada al 2, da 7,4.

Tomando 7,4 por tercer número supuesto, da -238967,5 etc. de error; hallo la correccion al 7,4, multiplicando su error por 7,4-2=5,4; y dividiendo el producto -12904249,6 etc. por la diferencia de los dos menores errores, que es -68383034,4 etc., resulta 0,19 para la correccion; que, agregada al 7,4, da 7,59.

Tomando 8 por cuarto número supuesto, resulta 0 de error; por lo que inferimos que 8 es raiz de la mencionada (ec. 22'), y tambien de la (ec. 22).

197 qq. Dividiendo el primer miembro de la (ec. 22') por  $x-8$ ; é igualando á cero el cociente, se tiene

$$x^8 + 6x^6 - 6848x^4 - 22326x^2 + 11635567 = 0 \quad (22'').$$

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ ; lo que da 11606400 de error;  $x=2$ , da 11437335 de error; hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto 11437335 por la diferencia de los dos errores, que es 169165, resulta 67 para la correccion; que, agregada al 2, da 69.

Tomando 69 por tercer número supuesto, da 514290564504000 de error; y como es mayor que todos, indica que nos hallamos en el caso del número 9.<sup>o</sup> de la regla. Por lo que, supongo  $x=10$ ; lo que da +46922967 de error;  $x=100$ , da 10005314988575567 de error; y como supo-

niendo  $x=1000$ ,  $x=10000$ ,  $x=100000$  etc., iríamos sacando valores positivos y mayores, inferimos que por valores positivos de  $x$ , no debemos esperar cambio de signo. Suponiendo  $x=-1$ , se tiene 11606400 de *error*;  $x=-10$ , da 46922967 de *error*;  $x=-100$ , da 10005314988575567 de *error*; y como van saliendo los mismos errores, que por los valores positivos de  $x$ , inferimos que tampoco por valores negativos de  $x$  podemos esperar cambio de signo; luego si esta ecuacion tiene raices reales, estarán agrupadas en número par.

Por lo cual, hallaremos la *ecuacion derivada* de la (ec 22); que, en virtud de lo espuesto (11.º de la regla) es

$$8x^7 + 36x^5 - 27392x^3 - 44652x = 0 \quad (22'')$$

Esta ecuacion tiene por raiz  $x=0$ ; y suprimiendo la  $x$ , se convierte en  $8x^6 + 36x^4 - 27392x^2 - 44652 = 0 \quad (21'')$

Si suponemos  $x=0$ , en la (ec. 22''), se obtiene por error el último término +11635567, que siendo positivo, no hay cambio de signo.

Como los coeficientes de la (ec. 22'') no se pueden dividir por 8, aplicaremos el método á dicha ecuacion conforme está.

Suponiendo  $x=1$ , se tiene -72000 de *error*;  $x=2$ , da -153132 de *error*; y como el del 1 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por -1, y dividiendo el producto +72000 por la diferencia de los errores, que es -81132, resulta -0,8 para la correccion; que, agregada al 1, da 0,2.

Tomando 0,2 por *tercer número supuesto*, da -45747,6 etc. de *error*; hallo la correccion al 0,2, multiplicando su error por  $0,2-1=-0,8$ ; y dividiendo el producto 36596,098 por la diferencia de los dos menores errores, que es -26252,3 resulta -1,3 para la correccion; que, agregada al 0,2 da -1,1.

Tomando -1,1 por *cuarto número supuesto*, da -77729,4 de *error*; hallo la correccion al 1, multiplicando su error por  $1-1,1=2,1$ ; y dividiendo el producto -151200 por la diferencia de los dos menores errores, que es -5675,4 resulta +26,6 para la correccion; que, agregada al 1, da 27,6.

Tomando 28 por *quinto número supuesto*, da +4761047360 de *error*, que es ya positivo; y como el supuesto 2 se acerca mas al 28, y da un error negativo, inferimos que entre 2 y 28 hay al menos una raiz real; y observando que el error del 2 es muchísimo menor que el del 28, haré un supuesto intermedio, cual es  $x=10$ , lo que da +5576148 de *error*; que, siendo positivo, indica que

entre 2 y 10 hay al ménos una raiz real; y como el error del 2 es mucho menor que el del 10, haré todavía otro supuesto intermedio, como  $x=6$ ; lo que da  $-880860$  de error; que, siendo negativo, indica que entre 6 y 10 hay al ménos una raiz real de la ecuacion; y como el error del 6 es menor, hallo la correccion al 6, multiplicando su error por  $6-10=-4$ ; y dividiendo el producto  $+3523240$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+6667008$ , resulta  $0,53$  para la correccion; que, agregada al 6, da  $6,53$ .

Tomando 7 por *sesto número supuesto*, resulta  $-259232$  de error; que, siendo negativo, indica que entre 7 y 10 hay al ménos una raiz real de la ecuacion; y como el error del 7 es menor hallo la correccion á este número, multiplicando su error por  $7-10=-3$ ; y dividiendo el producto  $+877696$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+583548$ , resulta  $0,13$  para la correccion; que, agregada al 7, da  $7,13$ .

Tomando  $7,13$  por *séptimo número supuesto*, da  $-392876,542$  de error; que siendo negativo indica que entre  $7,13$  y 10 hay al ménos una raiz real de la ecuacion; y como el error del  $7,13$  es menor, hallo la correccion al  $7,13$ , multiplicando su error por  $7,13-10=-2,87$ ; y dividiendo el producto  $+1127545,69276$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $5969024,548$ , resulta  $+0,26$  para la correccion; que, agregada al  $7,13$ , da  $7,36$ .

Tomando  $7,4$  por *octavo número supuesto*, resulta  $-125321,467$  de error; que siendo negativo, indica que entre  $7,4$  y 10 hay al ménos una raiz real de la ecuacion; y como el error del  $7,4$  es menor, hallo la corrección á él, multiplicando su error por  $7,4-10=-2,6$ ; y dividiendo el producto  $+324345,8142$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $5701469,467$ , resulta  $0,06$  para la correccion; que, agregada al  $7,4$ , da  $7,46$ .

Tomando  $7,5$  por *noveno número supuesto*, da  $-113421,892$  de error; que, siendo negativo, indica que entre  $7,5$  y 10 hay al ménos una raiz real de la ecuacion; y como el error del  $7,5$  es menor, hallo la correccion á este número, multiplicando su error por  $7,5-10=-2,5$ ; y dividiendo el producto  $+283553,73$  por la diferencia de los dos

errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es 5689569,892, se tiene 0,058 para la correccion; que, agregada al 7,5, da 7,558.

Tomando 7,6 por *décimo número supuesto*, resulta -100256,812 de *error*; y 0,065 para la correccion; que, agregada al 7,6, da 7,665.

Tomando 7,7 por *undécimo número supuesto*, resulta 85724,325 de *error*; y 0,04 para la correccion; que, agregada al 7,7, da 7,74.

197 *rr.* Como la correccion es ya tan pequeña, y en las raíces de la *ecuacion derivada* no hay tanta necesidad de hallarlas con una precision extrema, pasaremos á sustituir este valor en la (ec. 22'') con el objeto de ver si nos da cambio de signo, esto es, si obtenemos un valor negativo, puesto que todos los demas han resultado positivos.

Sustituyendo, pues, 7,74 por  $x$  en el primer miembro de la (ec. 22''), resulta -127717,4 etc. de *error*; que, siendo negativo, y habiendo obtenido por el supuesto  $x=10$ , un error positivo y espresado por +46922967, indica, que entre 7,74 y 10 hay al ménos una raíz real; y como el error del 7,74 es menor, hallo la correccion á dicho número, multiplicando su error por  $7,74-10=-2,26$ ; y dividiendo el producto +288711,4 etc. por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es 47050684,4, resulta 0,006 para la correccion; que, agregada al 7,74, da 7,746.

Tomando 7,75 por *tercer número supuesto* respecto de esta combinacion, se obtiene -87873,7 etc. de *error*; que, siendo negativo, indica que entre 7,75 y 10 hay al ménos una raíz real; y como el 7,75 da el menor error, hallo la correccion á dicho número, multiplicando su error por  $7,75-10=-2,25$ ; y dividiendo el producto +197715,9 etc. por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es +47010840,7 etc. resulta 0,004 para la correccion; que, agregada al 7,75, da 7,754.

Aquí observamos que esta correccion sale tan pequeña, porque el error del 10 es considerablemente mayor que el del 7,75; pues tiene el del 10 tres guarismos mas que el del 7,75: por lo cual, si queremos llegar al resultado con mas brevedad, compararemos los errores del 7,74 y del 7,75 que distan mucho ménos entre sí; lo cual proporcionará otro caso mas de observar la fecundidad del método. Y como el error del 7,75 es menor

que el del 7,74; halló la correccion al 7,75, multiplicando su error por  $7,75 - 7,74 = 0,01$ ; y dividiendo el producto  $-878,7$  etc., por la diferencia de los dos menores errores, que es  $-39843,7$  etc., resulta  $0,02$  para la correccion; que, agregada al 7,75, da 7,77.

Tomando 7,77 por *cuarto número supuesto*, da  $-56983,4$  etc. de *error*; y como es menor que todos, halló la correccion al 7,77, multiplicando su error por  $7,77 - 7,75 = 0,02$ ; y dividiendo el producto  $-1139,6$  etc. por la diferencia de los dos menores errores, que (I. 112) es  $-30890,2$  etc., resulta  $0,037$  para la correccion; que, agregada al 7,77, da 7,807; que como por una parte la correccion es ya tan pequeña, y por otra podemos suprimir (96) las *siete milésimas*, poniendo 1 en el lugar de las *centésimas*, resulta, que podemos tomar por raíz suficientemente aproximada el 7,81.

197 *rr rr*. La ((ec. 22'') §197 *qq*.) tiene potencias pares de  $x$  en todos sus términos; por consiguiente, debe dar los mismos errores para los valores positivos de  $x$  que para los negativos de igual valor numérico; por lo cual debemos inferir, que tambien es raíz de la misma ecuacion el valor  $x = -7,74$ . Pero aun hay mas; la (ec. 22'') tiene todos los esponentes de grado par; por consiguiente, dará el mismo error para los valores positivos de  $x$ , que para los correspondientes negativos. Luego, pues hemos visto que  $x = 7,81$  es una raíz de dicha (ec. 22''), debemos inferir, que tambien es raíz de la misma ecuacion, el valor  $x = -7,81$ . Luego si dividimos el primer miembro de dicha (ec. 22''), por el producto  $(x - 7,81)(x + 7,81) = x^2 - 60,9961$ , que podemos tomar (96) por  $x^2 - 61$ , resulta, que, dividiendo el primer miembro de dicha (ec. 22'') por  $x^2 - 61$ , é igualando á *cero* el cociente, se tiene  $x^6 + 67x^4 - 2761x^2 - 190747 = 0$  (22'''). Para aplicarle el método, supongamos  $x = 1$ , lo que dá  $-193440$  de *error*. Suponiendo  $x = 2$ , se obtiene  $-200557$  de *error*; y como este es mayor, debo hallar la correccion al 1. Para lo cual, multiplico su error por  $-1$ ; y dividiendo el producto  $+193440$  por la diferencia de los dos errores, que es  $-7117$ , resulta  $-27$  para la correccion; que, agregada al 1, da  $-26$ .

Tomando  $-26$  por *tercer número supuesto*, da  $+335418815$  de *error*; que, siendo ya positivo, indica que entre 1 y  $-26$  hay al ménos una raíz real; y siendo considerabilísimamente menor el error del 1, pues tiene solo seis guarismos cuando el del  $-26$  tiene nueve guarismos, harémos un supuesto intermedio, por ejemplo  $x = -10$ ; lo que da  $+1203153$  de error, que siendo positivo, indica que entre  $+1$  y  $-10$  hay al ménos una raíz

real de la ecuacion; y como el error del 1 es menor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por  $1 - -10 = 11$ ; y dividiendo el producto  $-2127840$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1396593$ , resulta  $-1,5$  para la correccion; que, agregada al 1, da  $-0,5$ .

Tomando  $-0,5$  por *tercer número supuesto*, da  $-191432,04$  etc. de *error*; hallo la correccion al  $-0,5$ , multiplicando su error por  $-0,5 - -10 = 9,5$ ; y dividiendo el producto  $-1818604,4$  etc. por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1394585,04$  etc., resulta  $-1,3$  para la correccion; que, agregada al  $-0,5$ , da  $-1,8$ .

Tomando  $-2$  por *cuarto número supuesto*, da  $-200557$  de *error*; hallo la correccion al  $-2$ , multiplicando su error por  $-2 - -10 = 8$ ; y dividiendo el producto  $-1604456$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1403710$ , resulta  $-1$  para la correccion; que, agregada al  $-2$ , da  $-3$ .

Tomando  $-3$  por *quinto número supuesto*, da  $-209890$  de *error*; hallo la correccion al  $-3$ , multiplicando su error por  $-3 - -10 = +7$ ; y dividiendo el producto  $-1479120$ , por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1413043$ , resulta  $-1$  para la correccion; que, agregada al  $-3$ , da  $-4$ .

Tomando  $-4$  por *sexto número supuesto*, da  $-213675$  de *error*; hallo la correccion al  $-4$ , multiplicando su error por  $-4 - -10 = +6$ ; y dividiendo el producto  $-1282050$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $1416828$ , resulta  $-0,9$  para la correccion; que, agregada al  $-4$ , da  $-4,9$ .

Tomando  $-5$  por *séptimo número supuesto*, da  $-202272$  de *error*; hallo la correccion al  $-5$ , multiplicando su error por  $-5 - -10 = +5$ ; y dividiendo el producto  $-1011360$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1405425$ , resulta  $-0,7$  para la correccion; que, agregada al  $-5$ , dá  $-5,7$ .

Tomando  $-6$  por *octavo número supuesto*, da  $-155655$  de *error*; hallo la correccion al  $-6$ , multiplicando su error por  $-6 - -10 = +4$ ; y dividiendo el producto  $-622620$ , por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1358808$ ,

resulta  $-0,4$  para la correccion; que, agregada al  $-6$ , da  $-6,4$ .

Tomando  $-6,4$  por *noveno número supuesto*, da  $-122800,7$  etc. de *error*; hallo la correccion al  $-6,4$ , multiplicando su error por  $-6,4 - -10 = 3,6$ ; y dividiendo el producto  $-442082,6$  etc. por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números mas próximos entre sí, que es  $+1325953,7$  etc., resulta  $-0,3$  para la correccion; que, agregada al  $-6,4$ , da  $-6,7$ .

Tomando  $-7$  por *décimo número supuesto*, da  $-58520$  de *error*; hallo la correccion al  $-7$ , multiplicando su error por  $-7 - -10 = +3$ ; y dividiendo el producto  $-175560$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1261673$ , resulta  $-0,13$  para la correccion; que, agregada al  $-7$ , da  $-7,13$ .

Tomando  $-7,13$  por *undécimo número supuesto*, da  $-28462,1$  etc. de *error*; hallo la correccion al  $-7,13$ , multiplicando su error por  $-7,13 - -10 = 2,87$ ; y dividiendo el producto  $-83686,3$  etc. por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1231615,1$  etc., resulta  $-0,067$  para la correccion; que, agregada al  $-7,13$ , da  $-7,197$ .

Tomando  $-7,2$  por *duodécimo número supuesto*, da  $-14508,3$  etc. de *error*; y como es el menor, hallo su correccion, multiplicando su error por  $-7,2 - -10 = +2,8$ ; y dividiendo el producto  $-40623,3$  etc. por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1217661,3$  etc., resulta  $-0,03$  para la correccion; que, agregada al  $-7,2$ , da  $-7,23$ .

Tomando  $-7,23$  por *décimo tercero número supuesto*, da  $-6864,5$  etc. de *error*; hallo su correccion, multiplicando su error por  $-7,23 - -10 = 2,77$ ; y dividiendo el producto  $-18014,7$  etc. por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1210012,5$  etc., resulta  $-0,01$  para la correccion; que, agregada al  $-7,23$ , da  $-7,24$ .

Tomando  $-7,24$  por *décimo cuarto número supuesto*, da  $-6618,5$  etc. de *error*; y como es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por  $-7,24 - -10 = +2,76$ ; y dividiendo el producto  $-18267,07$  etc. por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1209771,5$  etc., resulta  $-0,01$  para la correccion; que, agregada al  $-7,24$ , da  $-7,25$ .

Tomando  $-7,3$  por *décimo quinto número supuesto*, da  $+5722,7$  etc. de *error*; que, siendo positivo, y negativo el del  $-7,24$ , indica que entre  $-7,24$  y  $-7,3$  hay al ménos una raiz real; y como el error del  $-7,3$  es menor, hallo la correccion al  $-7,3$ , multiplicando su error por  $-7,3 - -7,24 = -0,06$ ; y dividiendo el producto  $-343,3$  etc. por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $-12341,2$  etc., resulta  $0,02$  para la correccion; que, agregada al  $-7,3$ , da  $-7,28$ .

Tomando  $-7,28$  por *décimo sexto número supuesto*, da  $-332,1$  etc. de *error*; que, siendo negativo, y habiendo resultado positivo el del  $-7,3$ , indica, que entre  $-7,28$  y  $-7,3$  hay al ménos una raiz real; y como el error del  $-7,28$  es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por  $-7,28 - -7,3 = +0,02$ ; y dividiendo el producto  $-6,64$  etc. por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+6054,9$  etc., resulta  $-0,001$  para la correccion; que, agregada al  $-7,28$ , da  $-7,281$ .

Tomando  $-7,281$  por *décimo séptimo número supuesto*, da  $1354,7$  etc. de *error*; que, siendo positivo, y negativo el del  $-7,28$ , indica, que entre  $-7,28$  y  $-7,281$  hay al ménos una raiz real; hallo la correccion al  $-7,28$ , multiplicando su error por  $-7,28 - -7,281 = +0,001$ ; y dividiendo el producto  $-0,332$  etc. por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+1686,9$  etc., resulta  $-0,0001$  para la correccion; que, agregada al  $-7,28$ , da  $-7,2801$ ; que suprimiendo la *diezmilésima*, tomaremos  $-7,28$  por raiz de la (ec. 22''').

197 ss. Y como tambien lo será, por ser pares todas las potencias de dicha (ec. 22'''), otra raiz  $x = +7,28$ , resulta que la (ec. 22''') será divisible por  $(x + 7,28) \times (x - 7,28) = x^2 - 52,9984$ , que reputaremos (96) en  $x^2 - 53$ . Dividiendo el primer miembro de la (ec. 22''') por  $x^2 - 53$ , é igualando á *cero* el cociente, resulta  $x^4 + 120x^2 + 3599 = 0$  (22''').

Era nuestra intencion aplicarle el método, y habíamos principiado á hacerlo, para que se corroborase aun mas todavía sus ventajas; pero lo suspendimos, para hacer ver que solo con fijar la vista en la forma de esta ecuacion, nos convencemos de que todas sus raices son imaginarias. En efecto, los dos términos en que

se halla la  $x$ , son positivos y contienen potencias de  $x$  con esponente par, y como toda potencia de esponente par, es siempre positiva (128...1<sup>o</sup>), resulta que los tres términos del primer miembro de la (ec. 22<sup>v</sup>) son positivos; y como la suma de un conjunto cualquiera de números positivos jamas puede ser cero, como exige la ecuacion, resulta que esta es imposible en valores reales de la incógnita  $x$ . Luego la (ec. 22) no tiene mas raíces reales, que las seis siguientes  $x=7$ ;  $x=7,28$ ;  $x=7,81$ ;  $x=8$ ;  $x=-7,28$ ; y  $x=-7,81$ . Las otras cuatro resultan imaginarias; el hallar su forma no trae ventaja en esta clase de cuestiones, pero si alguno deseara despejar  $x$  en dicha (ec. 22<sup>v</sup>), lo conseguirá en virtud de lo espuesto (§ 254 I. T. E.); y hallará

$$x = \pm \sqrt{-60 \pm \sqrt{3600 - 3599}} = \sqrt{-60 \pm \sqrt{1}} \dots\dots$$

$$= \pm \sqrt{-60 \pm 1} ;$$

que todos sus valores son imaginarios. Por otra parte si efectuamos el producto de los dos factores  $x^2+59$ ,  $x^2+61$ , que entraron en la composicion de la (ec. 22), resulta en efecto el primer miembro de la (ec. 22<sup>v</sup>).

Despues de halladas las seis raíces reales de la (ec. 22), que tuvimos por objeto el formarla en términos que presentase el gran número de dificultades que entónces pudimos concebir, *ya no debe quedar la mas minima duda en que este nuevo método no tiene escepcion alguna*; y que, cualesquiera que sean las ecuaciones, el método siempre suministra todas las raíces reales, que puedan contener; por lo que deberíamos terminar aquí nuestras investigaciones. Mas, tanto con el objeto de presentar algunos mas ejemplos, como para perpetuar la época en que me acabé de convencer plenísimamente de la verdad de cuanto acabo de asegurar, resolví en la edicion anterior tres ecuaciones, á saber: una del grado 11, porque el 11 de abril de 1835 fué cuando se halló el resultado del (§ 197 r r) que ya decidió para siempre de la generalidad del método; otra del grado 19 para fijar el siglo en que esto lo hemos hecho; y la otra del grado 35 para fijar el año del siglo en que nos hallábamos entónces.

197 tt. Para la del grado 11, elegirémos la

$$x^{11} - 20x^{10} - 22x^9 + 2920x^8 - 24452x^7 + 78456x^6 - 66874x^5 \dots$$

$$- 121192x^4 + 133315x^3 + 30428x^2 + 175760x \dots$$

$$+ 227136 = 0 \text{ (23).}$$

El supuesto  $x=1$ , da 435456 de *error*;  $x=2$ , da +287000 de *error*; y como este es menor, hallo la correccion

al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto 287000 por la diferencia de los errores, que es 148456, resulta 1,9, para la correccion; que, agregada al 2, da 3,9.

Tomando 4 por *tercer número supuesto*, da 0 de error; por lo que inferimos que 4 es raiz de la (ec. 23).

Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 23) por  $x-4$ ; é igualando á *cero* el cociente, resulta  $x^{10}-16x^9-86x^8+2576x^7-14148x^6+21864x^5+20582x^4-38864x^3-22141x^2-58136x-56784=0$  (23').

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ , lo que da -175153 de error;  $x=2$ , da -148502 de error; hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1, y dividiendo el producto -148502 por la diferencia de los dos errores, que es -26651, resulta 5 para la correccion; que, agregada al 2, da 7.

Tomando 7 por *tercer número supuesto*, da 0 de error; por lo que 7 es raiz de la (ec. 23'), y tambien de la (ec. 23).

Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 23') por  $x-7$ ; é igualando á 0 el cociente, se tiene  $x^9-9x^8-149x^7+1533x^6-3417x^5-2055x^4+6197x^3+4515x^2+9464x+8112=0$  (23'').

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ ; lo que da 24192 de error;  $x=2$ , da 71276 de error; hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto -24192 por la diferencia de los dos errores, que es 47084, resulta -0,5 para la correccion; que, agregada al 1, da +0,5.

Tomando 0,5 por *tercer número supuesto*, da 14348,5 etc. de error; que siendo positivo y menor que todos, hallo la correccion al 0,5, multiplicando su error 14348,5 por 0,5-1=-0,5; y dividiendo el producto -7174,25, por la diferencia de los dos menores errores, que es 24192-14348,5=9743,5, resulta -0,7 para la correccion; que, agregada al 0,5, da -0,2.

Tomando -0,2 por *cuarto número supuesto*, da +6347,03 etc. de error; hallo la correccion al -0,2, multiplicando su error por -0,2-0,5=-0,7; y dividiendo el producto -4442,9 etc. por la diferencia de los dos menores errores, que es +8001,4 etc., resulta -0,5 para la correccion; que, agregada al -0,2, da -0,7.

Tomando -1 por *quinto número supuesto*, da 0 de error; por lo que el -1 es raiz de la (ec. 23''), y tambien de las (ecs. 23' y 23).

Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 23'') por  $x+1$ ; é igualando á *cero* el cociente, resulta

$$x^8 - 10x^7 - 139x^6 + 1672x^5 - 5089x^4 + 3034x^3 + 3163x^2 + 1352x + 8112 = 0 \quad (23''').$$

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ ; lo que da 9392 de error;  $x=2$ , da 6300 de error; hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto 6300, por la diferencia de los dos errores, que es 3092, resulta 2 para la correccion; que, agregada al 2, da 4.

Tomando 4 por tercer número supuesto, da 0 de error; por lo que inferimos que 4 es raíz de la (ec. 23'''), y tambien de las (ecs. 23'', 23' y 23).

Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 23''') por  $x-4$ ; é igualando á cero el cociente, se tiene

$$x^7 - 6x^6 - 163x^5 + 1020x^4 - 1009x^3 - 1002x^2 - 845x - 2028 = 0 \quad (23''').$$

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ , y obtengo -5032 de error;  $x=2$ , da -4940 de error; hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto -4940 por la diferencia de los dos errores, que es 92, resulta -53 para la correccion; que, agregada al 2, da -51.

Tomando -51 por tercer número supuesto, da -844814602884 de error; y como es mayor numéricamente que todos, y tiene el mismo signo, indica que nos hallamos en el caso del número 9.<sup>o</sup> de la regla. Por lo que supongo  $x=10$ , lo que da -3219678 de error;  $x=100$ , da +2470980893472 de error; que, siendo ya de signo contrario al del 10, indica que entre 10 y 100 hay al ménos una raíz real; y como el error del 100 es numéricamente muy grande respecto del del 10, debo hacer algun supuesto intermedio, por ejemplo,  $x=50$ ; lo que da +542483617972 de error; que, siendo de signo contrario al del 10, indica que entre 10 y 50 hay al ménos una raíz real; y teniendo el error del 50 cinco guarismos mas que el del 10, haré otro supuesto intermedio, por ejemplo  $x=20$ ; lo que da +383480322 de error; y como todavía es bastante mayor, supondré  $x=15$ ; lo que da +29985472 de error; que, siendo de signo contrario al del 10, indica que entre el 10 y el 15 hay al ménos una raíz real; y como el error del 10 es menor, hallo la correccion al 10, multiplicando su error por  $10-15=-5$ ; y dividiendo el producto +110983900 por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es +32205150, resulta 3 para la correccion; que, agregada al 10, da 13.

Tomando 13 por tercer número supuesto, respecto de esta

combinacion, resulta 0 de *error*; por lo que 13 es una de las raices de la (ec. 23<sup>v</sup>), y por consiguiente de las (ecs. 23<sup>'''</sup>, 23<sup>''</sup>, 23<sup>'</sup>, y 23).

Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 23<sup>v</sup>) por  $x-13$ ; é igualando á *cero* el cociente, resulta

$$x^6+7x^5-72x^4+84x^3+83x^2+77x+156=0 \quad (23^v).$$

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ , y obtengo 336 de *error*;  $x=2$ , da 450 de *error*; y como es menor el del 1, hallo su correccion, multiplicando su error por  $-1$ ; y dividiendo el producto  $-336$  por la diferencia de los dos errores, que es 114, resulta  $-2$  para la correccion; que, agregada al 1, da  $-1$ .

Tomando  $-1$  por *tercer número supuesto*, da 0 de *error*; por consiguiente, el  $-1$  es raiz de la (ec. 23<sup>v</sup>), y tambien de las (ecs. 23<sup>v</sup>, 23<sup>'''</sup>, 23<sup>''</sup>, 23<sup>'</sup> y 23).

Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 23<sup>v</sup>) por  $x--1=x+1$ ; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^5+6x^4-78x^3+162x^2-79x+156=0 \quad (23^v).$$

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ , y obtengo +167 de *error*;  $x=2$ , da 782 de *error*; y siendo menor el del 1, hallo su correccion, multiplicando su error por  $-1$ ; y dividiendo el producto  $-167$ , por la diferencia de los dos errores, que es +141, resulta  $-1,2$  para la correccion; que, agregada al 1, da  $-0,2$ .

Tomando  $-0,2$  por *tercer número supuesto*, da 178,9 etc. de *error*; y como es mayor que el del 1, hallo la correccion á este, multiplicando su error por  $1--0,2=1,2$ ; y dividiendo el producto 200,4 por la diferencia de los dos menores errores, que es 11,9 etc., resulta 17 para la correccion; que, agregada al 1, da 18.

Tomando 18 por *cuarto número supuesto*, da 2680160 de *error*; y como es mayor que todos, indica que nos hallamos en el caso del número 9.<sup>o</sup> de la regla. Por lo que supongo  $x=10$ , lo que da 97566 de *error*; suponiendo  $x=100$ , da 10523612256 de *error*; y como obtendríamos igualmente valores positivos y mayores, suponiendo  $x=1000$ ,  $x=10000$  etc. resulta que para valores positivos de  $x$ , no debemos esperar cambio de signo; por lo que procedo á los supuestos negativos. Suponiendo  $x=-1$ , da 480 de *error*; suponiendo  $x=-10$ , se tiene 55146 de *error*;  $x=-100$ , produce  $-9320371944$  de *error*; que, siendo ya negativo, indica que entre  $-10$  y  $-100$  hay al ménos una raiz real; y como el error del

$-100$  es numéricamente mucho más mayor que el del  $-10$ , estamos autorizados para recelar, que la raíz real que buscamos ha de estar mucho más cerca del  $-10$ , que del  $-100$ ; por lo cual barémos como supuesto intermedio el  $x=-50$ , que da  $-264840894$  de error; y como todavía es numéricamente mucho mayor, supondré aun  $x=-20$ ; lo que da  $-1549464$  de error; que, por la misma razón, supongo  $x=-15$ ; lo que da  $-154884$  de error, que ya podré combinar con el del  $-10$ ; y como el del  $-10$  es numéricamente menor, hallo su corrección, multiplicando su error por  $-10-15=5$ . Y dividiendo el producto  $+275730$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos más próximos entre sí, que es  $-210030$ , resulta  $-1$  para la corrección; que, agregada al  $-10$ , da  $-11$ .

Tomando  $-11$  por tercer número supuesto, respecto de esta combinación, resulta  $51240$  de error; que, siendo de signo contrario al del  $-15$ , infiero que entre  $-11$  y  $-15$  hay al menos una raíz real; y como el error del  $-11$ , es numéricamente menor que el del  $-15$ , hallo la corrección al  $-11$ . Para esto, multiplico su error por  $-11-15=4$ ; y dividiendo el producto  $206960$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos más próximos entre sí, que es  $-206124$ , resulta  $-1$  para la corrección; que, agregada al  $-11$ , da  $-12$ .

Tomando  $-12$  por cuarto número supuesto, da  $+34802$  de error; que, siendo positivo, indica que entre  $-12$  y  $-15$  hay al menos una raíz real; y como el error del  $-12$  es numéricamente menor, hallo su corrección, multiplicando su error por  $-12-15=3$ ; y dividiendo el producto  $+104406$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos más próximos entre sí, que es  $-189686$ , resulta  $-0,55$  para la corrección; que, agregada al  $-12$ , da  $-12,55$ .

Tomando  $-13$  por quinto número supuesto, da  $0$  de error; por lo que inferimos que  $-13$  es raíz de la (ec.  $23''$ ) y también de las (ecs.  $23''$ ,  $23'''$ ,  $25'''$ ,  $23''$ ,  $23'$  y  $23$ ).

Para encontrar las demás, divido el primer miembro de la (ec.  $23''$ ) por  $x-13=x+13$ , é igualando á cero el cociente, se tiene  $x^4-7x^3+13x^2-7x+12=0$  ( $23'''$ ).

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ ; lo que da  $+12$  de error;  $x=2$  da  $+10$  de error; y como este es menor, hallo la corrección al  $2$ , multiplicando su error por  $1$ ; y dividiendo el producto  $+10$  por la diferencia de los dos errores,

que es 2, resulta 5 para la correccion; que, agregada al 2, da 7.

Tomando 7 por *tercer número supuesto*, da 506 de *error*; y como es mayor que todos, indica que nos hallamos en el número 9.º de la regla; por lo que supongo  $x=10$ , lo que da 4242 de *error*;  $x=100$ , da 93129312 de *error*; y como de suponer  $x=1000$ ,  $x=10000$  etc. resultarían valores mayores y positivos, inferimos que para valores positivos de  $x$  no hay que esperar cambio de signo. Por lo que, pasaremos á los negativos. Suponiendo  $x=-1$ , se tiene 39 de *error*;  $x=-10$  da 18382 de *error*;  $x=-100$ , da 107070712 de *error*;  $x=-1000$ , da 1007013070012 de *error*; y como suponiendo  $x=-10000$  etc., obtendríamos valores positivos y mayores, resulta que tampoco debemos esperar cambio de signo para valores negativos de  $x$ ; por lo cual debemos apelar al recurso de hallar la *ecuacion derivada* de la (ec.23'''), que, en virtud de lo espuesto (11.º de la regla) es  $4x^3-21x^2+26x-7=0$  (23''').

197 uu. Puesto que sus términos no se pueden dividir por 4, la resolveremos conforme está, ya que nuestro método tiene la excelente prerogativa de no importar el que el primer término de la ecuacion tenga coeficiente.

Suponiendo  $x=1$ , se tiene 2 de *error*; el supuesto  $x=2$ , da  $-7$  de *error*; que, siendo negativo, indica que entre 1 y 2 hay al menos una raiz real. Y como el error del 1 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por  $-1$ ; y dividiendo el producto  $-2$  por la diferencia de los dos errores que es 9, resulta 0,2 para la correccion; que, agregada al 1, da 1,2.

Tomando 1,2 por *tercer número supuesto*, da  $+0,872$  de *error*; que, siendo de signo contrario al del 2, indica, que entre 1,2 y 2 hay al menos una raiz real; y como el error del 1,2 es numéricamente menor, hallo la correccion al 1,2, multiplicando su error por  $1,2-2=-0,8$ ; y dividiendo el producto  $-0,6976$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $-7,872$ , resulta 0,09 para la correccion; que, agregada al 1,2, da 1,29.

Tomando 1,3 por *cuarto número supuesto*, da  $+0,098$  de *error*; que, siendo de signo contrario al del 2, indica que entre 1,3 y 2 hay al menos una raiz real; y como el error del 1,3 es numéricamente menor que el del 2, hallo la correccion al 1,3, multiplicando su error por  $1,3-2=-0,7$ ; y dividiendo el producto  $-0,0686$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas

próximos entre sí, que es  $-7,098$ , resulta  $0,009$  para la corrección; que, agregada al  $1,3$ , da  $1,309$ .

Como ya la corrección se halla en el tercer lugar, podemos tomar este número  $1,309$  por raíz de la (ec.  $23^{v''}$ ).

Para continuar, se nos ofrecen dos diferentes rumbos. 1.º Sustituir este valor hallado de la ecuación derivada ( $23^{v''}$ ) en la (ec.  $23^{v'}$ ) para ver si da cambio de signo y continuar aplicando el método á ella. 2.º Continuar encontrando todas las raíces de la (ec.  $23^{v''}$ ), que es la derivada, y hacer las sustituciones de todas sus raíces en la ecuación de que es derivada, para ver las mudanzas de signo que dan, y continuar hasta resolver la (ec.  $23^{v''}$ ) enteramente. Y aun esto 2.º lo podremos hacer de dos modos, ó quitando el coeficiente al primer término ó dejándolo como está. Lo haremos de todas maneras para que quede bien comprobado lo asombroso del método; y á fin de que se puedan comparar los unos procedimientos con los otros para que en cada caso que ocurra se prefiera el mas ventajoso.

Empezaremos suponiendo  $x=1,309$  en la (ec.  $23^{v''}$ ); lo que da  $10,0722422427$  de error; que siendo positivo, como los demas, que ha dado dicha ecuación, nada nos dice.

197 vv. Para encontrar las otras raíces de la ecuación derivada, debemos ante todas cosas dividir por  $4$  el primer miembro de la (ec.  $23^{v''}$ ); lo que la reduce á

$$x^3 - 5,25x^2 + 6,5x - 1,75 = 0 \quad (23^{v''})'$$

Y dividiendo el primer miembro de esta por  $x-1,3$ , suprimiendo lo demas por su pequeñez, resulta

$$x^2 - 3,95x + 1,365 = 0 \quad (23^{v''})''$$

Para aplicarle el método, supondré  $x=1$ ; lo que da  $-1,585$  de error;  $x=2$ , da  $-2,535$  de error; y como este es mayor, hallo la corrección al  $1$ , multiplicando su error por  $-1$ ; y dividiendo el producto  $1,585$  por la diferencia de los errores, que es  $-0,970$ , resulta  $-1,6$  para la corrección; que, agregada al  $1$ , da  $-0,6$ .

Tomando  $-0,6$  por tercer número supuesto, da  $+4,095$  de error; que, siendo positivo, indica que entre  $-0,6$  y  $1$ , hay al ménos una raíz real; y como el error del  $1$  es menor, hallo su corrección, multiplicando su error por  $1 - -0,6 = 1,6$ ; y dividiendo el producto  $-2,5360$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+5,670$ , resulta  $-0,4$  para la corrección; que, agregada al  $1$ , da  $0,6$ .

Tomando  $0,6$  por cuarto número supuesto, da  $-0,645$  de error; que, siendo negativo, indica que entre  $0,6$  y  $-0,6$

hay al ménos una raíz real. Y como el error del 0,6 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por  $0,6 - -0,6 = 1,2$ ; y dividiendo el producto  $-0,7740$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+6,215$ , resulta  $-0,1$  para la correccion; que, agregada al 0,6, da 0,5.

Tomando 0,5 por quinto número supuesto, da  $-0,360$  de error; que, siendo negativo, indica que entre 0,5 y  $-0,6$  hay al ménos una raíz real; y como el error del 0,5 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por  $0,5 - -0,6 = 1,1$ ; y dividiendo el producto  $-0,3960$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $+6,030$ , resulta  $-0,06$  para la correccion; que, agregada al 0,5 da 0,44.

Tomando 0,44 por sexto número supuesto, da  $-0,1794$  de error; que, siendo negativo, indica que entre 0,44 y  $-0,6$  hay al ménos una raíz real; y como el error del 0,44 es numéricamente menor, hallo su correccion multiplicando su error por  $0,44 - -0,6 = 1,04$ ; y dividiendo el producto  $-0,186576$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $5,8494$ , resulta  $-0,03$  para la correccion; que, agregada al 0,44, da 0,41.

Tomando 0,4 por séptimo número supuesto, da  $-0,055$  de error; que, siendo negativo, indica que entre 0,4 y  $-0,6$  hay al ménos una raíz real; y como el error del 0,4 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por  $0,4 - -0,6 = 1$ ; y dividiendo el producto  $-0,055$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $5,725$ , resulta  $-0,009$  para la correccion; que, agregada al 0,4, da 0,391; que como sale ya la correccion en el tercer lugar, podremos tomar por raíz suficientemente aproximada el valor 0,391.

197 *ax*. Para encontrar la otra raíz de la *ecuacion derivada*, divido el primer miembro de la (ec. 23<sup>va</sup>) por  $x - 0,391$ ; é igualando á *cero* el cociente, se tiene  $x - 3,559 = 0$ ; que, trasladando, da  $x = 3,559$ .

Sustituyendo en la (ec. 23<sup>va</sup>), en vez de  $x$  el valor 0,391, que es la segunda raíz de la *derivada*, que hemos encontrado, resulta  $+10,85$  etc. de error; que siendo positivo, como los demas, nada nos dice con relacion á nuestro objeto.

Sustituyendo en dicha (ec. 23<sup>va</sup>) en vez de  $x$ , el valor 3,559, que es el de la tercera raíz de la *ecuacion derivada*, que

hemos encontrado, resulta  $-3,369$  de *error*; como este error es negativo y el del supuesto 2, fué  $+10$  que es positivo, inferimos, que entre 2 y 3,559 hay al ménos una raíz real.

Ahora bien, el supuesto  $x=7$  nos dió  $+506$ , que es positivo; y como el error del 3,559 es negativo, indica tambien que entre 3,559 y 7 hay tambien al ménos una raíz real.

197 *yy*. Para encontrar la raíz de la (ec.  $23^{va}$ ) que se halla entre 2, y 3,559, combinaré los dos supuestos 2 y 3,559; y como el error del 3,559 es menor, hallo á él la correccion, y obtengo  $-0,28$  para la correccion; que, agregada al 3,559, da 3,279.

Tomando 3,28 por *tercer número supuesto*, respecto de esta combinacion, da  $-2,37$  etc. de *error*, y  $-0,24$  para la correccion; que, agregada al 3,28, da 3,04.

Tomando 3 por *cuarto número supuesto*, da 0 de *error*; por lo que inferimos, que 3 es raíz de la (ec.  $23^{va}$ ); y por consiguiente de las (ecs.  $23^{va}$ ,  $23^v$ ,  $23^i$  y  $23$ ).

Para encontrar la raíz que nos falta, que es la que debe hallarse entre 3,559 y 7, observaremos que el 3,559 da el menor error; por lo que hallo su correccion, que es  $+0,02$ ; la cual, agregada al 3,559, da 3,579.

Tomando 3,6 por *tercer número supuesto*, respecto de esta combinacion, da  $-3,3504$  de *error*; y 0,02 para la correccion; que, agregada al 3,6, da 3,62.

Aquí observamos que las correcciones son tan pequeñas, porque el error del 7, tiene tres guarismos enteros, y los otros solo tienen uno; por lo que se nos presentan dos caminos para encontrar el resultado con mayor brevedad; y son el hacer un supuesto intermedio, como  $x=5$ , y el combinar los supuestos 3,559 y 3,6; y para que bajo todos aspectos salgamos airosos, lo haremos por ambos métodos.

Suponiendo  $x=5$ , da 62 de *error*; que, siendo positivo, indica que entre 3,6 y 5 hay al ménos una raíz real; y como el error del 3,6 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por  $3,6-5=-1,4$ ; y dividiendo el producto  $+4,9056$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es 65,3504, resulta 0,07 para la correccion; que, agregada al 3,6, da 3,67.

Tomando 3,7 por *tercer número supuesto*, respecto de esta combinacion, da  $-2,8849$  de *error*; que, siendo negativo, indica que entre 3,7 y 5 hay al ménos una raíz real; y como el error del 3,7 es menor, hallo su correccion, multiplicando su

error por  $3,7-5=-1,3$ ; y dividiendo el producto  $+3,75037$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $63,88$ , resulta  $0,05$  para la correccion; que, agregada al  $3,7$ , da  $3,75$ ,

Tomando  $3,8$  por *cuarto número supuesto*, da  $-2,4004$  de *error*; que, siendo negativo, indica que entre  $3,8$  y  $5$  hay al ménos una raiz real; y como el error del  $3,8$  es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por  $3,8-5=-1,2$ ; y dividiendo el producto  $+2,88048$  por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $64,4004$ , resulta  $0,04$  para la correccion; que, agregada al  $3,8$ , da  $3,84$ .

Tomando  $3,84$  por *quinto número supuesto*, da  $-2,126$  etc. de *error*; que siendo negativo, indica, que entre  $3,84$  y  $5$  hay al ménos una raiz real; y como el error del  $3,84$  es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por  $3,84-5=-1,16$ ; y dividiendo el producto  $+2,566$  etc., por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $64,126$  etc., resulta  $0,04$  para la correccion; que, agregada al  $3,84$ , da  $3,88$ .

Tomando  $4$  por *sesto número supuesto*, da  $0$  de *error*; por lo que  $4$  es raiz de la (ec.  $23^{v''}$ ); y tambien de las (ecs.  $23^{v'}$ ,  $23^v \dots 23^i$  y  $23$ ).

Vamos ahora á encontrar esta misma raiz, combinando los supuestos  $3,6$  y  $3,559$ . El  $3,6$  nos dió  $-3,3504$  de *error*; el  $3,559$  nos ha dado  $-3,369$  etc. de *error*; es menor numericamente el del  $3,6$ ; por lo que hallo la correccion á este, y resulta  $0,7$  para la correccion; que, agregada al  $3,6$ , da  $4,3$ ; que tomando  $4$  por *tercer número supuesto* respecto de esta combinacion, resulta ser raiz de la (ec.  $23^{v''}$ ).

Dividiendo el primer miembro de la (ec.  $23^{v''}$ ), por el producto  $(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$ ; é igualando á *cero* el cociente, se obtiene  $x^2+1=0$ ; que, en virtud de lo espuesto (197 t), no tiene raiz ninguna real; y cuyas dos raices imaginarias son  $x=+\sqrt{-1}$ , y  $x=-\sqrt{-1}$ .

Resulta, pues, que las once raices de la (ec.  $23$ ) son  $x=4$ ;  $x=7$ ;  $x=-1$ ;  $x=4$ ;  $x=13$ ;  $x=-1$ ;  $x=-13$ ;  $x=3$ ;  $x=4$ ;  $x=+\sqrt{-1}$ , y  $x=-\sqrt{-1}$ .

Donde vemos, que hay tres raices iguales con  $4$ ; dos iguales con  $-1$ ; tres raices positivas desiguales entre sí, que son los números  $7$ ,  $13$  y  $3$ ; ademas, una raiz negativa  $-13$ , y las

dos raíces imaginarias  $x = +\sqrt{-1}$ ,  $x = -\sqrt{-1}$ ; por lo que, el primer miembro de la (ec. 23) equivale al producto siguiente:

$$(x-4)^3(x+1)^2(x-7)(x-13)(x-3)(x+13)(x-\sqrt{-1})\dots$$

$\times(x+\sqrt{-1})$ ; y en efecto, haciendo las espresadas multiplicaciones, reduciendo y ordenando, se obtiene el espresado primer miembro de la (ec. 23). La cual queda completísima y muy satisfactoriamente resuelta por nuestro método.

197 *zz.* Elejirémos por ecuacion del grado 19, la

$$x^{19} - 13x^{18} - 16x^{17} + 208x^{16} + 751x^3 - 9763x^2 - 12016x \dots + 156208 = 0 \quad (24).$$

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ , lo que da 135368 de *error*;  $x=2$ , da 8807916 de *error*; y resulta  $-0,01$  para la correccion; que, agregada al 1, da 0,99.

Tomando 0,9 por *tercer número supuesto*, da 138066,9 etc. de *error*; y resulta 5 para la correccion; que, agregada al 1, da 6.

Tomando 6 por *cuarto número supuesto*, da  $-385156382148810$  de *error*; que, siendo negativo, indica que entre 2 y 6 hay al ménos una raíz real; y como este error tiene mas del doble número de guarismos que el del 2, hago como supuesto intermedio  $x=3$ ; lo que da  $+4113813060$  de *error*; que, siendo positivo, indica, que entre 3 y 6 hay al ménos una raíz real; y como el error del 6 tiene cinco guarismos mas que el del 3, haré como supuesto intermedio  $x=5$ ; lo que da  $-1388297218992$  de *error*; que, siendo negativo, indica que entre 3 y 5 hay al ménos una raíz; y como el error del 5 tiene tres guarismos mas que el del 3, hago otro supuesto intermedio, cual es  $x=4$ ; y como sustituyendo 4 por  $x$  en el primer miembro de la (ec. 24), le reduce á 0, se infiere que 4 es raíz de la mencionada (ec. 24).

Para encontrar las demas raíces, divido el primer miembro de la (ec. 24) por  $x-4$ ; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^{18} - 9x^{17} - 52x^{16} + 751x^2 - 6759x - 39052 = 0 \quad (24').$$

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ , lo que da  $-45120$  de *error*;  $x=2$  da  $-4374962$  de *error*; y como este es mayor, hallo la correccion al 1; y resulta  $-0,01$ ; que, agregada al 1, da 0,99.

Tomando 0,9 por *tercer número supuesto*, da  $-44537,6$  etc. de *error*, y  $-7$  para la correccion; que, agregada al 0,9, da  $-6,1$ .

Tomando  $-6$  por *cuarto número supuesto* da  $+248257671840590$  de *error*; que, siendo de signo contrario al del  $0,9$ , indica que entre  $0,9$  y  $-6$  hay al menos una raíz real. Y como el error del  $-6$  es enormemente mayor que el del  $0,9$ , tomaré por supuesto intermedio  $x=-3$ ; y obtengo  $-788759573$  de *error*; que siendo negativo, indica que entre  $-3$  y  $-6$  hay al menos una raíz real; y como el error del  $-6$  tiene todavía muchos guarismos mas que el del  $-3$ , hago otro supuesto intermedio, cual es  $x=-5$ ; lo que da  $+9639562044768$  de error; que, siendo positivo, indica que entre  $-3$  y  $-5$ , hay al menos una raíz real; y como el error del  $-5$  es considerablemente mayor que el del  $-3$ , hago otro supuesto intermedio, cual es  $x=-4$ ; y como sustituyen  $-4$  por  $x$  en el primer miembro de la (ec.  $24'$ ), se reduce á *cero* el espresado primer miembro, resulta que  $-4$  es raíz de la (ec.  $24'$ ); y tambien de la (ec.  $24$ ).

Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec.  $24'$ ) por  $x+4$ ; é igualando á *cero* el cociente, se tiene  $x^{17}-13x^{16}+751x-9763=0$  ( $24''$ ).

Para aplicarle el método, supongo  $x=1$ , lo que da  $-9024$  de *error*;  $x=2$ , da  $-729057$  de *error*; y resulta  $-0,01$  para la correccion; que, agregada al  $1$ , da  $0,99$ .

Tomando  $0,9$  por *tercer número supuesto*, da  $-9089,3$  etc. de *error*; y  $13$  para la correccion; que, agregada al  $1$ , da  $14$ .

Tomando  $14$  por *cuarto número supuesto*, da  $+2267951084020412136$  de *error*; que, siendo positivo, cuando el del  $2$  era negativo, indica que entre  $2$  y  $14$  hay al menos una raíz real; y como el error del  $14$  es enormemente mayor que el del  $2$ , haré otro supuesto intermedio, cual es  $x=6$ ; lo que da  $-19747769257449$  de *error*; que, siendo negativo, indica que entre  $6$  y  $14$  hay al menos una raíz real; y como el error del  $14$  es todavía muy grande en comparacion del del  $6$ , tomo para otro supuesto intermedio  $x=10$ ; lo que da  $-30000000000002253$  de *error*; que, siendo negativo, indica que entre  $10$  y  $14$  hay al menos una raíz real; y como el error del  $14$  es todavía mucho mayor que el del  $10$ , pues el de este tiene dos guarismos menos, haré otro supuesto intermedio, cual es  $x=12$ , lo que da  $-2218623106743747741$  de *error*; que, siendo negativo, indica, que entre  $12$  y  $14$  hay al menos una raíz real; y como tiene un mismo número de guarismos, y el error del  $12$  es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por  $12-14=-2$ ; y dividiendo el producto  $+4437646213486495482$  por la diferencia de los errores de



0, inferimos que 7 es raíz de la espresada ecuacion.

Para encontrar las otras, divido el primer miembro de dicha (ec. 25) por  $x-7$ ; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^{34} + 4x^{32} + 829x^2 + 3316 = 0 \quad (25')$$

La cual teniendo todos sus esponentes pares, y siendo positivos todos sus términos, en virtud de lo espuesto (170 s. 4.º), resulta que no puede tener ninguna raíz real; y por lo mismo, todas ellas son imaginarias.

Al terminar esta materia por ahora, debo manifestar que todas las ecuaciones, que hemos puesto, se resolvieron en un principio por el recomendabilísimo jóven D. *Agustin Pascual* y los discípulos de las Escuelas Normales, D. *Hermenegildo Gutierrez*, D. *Joaquin Pavia*, D. *Nicanor de la Fuente*, y D. *Domingo Soler*; pues yo apenas pude hacer mas que preparar las ecuaciones, indicar lo que se había de hacer en cada caso particular, y redactar despues los resultados. Y aunque para manifestar el enlace de esta doctrina, con los demas tratados de las Matemáticas, hemos hablado de coeficientes diferenciales ó ecuaciones derivadas; y de *máximos y mínimos*; sin embargo, las personas que han hallado las raíces, ignoraban entónces estas sublimes teorías; y para popularizar este método de *hallar todas las raíces reales de las ecuaciones numéricas*, y ponerlo á los alcances de las grandes masas, tengo ya publicado mi *Complemento de la Aritmética de Niños*, en que se espone este método á los alcances de toda clase de personas sin mas conocimientos preliminares, que los contenidos en la mencionada *Aritmética de Niños*; la esperiencia tiene acreditado que los Niños de las Escuelas pueden encontrar con el auxilio del espresado *Complemento* cuantas raíces reales tengan las ecuaciones numéricas que les puedan ocurrir; pues que los discípulos de las Escuelas Normales han resuelto todas las que insertamos en el apéndice que está al fin del tomo 2.º de esta edicion del presente Compendio: que todas ellas son inaccesibles á cuántos procedimientos han suministrado hasta el dia las Matemáticas incluso los que proporciona el Cálculo Infinitesimal.

*De las progresiones aritméticas y geométricas.*

---

198 Se llama *progresion aritmética*, una serie ó continuacion de términos, tales que cada uno lleva al que le precede ó sigue un mismo esceso ó diferencia; cuando

lleva al que le precede, la progresion se llama *creciente*; y cuando lleva al que le sigue, *decreciente*.

Se llama *razon ó diferencia* lo que se debe añadir (ó quitar) á un término para que se convierta en el que le sigue; aquí se tratará solo de las crecientes, pues sus propiedades son las mismas mudando el signo á la diferencia. Para escribir una progresion aritmética, se pone una proporcion continua (175), y se continúa como aquí se ve  $\div 2.5.8.11.14.17.20.23$  etc. Donde el signo  $\div$  indica que cada término medio se ha de repetir.

Si al primer término le llamamos *a* y *d* á la razon, la espresion

$\div a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.a+5d....a+(n-1)d \equiv u$  (A) será una progresion aritmética general.

De la definicion de la progresion aritmética resulta, que *el segundo término es igual al primero mas la razon*; que *el tercero es igual al segundo mas la razon*; pero como el segundo es igual al primero mas la razon, *el tercero será igual al primero mas dos veces la razon*; *el cuarto se compondrá del tercero mas la razon, ó del primero mas tres veces la razon*; y en general *un término cualquiera se compondrá del primero, mas tantas veces la razon como términos hay ántes de él*: que es lo que espresa la fórmula (A), en que *u* es el término que se busca, *n* el lugar que ocupa en la progresion, *a* el primero, y *d* la diferencia ó razon.

Con dicha fórmula (A) se puede hallar un término cualquiera en conociendo el primero y la razon. Así, si en la progresion anterior se quiere el término séptimo, será  $a \equiv 2, d \equiv 3, n \equiv 7,$  y se tendrá

$$\text{térmo}^{\circ} 7.^{\circ} \equiv 2 + (7-1) \times 3 \equiv 2 + 6 \times 3 \equiv 2 + 18 \equiv 20.$$

199 De la formacion de la progresion se deducen varias consecuencias.

1.<sup>a</sup> Cuatro términos consecutivos, tomados donde se quiera, forman proporcion discreta.

Así, 5.8:11.14.

2.<sup>a</sup> Tres términos consecutivos la forman continua.

Así,  $\div 5.8.11.$

3.<sup>a</sup> Dos términos consecutivos forman proporcion discreta con otros dos términos consecutivos, tómense donde

se quiera; porque la razon de los dos primeros (que es la de la progresion) es la misma que la de los dos últimos.

Así, 5.8:17.20.

4.<sup>a</sup> Dos términos cualesquiera están en proporcion discreta con otros dos términos cualesquiera, que disten entre sí tanto como los dos primeros distaban; porque la razon en ambas equivale á tantas veces la de la progresion como términos hay en medio mas uno.

Así, 5.11:17.23.

5.<sup>a</sup> Tres términos cualesquiera, tales que los dos extremos disten igualmente del medio, forman proporcion continua; porque la razon entre el primero y el medio es la misma que entre el medio y el extremo; pues ambas equivalen á tantas veces la de la progresion, como términos hay entre ellos mas uno.

Así,  $\div 5.14.23$ .

6.<sup>a</sup> La suma del primer término y último, es igual á la suma de dos términos cualesquiera, equidistantes de los extremos; é igual al duplo del término medio, si el número de términos es impar. Porque el primer término y el segundo forman proporcion con el penúltimo y el último (cons. 3.<sup>a</sup>), y dan (176) que el segundo junto con el penúltimo serán iguales con el primero junto con el último; el primero y el tercero forman proporcion con el antepenúltimo y último; y darán, que la suma del primero con el último equivaldrá á la del tercero y antepenúltimo; y así de los demas.

200 Fundados en esta propiedad, vamos á encontrar la suma de tantos términos como se quiera de una progresion aritmética. Para esto, sea la progresion general  $\div a.b.c.d\dots q.r.t.u$ ; llamando  $s$  la suma de los términos hasta  $u$ , que consideraremos ser el último, y observando que la suma no se altera aunque se escriba al revés, tendremos poniendo debajo de la suma ella misma escrita en un orden inverso:

$s = a + b + c + d \dots q + r + t + u$   
 $s = u + t + r + q \dots d + c + b + a$  } Y sumando estas ecuaciones será

$$2s = (a+u) + (b+t) + (c+r) + (d+q) \dots \\ (q+d) + (r+c) + (t+b) + (u+a).$$

Y como  $a+u = b+t = c+r = \text{etc.}$  (cons. 6.<sup>a</sup>), sustituyendo se tendrá

$$2s = (a+u) + (a+u) + (a+u) + (a+u) \dots \\ (a+u) + (a+u) + (a+u) + (a+u);$$

donde veo que el duplo de la suma equivale á tantas veces la suma del primer término y último, como términos hay en la progresion; luego si llamo  $n$  al número de términos, tendré  $2s=(a+u)\times n$ ; de donde despejando  $s$ , sale  $s=\frac{1}{2}(a+u)\times n=(a+u)\times\frac{1}{2}n$ ; que nos dice, que la suma de todos los términos que se quieran de una progresion aritmética, se halla sumando el primer término con el último, y multiplicando esto por la mitad del número de los términos.

Así, la suma de 7 términos de la progresion (198) será igual á  $(2+20)\times\frac{7}{2}=22\times\frac{7}{2}=11\times7=77$ , como en efecto se verifica.

201 Si en la ecuacion  $u=a+(n-1)d$ , despejo  $d$ , tendré  $d=\frac{u-a}{n-1}$ ; la cual dice, que, conocido el último término, el primero y el número de ellos, para hallar la razon, se resta el primero del último, y lo que queda se divide por el número de términos ménos uno.

En esto se funda la interpolacion de un número cualquiera de medios aritméticos entre dos números ó cantidades dadas. Así, si quiero interpolar entre 7 y 43 ocho medios aritméticos; restaré el 7 del 43, y la resta 36 la dividiré por el número de términos que ha de haber ántes del 43; y como entre 7 y 43 ha de haber ocho medios, habrá ántes del 43 un término mas, á saber, el primero 7; luego esta resta la deberé dividir por el número de medios que se han de interpolar mas 1, esto es, por 9; y resultará que  $\frac{36}{9}=4$ , y los términos serán  $\div 7.11.15.19.23.27.31.35.39.43$  (\*).

(\*) Mr. Kelland, en la página 312 de su Álgebra ya citada (157 nota) resuelve esta cuestion: *Dados dos términos de una progresion aritmética y el lugar que ocupa cada uno en ella, encontrar la progresion.*

Supongamos que sea  $P$  el término que ocupa el lugar  $p$  en la progresion; y  $Q$  el que ocupa el lugar  $q$ , y en virtud de lo espuesto (198), será  $P=a+(p-1)d$ ,  $Q=a+(q-1)d$ .

Restando la primera ecuacion de la segunda, se tendrá

$$Q-P=(q-p)d; \text{ que da } d=\frac{Q-P}{q-p}.$$

Sustituyendo este valor en el de  $P$ , será

202 Se llama *progresion geométrica* una serie ó continuacion de términos, que cada uno cabe en el que le precede ó sigue un mismo número de veces; cuando cabe en el que le sigue, la progresion es *creciente*; y cuando en el que le precede *decreciente*.

Aquí se llama *razon* al número, por el cual se ha de multiplicar un término cualquiera, para que resulte el que le sigue. Para escribir una progresion geométrica, se pone una proporcion continua (175), y se continúa como aquí se vé  $\div:3:6:12:24:48:96:192:384:\text{etc.}$  y escrita con estension será  $3:6::6:12::12:24::24:48::\text{etc.}$  Si espresamos por  $a$  el primer término, y por  $q$  la razon,  $\div:a:aq:aq^2:aq^3:aq^4:aq^5:aq^6:aq^{n-1}=u$  (B), será una progresion geométrica general.

De la definicion de la progresion geométrica resulta, que *el segundo término se compone del primero multiplicado por la razon; el tercero, del segundo multiplicado por la razon; pero como el segundo equivale al primero multiplicado por la razon, el tercero equivale al primero multiplicado por el cuadrado de la razon; el cuarto se compone del primero multiplicado por el cubo de la razon; y en general, un término cualquiera se compone del primero multiplicado por una potencia de la razon, espresada por el número de términos que hay ántes de él: que es lo que espresa la fórmula (B), en que  $u$  es el término que se busca,  $n$  el lugar que ocupa,  $a$  el primero, y  $q$  la razon.*

La fórmula (B) sirve para calcular un término cual-

$$P = a + (p-1) \frac{Q-P}{q-p}; \text{ de donde } a = P - (p-1) \frac{Q-P}{q-p}; \text{ que}$$

reduciendo el entero á la especie del quebrado, haciendo las operaciones y simplificando, podremos poner bajo esta forma

$$a = \frac{(q-1)P - (p-1)Q}{q-p}.$$

Conocido este valor de  $a$ , que es el primer término de la progresion, y la razon ó diferencia  $d$ , en virtud de lo espuesto (198) podremos formar la progresion.

quiera; v. g. si quiero hallar el sexto término de la anterior, tendré  $n=6$ ,  $a=3$ ,  $q=2$ , y será término  $6^{\circ}=3 \times 2^{6-1}=3 \times 2^5=3 \times 32=96$ .

203 Es digna también de notarse aquí la analogía entre el lenguaje de las progresiones aritmética y geométrica; pues las propiedades de aquella se convierten en las de esta, sustituyendo *multiplicar* á la voz *sumar*, *cuadrar la razón al duplo* ó *dos veces la razón*; y en general *formar potencias de la razón á sumar muchas veces la razón*; y por lo mismo se verificará que, 1.º *cuatro términos consecutivos forman proporción geométrica discreta*; 2.º *tres consecutivos la forman continua*; 3.º *dos términos consecutivos están en proporción con otros dos consecutivos cualesquiera*; 4.º *dos términos cualesquiera forman proporción con otros dos cualesquiera, que disten igualmente entre sí*; 5.º *tres términos equidistantes la forman continua etc.*

204 Para hallar la suma de una progresión geométrica, llamaremos  $a$  el primer término,  $q$  la razón (por consiguiente  $aq$  será el segundo),  $u$  el último, y  $s$  la suma de todos los términos que buscamos; y observando (202) que todos los términos medios se han de repetir, resulta que todos los de la progresión serán antecedentes menos el último, y por lo mismo la suma de estos será  $s-u$ ; todos son consecuentes menos el primero, y por lo mismo la suma de estos será  $s-a$ ; luego por lo dicho (185..1.ª) tendremos  $s-u:s-a::a:aq::1:q$ ; que multiplicando extremos y medios, nos dará

$(s-u) \times q = (s-a) \times 1$ , ó  $sq - uq = s - a$ ; de donde sale

$$sq - s = uq - a \quad \text{ó} \quad s(q-1) = uq - a, \quad \text{y} \quad s = \frac{uq - a}{q - 1} (m).$$

La que nos dice, que para encontrar la suma de una progresión geométrica, se multiplicará el último término por la razón; de esto se restará el primero, y la resta se dividirá por la razón menos uno. Así, si quiero hallar 8 términos de la progresión (202), será  $a=3$ ,  $q=2$ ,  $u=3^{84}$ , y resultará

$$\text{suma de 8 términos} = \frac{3^{84} \times 2 - 3}{2 - 1} = \frac{768 - 3}{1} = 765, \quad \text{co-}$$

mo en efecto se verifica.

*Esc.* Si en vez de  $u$  sustituimos en la fórmula (m) su valor  $aq^{n-1}$ , nos resultará

$$s = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q-1} = \frac{aq^n - a}{q-1} = (\S 118 \text{ esc.}) \frac{a - aq^n}{1-q} (p);$$

la cual servirá para hallar la suma de  $n$  términos de una progresion, cuando sólo se conozca el primer término  $a$  y la razon  $q$  (\*).

205 Si en la fórmula  $u = aq^{n-1}$  despejo la  $q$ ,

sacaré  $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ ; la cual podrá servir para inter-

(\*) Resolveremos aquí las dos cuestiones de que Mr. *Kelland* se ocupa en las páginas 315 y 318 de su *Álgebra* citada (157 nota).

1.<sup>a</sup> *Dados dos términos de una progresion geométrica y los lugares que ocupan, determinar la progresion.*

Sea  $L$  el término que ocupa en la progresion el lugar espresado por  $l$ ; y  $M$  el que ocupa el lugar  $m$ ; y en virtud de la expresion ((B) § 202) se tendrá  $L = aq^{l-1}$ ,  $M = aq^{m-1}$ .

Dividiendo esta ecuacion por su precedente, será

$$\frac{M}{L} = \frac{aq^{m-1}}{aq^{l-1}} = \frac{q^{m-1}}{q^{l-1}} = q^{m-l},$$

que despejando  $q$  (§ 151) será  $q = \left(\frac{M}{L}\right)^{\frac{1}{m-l}}$ .

Despejando  $a$  en  $L = aq^{l-1}$  se tiene

$$a = \frac{L}{q^{l-1}} = \frac{L}{\left(\frac{M}{L}\right)^{\frac{l-1}{m-l}}} = \frac{L^{1+\frac{l-1}{m-l}}}{M^{\frac{l-1}{m-l}}} = \frac{L^{\frac{m-1}{m-l}}}{M^{\frac{l-1}{m-l}}}.$$

Conociendo por esta ecuacion el valor del primer término de la progresion, y teniendo ántes determinado el valor de la razon  $q$ , podremos formar la progresion en virtud de lo espuesto (202).

2.<sup>a</sup> *Encontrar la suma de los términos que resultan de multiplicar ordenadamente los términos de una progresion aritmética por los de una geométrica.*

Sean  $\left\{ \begin{array}{l} \div a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \dots, a+(n-1)d \\ \div A, Aq, Aq^2, Aq^3, Aq^4, \dots, Aq^{n-1} \end{array} \right\}$  las dos progresiones.

Multiplicándolas ordenadamente, esto es, el primer término

polar medios geométricos entre dos números dados; para lo cual, se dividirá el último término por el primero, y del cociente se extraerá una raíz del grado que espese el número de términos que ha de haber en todos menos uno; ó del grado que espese el número de medios que se han de interpolar mas uno.

Esc. 1<sup>o</sup> Si la progresion fuese decreciente, la razon  $q$  sería un quebrado propio, y el término sustractivo  $aq^n$

término de la una por el primero de la otra; el segundo por el segundo, etc., y llamando  $s$  á la suma, tendremos

$$S = Aa + (a+d)Aq + (a+2d)Aq^2 + (a+3d)Aq^3 + (a+4d)Aq^4 + \dots + (a+(n-1)d)Aq^{n-1} = A \{ a + (a+d)q + \dots + (a+2d)q^2 + \dots + (a+(n-1)d)q^{n-1} \}.$$

Dividiendo por  $A$ , será

$$\frac{S}{A} = a + (a+d)q + (a+2d)q^2 + \dots + (a+(n-1)d)q^{n-1};$$

y multiplicando por  $q$ , será

$$\frac{S}{A} q = aq + (a+d)q^2 + (a+2d)q^3 + \dots + (a+n-1)d)q^n.$$

Restando este valor del anterior, resultará

$$\begin{aligned} \frac{S}{A} - \frac{S}{A} q &= a + dq + dq^2 + \dots + dq^{n-1} - (a+(n-1)d)q^n = \dots \\ &= a + dq(1+q+q^2+\dots+q^{n-2}) - (a+(n-1)d)q^n = \dots \\ & \text{(cc. p)} \quad a + dq \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q} - (a+(n-1)d)q^n; \end{aligned}$$

y como  $\frac{S}{A} - \frac{S}{A} q = \frac{S}{A} (1-q)$ ; dividiendo ambos miembros

por  $1-q$ , resulta por último

$$\frac{S}{A} = \frac{a}{1-q} + dq \frac{1-q^{n-1}}{(1-q)^2} - \frac{(a+(n-1)d)q^n}{1-q}; \text{ que da}$$

$$S = A \left( \frac{a}{1-q} + dq \frac{1-q^{n-1}}{(1-q)^2} - \frac{(a+(n-1)d)q^n}{1-q} \right).$$

de la fórmula (p) será tanto menor, cuanto mayor sea el número  $n$  de términos que se vayan tomando; y tantos se podrán tomar, que dicho término llegue á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que esta sea; de donde se sigue, que la diferencia entre el numerador de la fórmula (p) y el primer término  $a$  de la progresion, podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad asigna-

ble; luego  $\frac{a}{1-q}$  (r) es una cantidad á la cual se pue-

de acercar todo lo que se quiera la suma de los términos de la progresion, y nunca puede dicha suma ser igual con ella. Es, pues, la expresion (r), como veremos dentro de poco, el límite de la suma de la progresion decreciente; y aunque se la suele mirar como si en efecto fuese la suma verdadera, es añadiendo la circunstancia de que la progresion esté continuada al infinito; pero como esta es una palabra de cuyo significado no podemos formarnos una cabal idéa, advertimos que cuando nos valgamos de esta voz en algunas ocasiones, no queremos dar á entender otra cosa, sinó que la cantidad á que la aplicamos ha llegado á ser tal, que la diferencia entre ella y su límite es menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea; por consiguiente, la sustitucion del límite en vez de ella sólo se debe mirar como una expresion abreviada del largo razonamiento que se debería hacer para darla á conocer circunstanciadamente. Esto supuesto, la fórmula (r) traducida en regla bajo estos principios, nos dará que para encontrar la suma de una progresion geométrica decreciente, continuada indefinidamente, se dividirá el primer término por la diferencia que haya entre la unidad y la razon.

Por esta causa, la suma de la progresion

$$\div \div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \text{etc. es } \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Esc. 2.<sup>o</sup> En este resultado observamos, que siendo 2 la suma de todos los términos, y 1 el primero, todos los términos que siguen al primero no valdrán mas de 1; siendo la suma total 2, y  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  la de los dos

primeros términos, todos los que siguen al segundo valdrán  $\frac{1}{2}$  etc.; luego en este caso *un término cualquiera es igual á la suma de todos los que le siguen.*

Esc. 3.<sup>o</sup> Si la progresion fuese  $\div \div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \text{etc.}$  cuya suma es  $s = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ ; se tendrá que como el pri-

mero vale 1, los demas valdrán ménos de 1, esto es,  $\frac{1}{2}$ ; el primero y segundo valen  $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ , que para  $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ , solo le falta  $\frac{1}{6}$ , esto es, ménos de  $\frac{1}{3}$ ; luego aquí *un término cualquiera es mayor que la suma de todos los que le siguen.*

Esc. 4.<sup>o</sup> Si la progresion fuese  $\div \div 1 : \frac{3}{5} : \frac{9}{25} : \frac{27}{125} : \text{etc.}$  cuya suma es  $s = \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$  se tendrá, que, valien-

do 1 el primer término, los demas valdrán  $\frac{3}{5}$ , esto es, mas que el primero; el primero y segundo valen  $1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = \frac{16}{10}$ , que para  $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$ , le faltan  $\frac{9}{10}$ , que es mayor que  $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ , etc. etc.; luego en este caso *un término cualquiera es menor que la suma de todos los que le siguen.*

Cor. general. Luego en una progresion geométrica decreciente, un término cualquiera puede ser igual, mayor ó menor, que la suma de todos los que le siguen, segun sea cada término igual, menor ó mayor que la mitad del anterior.

Esc. 5.<sup>o</sup> Los resultados que nos ofrecen estas progresiones son de la mayor importancia y trascendencia; pues nos dan á conocer que la suma de un número *indefinido* ó *infinito* de términos ó cantidades no llega á componer una cantidad tan pequeña como  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  etc. etc.

De los logaritmos.

206 Si reunimos dos progresiones, una aritmética y otra geométrica, de modo que se correspondan sus términos como aquí se vé:

$$\left. \begin{array}{l} \div \div 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22 \cdot 25 \cdot 28 \cdot 31 \cdot \text{etc.} \\ \div \div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 : 768 : 1536 : \text{etc.} \end{array} \right\}$$

los términos de la aritmética se llaman *logaritmos* de los correspondientes de la *geométrica*, que toman el nombre de *números*. Como son infinitas las progresiones que se pueden elegir, se sigue que es infinita la diversidad de *logaritmos*; pero si entre las progresiones se elige la aritmética; que principiando por 0 sigue después por la serie de los números naturales, y la geométrica que empiece por la unidad; entonces se tiene un *sistema de logaritmos*, V. g.

$\div: 0.1. 2. 3. 4. 5. 6. \text{etc.}$  } forman un sistema.  
 $\div: 1:4:16:64:256:1024:4096:\text{etc.}$  }

Donde debemos observar, que los términos de la aritmética son los exponentes á que se ha de elevar el segundo término de la geométrica; para producir cualquier término; pues 64 v. g. es  $4^3$ , y 3 es el logaritmo ó término de la aritmética correspondiente á 64; y como puede elegirse cualquier otro número para segundo término de la geométrica, resulta que tambien puede haber muchos *sistemas de logaritmos*.

Esto entendido, se llama *base*, en un sistema de *logaritmos*, al segundo término de la progresion geométrica, cuyo logaritmo es la unidad, y de cuyas potencias van resultando los demas; y logaritmo de un número es el exponente á que se ha de elevar la base para producir dicho número.

207 Sea, pues,  $a$  la base de un sistema cualquiera,  $x$  un logaritmo y  $z$  su número, y se tendrá  $x = \log. z$ , y  $a^x$  ó  $a^{\log. z} = z$ ; igualmente, siendo  $x' = \log. z'$ , se tendrá  $a^{x'} = a^{\log. z'} = z'$ .

1º Si multiplicamos estas dos ecuaciones, tendremos

$$a^x \times a^{x'} = z z' \quad \text{ó} \quad a^{x+x'} = z z';$$

pero  $x+x'$  es el exponente á que se ha de elevar la base  $a$ , para que resulte el producto  $z z'$ ; luego será su logaritmo, y se tendrá  $x+x' = \log. z z'$ ; y como  $x = \log. z$ , y  $x' = \log. z'$ , sustituyendo, resultará

$$\log. z + \log. z' = \log. z z';$$

que quiere decir: que para encontrar el logaritmo de un producto se han de sumar los de los factores; y el número que en las tablas del sistema corresponda á esta suma, se-

rá el producto. Así, si quiero multiplicar 16 por 256, diré:

$$\log. 16 = 2, \quad \log. 256 = 4;$$

y su suma = 6 será el logaritmo del producto; y como 6 corresponde á 4096, infiero que este es el producto de 16 por 256, como en efecto se verifica.

2.º Dividiendo las mismas dos ecuaciones, se tendrá

$$\frac{a^x}{a^{x'}} = z \quad \text{ó} \quad a^{x-x'} = \frac{z}{z'};$$

y como ahora  $x-x'$  es el esponente á que se ha de elevar la base para producir el cociente ó número  $\frac{z}{z'}$ ,

este esponente será su logaritmo, y se tendrá

$$x-x' = \log. \frac{z}{z'}, \quad \text{ó} \quad \log. z - \log. z' = \log. \frac{z}{z'};$$

que quiere decir, que para encontrar el logaritmo de un cociente, se restará el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo; y el número que en las tablas corresponda á esta diferencia, será el cociente que se busca. Así, si quiero dividir 1024 por 16, diré:

$$\log. 1024 = 5, \quad \log. 16 = 2;$$

y su diferencia = 3 será el logaritmo del cociente; y como este 3 corresponde al número 64, este será el cociente; y se tendrá  $\frac{1024}{16} = 64$ , como en efecto se verifica.

3.º Si elevamos á diferentes potencias la ecuacion anterior

$$a^x = z, \quad \text{ó} \quad z = a^x, \quad \text{será}$$

$$z^2 = (a^x)^2 = a^{2x}, \quad z^3 = (a^x)^3 = a^{3x}, \quad \dots z^n = (a^x)^n = a^{nx};$$

de donde sale (por ser  $nx$  el esponente á que se ha de elevar la base  $a$  para producir  $z^n$ ), que

$$\log. z^n = nx = n \log. z;$$

que quiere decir, que para encontrar el logaritmo de una potencia, se ha de multiplicar el logaritmo de la raiz (ó cantidad) por el esponente de la potencia; y el número que en las tablas corresponda al producto hallado, será la potencia que se pide. Así, si quiero formar la tercera potencia de 16, diré:  $\log. 16 = 2$ , que multiplicado por 3 (esponente de la potencia) da 6; y como 6 corresponde

al número 4096, infiero que  $16^3=4096$ , como en efecto se verifica.

4.º Si de la ecuacion  $x=a^x$  extraemos raíces de diferentes grados, tendremos

$$\sqrt{x}=\sqrt{a^x}=a^{\frac{x}{2}}; \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a^x}=a^{\frac{x}{3}}; \dots \sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a^x}=a^{\frac{x}{n}};$$

de donde sale (por ser  $\frac{x}{n}$  el esponente á que se ha de elevar la base  $a$  para producir el número  $\sqrt[n]{x}$ ), que

$$\log.\sqrt[n]{x}=\frac{x}{n}=\frac{\log.x}{n};$$

que quiere decir, que para encontrar el logaritmo de una raíz, se ha de dividir el logaritmo de la cantidad por el esponente de la raíz; y el número que en las tablas corresponda á este cociente, será la raíz que se pide. Así, si quiero extraer la raíz cuadrada de 4096, diré:  $\log.4096=6$ , que dividido por 2 (esponente de la raíz) da 3; y como 3 corresponde al número 64, digo que 64 es la raíz cuadrada de 4096, ó que  $\sqrt{4096}=64$ , como en efecto se verifica.

208. Como el sistema de numeracion sigue su ley constante de diez en diez, tambien se ha elegido este número para base del sistema logarítmico mas usual; de modo que para la formacion de las tablas se han reunido las dos progresiones siguientes:

$$\div 0.1.2.3.4.5.6.\text{etc.}$$

$$\div 1:10:100:1000:10000:100000:1000000:\text{etc.}$$

Si en ellas se interpolase entre cada dos términos un número considerable de medios, los resultados formarían dos nuevas progresiones sumamente largas; y entre esta multitud de términos se hallarían los números 2,3,4,5, 6,7,8,9 intermedios entre el 1 y el 10, ó números que se diferenciassen tan poco de ellos que no resultase inconveniente de hacer uso de los unos en vez de los otros; sucediendo lo mismo respecto de los intermedios entre 10 y 100, etc., y tomando en la geométrica los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, etc. hasta 10000, hasta 20000,

hasta 107500, hasta 108000, (de todas estas hay tablas impresas), hasta 200000, (de estas las hay calculadas, pero no impresas) (\*) etc. poniéndolos en colum-

(\*) Dichas tablas ofrecen el monumento mas grandioso y admirable. No se han impreso, porque esto exigiria gastos muy extraordinarios. En estos últimos años se pensó en ello, cooperando al mismo tiempo los Ingleses y Franceses; pero aun no se ha llevado á efecto, ni aun en extracto. El manuscrito de dichas tablas se halla depositado en el observatorio astronómico de Paris. Yo he tenido la satisfaccion de verlas el 22 de noviembre de 1828, que Mr. Mathieu tuvo la bondad de irmelas enseñando tomo por tomo. Las de los logaritmos de los números desde 1 hasta doscientos mil componen ocho volúmenes en folio grande. Las de los senos constan de cuatro volúmenes tambien en gran folio; y están calculados los logaritmos de los senos con catorce decimales, de diez en diez segundos de la division decimal. Las de las Tangentes constan tambien de otros cuatro volúmenes iguales á los anteriores: y se hallan calculados con catorce guarismos decimales los logaritmos de las tangentes de diez en diez segundos decimales, ó lo que es lo mismo de cienmilésima en cienmilésima parte del cuadrante.

Para dar una idea de estas tablas, pondré aquí el logaritmo de un número, de un seno, y de una tangente.

Están divididas en ocho columnas verticales; en la 1.<sup>a</sup> se halla el número ó el arco; en la 2.<sup>a</sup> el logaritmo que corresponde, bien sea á dicho número, ó á la línea trigonométrica respectiva; en la 3.<sup>a</sup> la diferencia primera; en la 4.<sup>a</sup> la diferencia segunda, y así sucesivamente hasta que en la 8.<sup>a</sup> se halla la diferencia 6.<sup>a</sup>

Elegiré el penúltimo logaritmo de la tabla, á saber, el del número 199999, que se halla colocado en la citada primera columna; el logaritmo de dicho número, que se coloca en la segunda columna, es

30102	⋮	78241	⋮	8616	⋮
-------	---	-------	---	------	---

En la 3.<sup>a</sup> columna señalada por arriba  $\Delta^1$  addit. (es decir, que la primera diferencia es aditiva), hay

21714	⋮	7783	⋮	77
-------	---	------	---	----

En la 4.<sup>a</sup> que se señala por arriba  $\Delta^2$  soustract (y quie-

na, y en otra á su derecha los términos correspondien-

re decir, que la diferencia segunda es sustractiva), hay

$$1085 \quad \vdots \quad 73 \quad \vdots \quad 691.$$

En la 5.<sup>a</sup> que se señala  $\Delta^3$  soust. hay  $1 \quad \vdots \quad 035 \quad \vdots \quad 02.$

En la 6.<sup>a</sup> que se señala  $\Delta^4$  soust.  $1 \quad \vdots \quad 6.$  Estas diferencias son constantes para varios logaritmos.

En la 7.<sup>a</sup> que se señala  $\Delta^5$ , y en la octava, que se señala  $\Delta^6$  no hay nada en este logaritmo; y quiere decir que las diferencias estas no tienen ningun guarismo en el lugar catorce; pero debe haber en los primeros números de la tabla.

Para dar un ejemplo de un seno, elegiré el que corresponde al arco de 50 grados decimales, que equivalen á 45 de la division de la circunferencia en 360 partes ó grados: y tomando por unidad el cuadrante, pone en la primera columna, que tiene por arriba arcos, 0,50000; porque cincuenta mil decenas de segundos decimales equivalen á los cincuenta grados de dicha division.

En la 2.<sup>a</sup> columna se pone el logaritmo del seno, que es

$$\bar{1},84948 \quad \vdots \quad 50021 \quad \vdots \quad 6798;$$

en cuya espresion, el trazo que hay sobre la característica 1, indica, que dicha característica es negativa; porque no se han puesto en estas tablas, como en las de Callet y otras los Complementos logarítmicos cuando los logaritmos son negativos. En las columnas siguientes se hallan las diferencias hasta la 6.<sup>a</sup>.

El logaritmo de la tangente de 40 grados de la division decimal, que equivalen á 36 de la sexagesimal, que en dichas tablas se señalan por 0,40000 es

$$\bar{1},86126 \quad \vdots \quad 10407 \quad \vdots \quad 0904.$$

Pero estas tablas no solo presentan el monumento mas grandioso bajo el aspecto científico, sino tambien bajo el aspecto industrial; pues haciendo una feliz aplicacion de la division del trabajo, se encargó su formacion á los peluqueros de Paris, cuando no tenian en que ocuparse: resultando que este importantísimo y trascendental trabajo, que estriba en la parte mas sublime del cálculo, se dispuso por los Sabios de un modo tan sencillo, que pudiesen ejecutarlo personas, que no sabian apenas mas que sumar y restar.

tes de la aritmética ó los logaritmos, se tendrían formadas las tablas como vulgarmente se presentan.

En todas las tablas de logaritmos está esplicada su disposicion particular, y las reglas para manejarlas; y como para entender estas dos cosas, suele aprovechar mas media hora de viva voz del Profesor, que toda la esplicacion que se puede poner en un libro de la naturaleza de este, y por otra parte en nuestro *Tratado elemental* decimos muy circunstanciadamente todo lo necesario para la inteligencia y uso de las de D. Tadéo Lope y Aguilar, que son de las que nos servimos, tanto en aquella obra como en esta, para todas las operaciones: y como esta misma esplicacion conviene á las otras tablas que hay publicadas, que las mas completas son las de *Callet*, omitirémos aquí todo esto, y solo harémos algunas observaciones.

209 Puesto que  $10^0=1$ , y  $10^1=10$ , vemos que  $\log. 1=0$ ,  $\log. 10=1$ ; luego el logaritmo de la unidad es cero; y el de todo número dígito, como 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, ha de ser mayor que 0 y menor que 1; esto es, será un quebrado decimal.

Igualmente, como  $10^1=10$  y  $10^2=100$ , se inferirá que el logaritmo de todo número de dos cifras, desde 11 hasta 99 inclusive, ha de ser mayor que 1 y menor que 2, esto es, será un entero y un quebrado decimal. Del mismo modo se inferirá que el de todo número de tres cifras, desde 101 hasta 999 inclusive, será mayor que 2 y menor que 3; esto es, dos enteros y un quebrado decimal. Y en general, que el logaritmo de todo número compuesto (escepto la unidad seguida de ceros) consta de tantas unidades en enteros, como cifras tiene el número ménos una, y de un quebrado decimal; si el número es la unidad seguida de ceros, su logaritmo consta de tantas unidades como ceros acompañan á la unidad, y el quebrado decimal es cero.

210 El número que espresa los enteros en los logaritmos se llama *característica*, y el quebrado decimal se llama *mantisa*.

Luego dado un número, se puede conocer inmedia-

tamente la característica de su logaritmo (209); y dado un logaritmo se puede saber inmediatamente las cifras que ha de tener el número en enteros, que son tantas mas una como unidades tenga la característica; por esta causa se suele omitir la característica en las tablas, como se ha hecho en las de D. Tadéo Lope, y en las de Callet.

211 Los logaritmos de los números, que crecen en progresion décupla, tienen una misma mantisa; porque han de resultar de la suma del logaritmo del menor con el de 10, 100, 1000, etc. que son 1, 2, 3, etc. sin mantisa. V. g. la mantisa de 23 es la misma que la de 230, de 2300, de 23000 etc.; porque  $230 = 23 \times 10$ , y (§ 277, 1.º)  $\log. 230 = \log. 23 + \log. 10$ ;  $2300 = 23 \times 100$ , y  $\log. 2300 = \log. 23 + \log. 100$ .

De donde resulta, que si se añade una unidad á la característica de un logaritmo, corresponde á un número diez veces mayor; ó equivale á multiplicar por diez dicho número; si se añaden dos unidades, equivale á multiplicar por 100 el mismo número; y así sucesivamente. Y si se quita una unidad á la característica de un logaritmo, equivale á haber dividido su número por 10; si se le quitan dos, equivale á haber dividido su número por 100, etc. etc.

212 Se llama complemento aritmético de un número lo que le falta para valer la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene dicho número. Así, el complemento de los números de una cifra es lo que les falta para 10; el de los números de dos cifras, es lo que les falta para 100 etc. De donde se sigue que, para hallar el complemento aritmético de un número cualquiera, se restará la cifra de las unidades de 10, y todas las demas de 9; ó al contrario, que es lo mejor, se restará empezando por la izquierda, cada guarismo de 9, y el último significativo, ó el de las unidades de 10. Así, si quiero hallar el complemento de 357, diré: de 7 á 10 van 3; de 5 á 9 van 4; de 3 á 9 van 6; y tendré que compl. arit. de  $357 = 643$ ; empezando por la izquierda, diría: de 3 á 9 van 6; de 5 á 9 van 4, y de 7 á 10 (porque es el último) van 3; y tengo 643 como ántes; y haciendo la resta por el me-

todo ordinario (32) como aquí se vé (M): se halla lo mismo.

Si quiero hallar el de 8940, diré, empezando por la izquierda: de 8 á 9 va 1; de 9 á 9 va 0; de 4 á 10 porque es el último significativo) van 6; de 0 á 0, va 0; y tengo

(M)
1000
357
643

compl. aritm. 8940 = 1060.

213 Análogamente, se llama *complemento logarítmico de un número*, al complemento aritmético de su logaritmo. Así, si quiero hallar el complemento logarítmico de 85436 buscaré su logaritmo; y encontraré que es 4,9316409; y hallando el complemento de este, diciendo: de 4 á 9 van 5; de 9 á 9 va 0; de 3 á 9 van 6; de 1 á 9 van 8; de 6 á 9 van 3; de 4 á 9 van 5; de 0 á 9 van 9; de 9 á 10 va 1: tendré que

compl. log. 85436 = 5,0683591.

214 El complemento aritmético convierte la operacion de restar en sumar; para lo cual se suma con el minuyendo el complemento aritmético del sustraendo, y en la suma se rebaja la unidad (ó unidades) correspondiente al complemento; esto es, en las decenas, si el complemento fué á 10; en las centenas, si el complemento fué á 100 etc. Así, si quiero restar 438 de 787, con el 787 sumaré (A) el complemento de 438 que es 562, y en la suma 1349 tacharé el millar, y me quedará la resta verdadera 349.

(A)
787
562
1349
349

Esto se funda en que, en vez de quitar de 787 el 438, le añado lo que le falta para mil; luego no sólo tendré que quitar el 438, sinó ademas el 562; y como todo compone 1000, por eso se borra en la suma, donde corresponde, la unidad del complemento.

215 La importancia del complemento es cuando hay que hacer sumas y restas á un mismo tiempo con las cantidades; pues entónces *sumando los complementos de las que se han de restar, y rebajando las unidades donde corresponda, con una sola operacion se hacen todas*. Esto es lo que sucede en las proporciones, en que se quiere calcular el cuarto término por logaritmos; pues como su

logaritmo se compondrá de la suma de los logaritmos de los medios, ménos el logaritmo del primero: en vez de sumar y restar, *se suma con los logaritmos de los medios el complemento logarítmico del primero, y rebajando la decena en la característica, se tendrá el logaritmo del cuarto término.*

Así, si quiero hallar por logaritmos el cuarto término de esta proporción  $864:1329::4635:x$ ,

con . . . . . log 1329 = 3,1235250

sumo. . . . . log. 4635 = 3,6660497

y . . . . . compl. log. 864 = 7,0634863

y tendré . . . . . log.  $x = \mp 3,8530610 = \log. 7129,53$ ;  
cuyo número será el cuarto término que se pide.

216 Por estensas que sean unas tablas, nunca pueden contener los logaritmos de todos los números; pero por su medio se pueden encontrar. En efecto, si se quiere hallar el logaritmo de un misto, *se reducirá el entero á la especie del quebrado que le acompaña (71), y estará reducido á encontrar el logaritmo de un cociente (207, 2<sup>o</sup>).*

Así, si se pide el logaritmo de  $25\frac{4}{9}$ , diré:

$$\log. 25\frac{4}{9} = \log. \frac{229}{9} = \log. 229 - \log. 9 = 2,3598355\dots$$

$$-0,9542425 = 1,4055930.$$

Si en vez de reducir el entero á la especie del quebrado, se convirtiese éste en decimal con cinco guarismos, sería 25,44444; en este caso, poniendo 1 de característica, se encontraría que la mantisa es

$4055854 + 75 = 4055929$ , y  $\log. 25,44444 = 1,4055929$ , que solo se diferencia del anterior en 1 en el séptimo guarismo decimal, que en nada influye.

217 El logaritmo de todo quebrado es *negativo ó defectivo*, como manifiesta la ecuación  $a^m = n$ , en que si  $n$  ha de ser un quebrado, debe (118) por precisión la  $m$  ser *negativa*, pues la base  $a$  es un número entero. Pero como nosotros hemos sentado por regla general, que cuando se hayan de calcular quebrados se conviertan en decimales, solo trataremos de estos, introduciendo el complemento logarítmico, para evitar los logaritmos negativos.

Así, si quiero el logaritmo de 0,37, diré.

$$\begin{aligned} \log. 0,37 &= \log. \frac{37}{100} = \log. 37 - \log. 100 = \log. 37 + \text{compl. log. } 100; \\ &\text{por consiguiente con } \log. 37 = 1,5682017 \\ &\text{sumo } \dots \text{ compl. log. } 100 = 8, \\ \hline &\text{y tengo } \dots \log. 0,37 = 9,5682017. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si fuera } \log. 0,037 &= \log. \frac{37}{1000}, \text{ diría:} \\ &\text{con } \dots \log. 37 = 1,5682017 \\ &\text{sumo } \dots \text{ compl. log. } 1000 = 7, \\ \hline &\text{y tengo } \dots \log. 0,037 = 8,5682017. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si fuera } \log. 0,0037 &= \log. \frac{37}{10000}, \text{ diría:} \\ &\text{con } \dots \log. 37 = 1,5682017, \\ &\text{sumo } \dots \text{ compl. log. } 10000 = 6, \\ \hline &\text{y tengo } \dots \log. 0,0037 = 7,5682017; \end{aligned}$$

y del mismo modo sería:  $\log. 0,00037 = 6,5682017$ , etc.

Donde, observando que en todos ellos es la mantisa una misma, que es la de los guarismos significativos 37, y la característica respectiva 9, 8, 7, 6 etc., se deduce por regla general, que *el logaritmo de todo quebrado decimal tiene por característica 9 ó tantas unidades ménos que 9, como ceros hay entre la coma y los guarismos significativos, y por mantisa la misma que la de estos.*

218 Recíprocamente, si se pidiese el quebrado decimal á que correspondía un logaritmo dado, en que entrase el complemento logarítmico, se pondría 0 y coma; despues se pondrían tantos ceros como unidades faltasen á la característica para 9; y luego las cifras significativas que correspondiesen á la mantisa. Así, se tiene

$$\begin{aligned} 9,6542343 &= \log. 0,45106; & 8,7725711 &= \log. 0,059234; \\ & & 7,3765770 &= \log. 0,00238. \end{aligned}$$

Como hay muchos sistemas de logaritmos (206), conviene resolver la siguiente cuestion. *Dado el logaritmo de un número en un sistema, cuya base sea B, encontrar el logaritmo del mismo número en otro sistema cuya base sea b.*

Llamando  $z$  el número,  $X$  su logaritmo en el sistema cuya base sea  $B$ , y  $x$  el logaritmo del mismo número en el sistema cuya base sea  $b$ ; tendremos

$$z = B^X, \quad z = b^x.$$

Si igualamos estas dos espresiones del mismo número  $z$ , tendremos  $B^X = b^x$ ; y tomando en un mismo sistema los logaritmos de ambos miembros de esta ecuacion, tendremos  $\log. B^X = \log. b^x$ , ó en virtud de lo espuesto (207...3.º),  $X.\log. B = x.\log. b$ .

Si suponemos que los dos logaritmos se tomen en el sistema cuya base sea  $B$ , tendremos (209)  $\log. B = 1$ , luego resultará  $X = x.\log. b$ ; lo que da  $x = \frac{X}{\log. b}$ .

Traduciendo al language vulgar esta espresion nos dice, que cuando se tiene el logaritmo de un número en un sistema, cuya base se conoce, y se quiere hallar el logaritmo del mismo número en otro sistema, cuya base se da tambien conocida, no hay mas que dividir el logaritmo dado por el logaritmo de la nueva base, tomado en el sistema del logaritmo dado.

Los dos sistemas de logaritmos, que mas nos interesa conocer, son el *tabular*, y el sistema que se caracteriza con el nombre de *neperiano* ó *hiperbólico*. El tabular tiene 10 por base, y la base del neperiano ó hiperbólico es un número misto, que se acostumbra señalar con  $e$ , y se tiene  $e = 2,71828182$  etc. con muchos guarismos.

Si quisiéramos pasar del sistema tabular al sistema neperiano, buscaríamos en el sistema tabular el logaritmo de 2,71828182, que es la base del neperiano, y hallaríamos ser 0,43429448 etc. Por consiguiente, para convertir los logaritmos tabulares en logaritmos neperianos, no habrá mas que dividir los logaritmos tabulares por el número 0,43429448 etc.

Si quisiéramos pasar de los logaritmos neperianos ó hiperbólicos á los tabulares, buscaríamos el logaritmo de 10 en el sistema neperiano ó hiperbólico, y hallaríamos ser 2,30258509 etc.; y dividiendo cualquier logaritmo neperiano por 2,30258509, se tendría convertido en tabular.

*Ejemplo.* Si, conocido el logaritmo de 100 que es 2, en el sistema tabular, quisiéramos hallar su logaritmo neperiano ó hiperbólico, dividiríamos 2 por 0,43429448, y hallaríamos 4,60517018, que es en efecto el que se halla en las tablas.

Si de este quisiera pasar al tabular, no tendría mas que dividir 4,60517018 por 2.30258509, y obtendríamos 2 para el logaritmo de 100 en el sistema tabular, como así se verifica.

*Aplicacion de los logaritmos á la estraccion de las raices, y á la resolucion de las ecuaciones esponenciales.*

219 Si para formar el cubo de un número, preferimos á la multiplicacion el ejecutarlo por medio de los logaritmos (207..3.º), respecto del 47, diremos:  
 $\log.47^3 = 3 \times \log.47 = 3 \times 1,6720979 = 5,0162937 = \log.103823$ ,  
 que es en efecto el cubo de 47.

Mas, para estraer la raiz cúbica de un número cualquiera, es preferible hacerlo por logaritmos; para lo cual, se dividirá (207..4.º) el logaritmo del número por el esponente 3; y el número que corresponda á este cociente será la raiz cúbica, exacta ó aproximada.

Así, si quiero estraer la raiz cúbica de 592704, diré:

$$\log.\sqrt[5]{592704} = \frac{\log.592704}{3} = \frac{5,7728379}{3} = 1,9242793 = \log.84;$$

por consiguiente, la raiz cúbica del número 592704 es 84 exactamente. El que lo quiera comprobar puede formar el cubo de 84, y encontrará en efecto 592704.

Igualmente se tiene

$$\log.\sqrt[5]{75425} = \frac{\log.75425}{3} = \frac{4,8775153}{3} = 1,6258384 = \log.42,2511;$$

$$\log.\sqrt[5]{7854679545} = \frac{\log.7854679545}{3} = \frac{9,8951285}{3} =$$

$$3,2983762 = \log.1987,8159.$$

Lo que hemos hecho respecto de la raiz cúbica, es extensivo á estraer cualquiera otra raiz. No hay mas que hallar el logaritmo del número, cuya raiz se quiere sacar; dividirlo por el esponente de la raiz; y viendo en las tablas á qué número corresponde este cociente, se tendrá la raiz buscada.

Supongamos que se pida estraer la raiz cuadrada del

número 2; tendremos que, dividiendo su logaritmo, que es 0,3010300, por 2, se tiene 0,1505150, que corresponde en las tablas á 1,4142; luego se tiene

$$\sqrt[2]{2}=1,4142.$$

Del mismo modo hallaremos que

$$\sqrt[3]{3}=1,4423; \quad \sqrt[4]{4}=1,4142; \quad \text{esta da el mismo resul-}$$

tado que  $\sqrt[2]{2}$ ; porque  $\sqrt[4]{4}=\sqrt[2]{\sqrt[2]{4}}=\sqrt[2]{2}$ ;

$$\sqrt[5]{5}=1,3796; \quad \sqrt[6]{6}=1,348; \quad \sqrt[7]{7}=1,3205,$$

$$\sqrt[8]{8}=1,2969; \quad \sqrt[9]{9}=1,2765; \quad \sqrt[10]{10}=1,259. \quad (*)$$

(\*) Vamos á cumplir ahora lo que ofrecimos en el escolio primero del § 152.

Principiemos por el caso 7.º, que es  $a^x=b$ .

Para despejar la  $x$  no hay mas que tomar los logaritmos de ambos miembros, y será  $x \cdot \log. a = \log. b$ ; que, dividiendo

por  $\log. a$ , resulta  $x = \frac{\log. b}{\log. a}$ . Este caso queda resuelto com-

pletamente cuando  $a$  y  $b$  sean cantidades positivas; pues no hay mas que tomar sus logaritmos, y dividir estos entre sí. Pero si  $a$  ó  $b$  ó ambas fuesen negativas, no se podrá resolver esta ecuacion, por cuanto, en virtud de lo espuesto (§ 477 T. II P. II), los logaritmos de las cantidades negativas son imaginarios, y por consiguiente no se pueden hallar en las tablas.

8.º  $x^x=a$ . Esta ecuacion la tenemos resuelta (Nota del § 310 T. I P. I T. E.) por dos métodos diferentes; por uno para cuando  $a=2000$ , y por otro para cuando  $a=100$ .

Ahora la vamos á resolver para cuando  $a=1000$  por nuestro método general de hallar todas las raíces reales de las ecuaciones numéricas, espuesto (§§ 197a, 197b etc.).

Suponiendo pues  $a=1000$ , será  $x^x=1000$ . Tomando los logaritmos de ambos miembros, se tendrá

*De las ecuaciones indeterminadas de primer grado.*

220 Dejamos dicho (142) lo que se entiende por problema indeterminado, y ecuacion indeterminada. Ahora añadimos, que se llama *cantidad constante* la que en una misma cuestion no puede tener mas de un solo valor; y

$$x \cdot \log. x = \log. 1000 = 3, \quad \text{ó} \quad x \cdot \log. x - 3 = 0 \quad (A).$$

Para aplicarle dicho método, supondrémos  $x=1$ ; y sustituyendo 1 por  $x$  en el primer miembro de esta ecuacion, se convertirá en  $1 \cdot \log. 1 - 3$ ; y como (§ 209)  $\log. 1 = 0$ , resulta que el primer miembro se convierte en  $-3$ ; y como debía ser 0, hay un *error* de  $-3$ .

Suponiendo  $x=2$ , el primer miembro se convierte en  $2 \cdot \log. 2 - 3$ ; y como  $2 \cdot \log. 2 = 0,6020600$ , resulta  $0,6020600 - 3 = -2,3979400$ ; que es el *error* del supuesto 2.

Como este error es numéricamente menor que el del 1, hallo la correccion al 2. Para esto, multiplico su error  $-2,3979400$  por la unidad positiva; y dividiendo el producto  $-2,3979400$  por la diferencia de los errores, que es

$$-3 - (-2,3979400) = -3 + 2,3979400 = -0,6020600, \quad \text{obtengo } 3,9 \text{ para la correccion; que, agregada al } 2, \text{ da } 5,9.$$

Tomando 6 por *tercer número supuesto*, y sustituyendo 6 por  $x$  en el primer miembro de la (ec. A), le convierte en  $6 \cdot \log. 6 - 3$ ; y como  $\log. 6 = 0,7781513$ , dicho primer miembro se convertirá en  $1,6689078$ , que es el *error* del 6.

Como este error es de signo contrario al que dió el supuesto 2, se debe inferir que entre 2 y 6 hay al ménos una raiz real. Y como el error del 6 es numéricamente menor que el del 2, hallo la correccion al 6. Para esto, multiplico su error  $1,6689078$  por  $6 - 2 = 4$ ; y dividiendo el producto  $6,6756312$ , por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es  $-2,3979400 - 1,6689078 = -4,0668478$ , resulta  $-1,6$  para la correccion; que, agregada al 6, da  $6 - 1,6 = 4,4$ .

Tomando 4,4 por *cuarto número supuesto*, se halla  $-0,1688081$  de *error*; y 0,147 para la correccion al 4,4; que, agregándosela, da 4,547.

Tomando 4,55 por *quinto número supuesto*, da  $-0,0060481$

*cantidad variable*, la que en una misma cuestion puede tener todos los valores que se quiera. V. g. si quiero dividir el 12 en dos partes, puedo decir que son 8 y 4, ó 7 y 5, ó 9 y 3, ó  $10\frac{1}{2}$  y  $1\frac{1}{2}$ ; ó 15 y  $-3$  etc.; donde veo, que las partes en que voy dividiendo el 12, son diferentes, y por lo mismo son *variables*; y el 12, que permanece uno mismo, es *constante*. El número de soluciones de una cuestion indeterminada, se limi-

de *error*; y 0,00523 para la correccion al 4,55; que, agregándosela, da 4,55523.

Tomando 4,55523 por *sexto número supuesto*, da  $-0,0003341$  de *error*, y 0,000289 para la correccion al 4,55523; que, agregándosela, da 4,555519.

Tomando 4,55552 por *séptimo número supuesto*, da  $-0,000017$  de *error*, y 0,000015 para la correccion al 4,55552; que, agregándosela, da 4,555535.

Tomando 4,55554 por *octavo número supuesto*, da  $-0,0000156$  de *error*, y 0,0000135 para la correccion al 4,55554; que, agregándosela, da 4,5555535.

Y como ya las tablas ordinarias de logaritmos, tanto de *D. Tadéo Lope* como de *Gallet* no nos darian una aproximacion mucho mayor, y las correcciones son tan pequeñas, podemos tomar por raiz suficientemente aproximada el número 4,5555535.

Si hubiéramos tomado los logaritmos de las tablas en que están con veinte guarismos decimales, podríamos haber hallado la raiz todavía con mas exactitud; y entónces acaso se hubiera convertido en certidumbre la probabilidad que ahora se presenta de que la raiz sea *cuatro enteros* y una fraccion periódica decimal en que el periodo sea *cinco*, esto es, que la raiz sea 4,55555555 etc.; que en virtud de lo espuesto (§ 141 del Tom. I P. I T. E.)

es  $4\frac{5}{9} = \frac{41}{9}$ ; de donde resulta, que si no es exactamente, se tiene con una aproximacion muy extraordinaria  $\left(\frac{41}{9}\right)^{\frac{41}{9}} = 1000$ .

Si queremos hacer una especie de comprobacion, observaremos que tomando los logaritmos de ambos miembros, se tendrá

$$\frac{41}{9} \cdot \log. \frac{41}{9} = \log. 1000 = 3.$$

ta en muchas ocasiones poniendo por condicion el que los números sean enteros y positivos. Las cantidades constantes se señalan con las primeras letras del alfabeto, y las variables con las últimas; así,  $ax \pm bz = c$ , que da

$$z = \pm \frac{c}{b} \mp \frac{ax}{b},$$

es la forma general de las ecuaciones indeterminadas de

Ahora el logaritmo de  $\frac{41}{9}$ , en virtud de lo espuesto (216), es 0,65854135; su multiplicacion por  $\frac{41}{9}$  queda hecha, multiplicando primero por 41, y dividiendo por 9 el producto que resulte; lo que da 3,0000217, que se diferencia de 3, que es el logaritmo de 1000, solo en unidades desde el quinto guarismo decimal en adelante, que es cuanta exactitud se puede apetecer.

Para investigar las demas raíces que pueda tener la (ec. A), dividiremos su primer miembro por  $x - 4,5555535$ ; lo que da por cociente  $\log. x$ , y queda por resta  $\frac{4,5555535 \cdot \log. x - 3}{x - 4,5555535}$ ;

é igualando á *cero* el cociente unido con la resta, se tiene

$$\log. x + \frac{4,5555535 \cdot \log. x - 3}{x - 4,5555535} = 0 \quad (A').$$

Aplicando el método á esta ecuacion, resulta que el supuesto  $x=1$ , da +0,84 etc. de *error*; el supuesto  $x=2$  da 0,93 etc. de *error*; y se obtiene -8,4 para la correccion al 1; que, agregándosela, da -7,4.

Ahora, para continuar el método, deberíamos tomar -7,4 por tercer número supuesto; pero como este número es negativo, y en virtud de lo espuesto (§ 477 del T. II P. II T. E.) *los logaritmos de las cantidades negativas son imaginarios*, no podemos continuar; lo cual es indicio de que la ecuacion (A) ó  $x^x = 1000$ , solo tiene una raiz, que es muy aproximadamente

$$x = 4,5555535. \quad \text{Pasemos al caso}$$

9.º  $\sqrt[x]{a} = b$ . Elevando ambos miembros á la potencia  $x$ , será  $a = b^x$ ; que, tomando los logaritmos, resultará

$$\log. a = x \log. b \quad \text{y} \quad x = \frac{\log. a}{\log. b};$$

primer grado entre dos variables  $x$  y  $z$ . Pasemos á resolver algunas cuestiones.

221 1.<sup>a</sup> Hallar dos números cuya suma sea 16.

Res. Sean  $x$  y  $z$  los dos números que busco; y tendré planteado el problema en la ecuacion  $x+z=16$ , que da  $z=16-x$ .

Ahora, dando valores á  $x$ , irán resultando para  $z$  los que aquí se ve:

que se resolverá del mismo modo que el caso 7.<sup>o</sup>

10.<sup>o</sup>  $\sqrt{x}=a$ . Suponiendo  $a=20$ , se tendrá  $\sqrt{x}=20$ ; elevando á la potencia  $x$ , se tiene  $x=20^x$ ; ó tomando los logaritmos,  $\log x=x \cdot \log 20$ ; ó pasándolo todo á un miembro  $x \log 20 - \log x = 0$ ; y como  $\log 20 = 1,3010300$ , será  $1,3010300 \cdot x - \log x = 0$  (B).

Esta ecuacion es inaccesible á todos los métodos conocidos hasta ahora; y debemós ensayar si nuestro método, espuesto en los (§§ 197a, 197b etc.) puede resolverla.

Suponiendo  $x=1$ , el primer miembro de dicha ecuacion se convierte en  $1,3010300 \cdot 1 - \log 1$ ; y como (§ 209)  $\log 1=0$ , se tiene que dicho primer miembro será  $1,3010300$ ; y como debía ser 0, resulta que de suponer  $x=1$ , se obtiene  $1,3010300$  de error.

El supuesto  $x=2$  convierte dicho primer miembro en  $2,1,3010300 - \log 2 = 2,6020600 - 0,3010300 = 2,3010300$ ; y como debía ser 0, resulta que  $2,3010300$  es el error que da el supuesto 2.

Como este es mayor que el error del 1, debo hallar la correccion al 1. Para lo cual, multiplico su error  $1,3010300$  por  $-1$ , lo que da  $-1,3010300$ ; y esto se debe dividir por la diferencia de los errores, que es  $+2,3010300 - 1,3010300 = 1$ ; y ejecutando la division, se obtiene  $-1,3010300$  para la correccion al 1; que, agregándosela, da

$$1 - 1,3010300 = -0,3010300.$$

Ahora, para continuar por nuestro método, deberíamos tomar  $-0,3$  ó  $-0,30103$  por tercer número supuesto; pero al tratar de hallar su logaritmo, nos encontramos con la dificultad de que los logaritmos de las cantidades negativas, son imaginarios, y no podemos continuar.

Esto, en vez de ser un defecto del método se debe considerar,

Si  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $x=2$ ,  $x=3$ ,  $x=4$ ,  $x=5$ ,  
 será  $z=16$ ,  $z=15$ ,  $z=14$ ,  $z=13$ ,  $z=12$ ,  $z=11$ ,  
 $x=6$ ,  $x=7$ ,  $8$ ,  $9$ ,  $10$ ,  $11$ ,  $12$ ,  $13$ ,  $14$ ,  $15$ ,  $16$ ,  $17$ ,  
 $z=10$ ,  $z=9$ ,  $8$ ,  $7$ ,  $6$ ,  $5$ ,  $4$ ,  $3$ ,  $2$ ,  $1$ ,  $0$ ,  $-1$ .

Donde se vé, que la primera y penúltima no son so-  
 luciones, porque no dan dos números, pues resulta uno  
 de ellos  $=0$ . La última tampoco es verdadera solución,  
 porque resulta un número negativo; y observando que la

al contrario, como una de sus mayores prerogativas; pues aquí  
 nos advierte que la ecuación es absurda.

En efecto, no hay ningún número, del cual estrayendo una  
 raíz del grado que espresa dicho número, sea igual á 20; y no  
 habiéndolo, no es posible la ecuación; y no siendo esta posible,  
 todo método que se le aplique, si es exacto, debe dar á conocer  
 la imposibilidad ó el absurdo que se comete.

Para hacerlo ver, observaremos que los valores, obtenidos en  
 el testo para

$$\sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[6]{6}, \sqrt[7]{7}, \sqrt[8]{8}, \sqrt[9]{9}, \sqrt[10]{10}, \text{ etc.},$$

no llega ninguno de ellos á 1,5; y como van disminuyendo, al  
 crecer el número, resulta que no existe ningún número, que estra-  
 yendo de él una raíz del mismo grado que unidades tiene dicho  
 número, pueda llegar jamas á ser 1,5; luego con mucha mas  
 razon se verificará, que no podrá ser igual con 20, luego no hay  
 ningún número que sustituido por  $x$  en la ecuación (B) la sa-  
 tisfaga; por lo cual esta ecuación es absurda; y todo método que  
 dé á conocer ó nos advierta el absurdo, reune las circunstancias  
 que se pueden apetecer.

Pero, hemòs visto que  $\sqrt[2]{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[4]{4}$ , etc. dan  
 un valor que ya hemos encontrado y puesto en el testo; luego

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 1,4142, & \sqrt[3]{x} &= 1,4423, & \sqrt[4]{x} &= 1,4142, & \sqrt[5]{x} &= 1,3796, \\ \sqrt[6]{x} &= 1,348, & \sqrt[7]{x} &= 1,3205, & \sqrt[8]{x} &= 1,2969, & \sqrt[9]{x} &= 1,2765, \\ & & \sqrt[10]{x} &= 1,259 \text{ etc.} \end{aligned}$$

son todas ecuaciones posibles, y á las cuales sabemos que se satisfa-  
 ce del modo siguiente: á la 1.<sup>a</sup> cuando  $x=2$ ; á la 2.<sup>a</sup> cuando

solucion  $x=8$  á que correspnde  $z=8$ , no da dos números diferentes, se deducirá que el infinito número de soluciones, que se podían dar á la cuestion, queda reducido á solo siete; pues v. g. la  $x=5$  que da  $z=11$ , es la misma que la  $x=11$  que da  $z=5$ . Por consiguiente, la cuestion en números enteros positivos y diferentes, solo admite estas siete resoluciones:

1 y 15; 2 y 14; 3 y 13; 4 y 12; 5 y 11; 6 y 10; 7 y 9.

$x=3$ ; á la 3.<sup>a</sup> cuando  $x=4$ ; á la 4.<sup>a</sup> cuando  $x=5$ ; á la 5.<sup>a</sup> cuando  $x=6$ ; á la 6.<sup>a</sup> cuando  $x=7$ ; á la 7.<sup>a</sup> cuando  $x=8$ ; á la 8.<sup>a</sup> cuando  $x=9$ , y á la 9.<sup>a</sup> cuando  $x=10$ . Luego, puesto que todas ellas son posibles, se debe indagar si por nuestro método se consiguen resolverlas.

Elijamos la ecuacion  $\sqrt{x}=1,4142$ , que sabemos queda satisfecha cuando  $x=2$ .

Elevándola á la potencia  $x$ , tendremos  $x=(1,4142)^x$ ; y tomando los logaritmos, será  $\log.x=x.\log.1,4142$ , ó  $x.\log.1,4142-\log.x=0$ ; pero  $\log.1,4142=0,1505150$ ; luego tendremos  $0,1505150.x-\log.x=0$  (C).

Para aplicarle nuestro método, supongamos  $x=1$ ; y sustituyendo 1 por  $x$  en el primer miembro de la ecuacion (C) se convierte en  $0,1505150.1-\log.1$ ; y como  $\log.1=0$ , según lo espuesto (§ 209), esto se convierte en  $0,1505150$ ; y como dicho primer miembro debía ser 0, resulta que de suponer  $x=1$ , se obtiene  $0,1505150$  de error.

Suponiendo  $x=2$ , dicho primer miembro se convierte en  $0,1505150.2-\log.2$ ; y como  $\log.2=0,3010300$ , el valor anterior se nos convertirá en  $0,3010300-0,3010300=0$ ; lo que manifiesta (§ 170 e), que 2 es raíz de la ecuacion (C). Luego esta queda resuelta por nuestro método.

Apliquemos dicho método á la ecuacion  $\sqrt[3]{x}=1,4423$  en que sabemos por el valor de  $\sqrt[3]{3}$  del testo, que uno de los valores que satisfacen á esta ecuacion es  $x=3$ .

Elevando dicha ecuacion á la potencia  $x$ , se tiene  $x=(1,4423)^x$ ; que, tomando los logaritmos, resulta  $\log.x=x.\log.1,4423$ ; ó como  $\log.1,4423=0,1590556$ , se tendrá por último

222 2.<sup>a</sup> Dividir 53 en dos partes, tales que la una sea divisible por 4, y la otra por 7.

Res. Puesto que la una ha de ser divisible por 4, la podremos llamar  $4x$ , y la otra será  $7z$ ; y tendremos  $4x+7z=53$ .

Ahora, se despeja la  $x$ , ó en general la variable que tenga menor coeficiente; si en su espresion resulta quebrado, se igualará este con otra variable del mismo signo que la

$$0,1590556.x - \log x = 0 \text{ (D).}$$

Para aplicar el método á esta ecuacion, supondrémos  $x=1$ ; y substituyendo 1 por  $x$  en la espresada ecuacion, su primer miembro se convierte en  $0,1590556.1 - \log 1$ ; que como  $\log 1=0$ , resulta  $0,1590556$ ; que es el error que da el supuesto  $x=1$ .

Suponiendo  $x=2$ , dicho primer miembro se convierte en  $0,0170812$  que es el error.

Y como es menor que el del 1, para hallar la correccion al 2, se multiplica su error por 1; lo que da por producto el mismo valor; y dividiéndole por la diferencia de los errores, que es  $0,1590556 - 0,0170812 = 0,1419744$ , resulta  $0,12$  para la correccion al 2; que, agregándosela, da  $2,12$ .

Tomando  $2,12$  por tercer número supuesto, resulta  $0,0108620$  de error, y  $0,2095$  para la correccion al  $2,12$ ; que, agregándosela, da  $2,3295$ .

Tomando  $2,3295$  por cuarto número supuesto, da  $0,0032573$  de error, y  $0,0897$  para la correccion al  $2,3295$ ; que, agregándosela, da  $2,4192$ .

Tomando  $2,4192$  por quinto número supuesto, da  $0,0011155$  de error, y  $0,0467$  para la correccion al  $2,4192$ ; que, agregándosela, da  $2,4659$ .

Tomando  $2,4659$  por sexto número supuesto, da  $0,0002396$  de error, y  $0,0139$  para la correccion al  $2,4659$ ; que, agregándosela, da  $2,4798$ .

Tomando  $2,4798$  por séptimo número supuesto, da  $0,0000093$  de error, y  $0,0005$  para la correccion al  $2,4798$ ; que, agregándosela, da  $2,4803$ .

Tomando  $2,4803$  por octavo número supuesto, da  $0,0000014$  de error, y  $0,000088$  para la correccion al  $2,4803$ ; que, agregándosela, da  $2,480388$ ; y como el error que hemos obtenido es tan pequeño, pues consiste en una unidad

del quebrado; se despeja esta; y si en su valor resulta quebrado, se hace lo mismo, hasta llegar á una variable que determine exactamente la anterior; en este caso, se va substituyendo en los valores de las antecedentes, y se tendrán las del problema, que solo dependerán de la última; se dan valores á esta, y se van formando las seluciones que satisfarán al problema. Así, aplicando este método á la anterior, cómo se ve en (A), despejando  $x$  y sacando los en-

en el sexto guarismo decimal; y la correccion no da ningun valor en el cuarto guarismo decimal, debemos tomar este valor 2,480388 por raiz suficientemente aproximada; pues si todavía quisieramos continuar, no por eso obtendríamos valores mas aproximados, á causa de que la ecuacion la hemos calculado tomando 7 guarismos decimales en los logaritmos, y cuatro en los números; y si quisiéramos continuar, corríamos el riesgo de estraviarnos, en atencion á que la ecuacion no es exacta para números de mas guarismos de aquellos para que se ha calculado.

Ahora bien, sabemos por lo espresado en el texto que

$\sqrt[3]{3} = 1,4423$ ; luego á la ecuacion  $\sqrt{x} = 1,4423$  debe satisfacer tambien otro valor de  $x$ , á saber,  $x=3$ , ademas del que ya hemos sacado  $x=2,480388$ .

Para ver si nuestro método da esta segunda raiz  $x=3$ , dividiremos, conforme al número 12.º de la regla, el primer miembro de la ecuacion (D) por  $x-2,480388$ ; y se halla por cociente

0,1590556, y por resta  $\frac{0,3945196 - \log.x}{x-2,480388}$ ; uniendo el co-

ciente con la resta, é igualándolo todo con cero, se tiene

$$0,1590556 + \frac{0,3945196 - \log.x}{x-2,480388} = 0 \quad (D')$$

A esta ecuacion es á la que debemos aplicar el método.

El supuesto  $x=1$  convierte el numerador del quebrado en 0,3945196 en atencion á que  $\log.1=0$ ; el denominador se convierte en  $-1,480388$ ; y haciendo la division resulta que el valor del quebrado es  $-0,2675782$ ; el cual unido al valor del primer término 0,1590556, da  $-0,1085226$ , que es el error del 1.

Suponiendo  $x=2$ , el numerador del quebrado se convier-

teros, tendré la (ec. B); igualo el quebrado que me ha resultado, con otra variable  $u$ , y tengo el valor (C); (le pongo el signo ménos, porque la incógnita del quebrado lo tiene, y de este modo resulta mayor sencillez); despejo en esta la  $z$  y tengo el valor (D); igualo el quebrado con  $t$ , y tengo la (E); despejo la  $u$  y tengo el valor (F); ahora sustituyo este valor de  $u$  y  $t$  en el de  $z$  (D), y se convierte en (G); sustituyo el de  $z$  y el de  $u$  en el (B) de  $x$ , y sale el (H).

te en 0,0934896; el denominador en  $-0,480388$ ; y haciendo la division, resulta  $-0,1946127$ . Este cociente que es negativo, unido con el término constante 0,1590556, da  $-0,0355574$ , que es el *error* del 2; y se halla  $+0,487$  para la correccion al 2; que, agregándosela, da 2,487.

Tomando 2,5 por *tercer número supuesto*, da  $-0,0153478$  de *error*, y  $+0,38$  para la correccion al 2,5; que, agregándosela, da 2,88.

Tomando 2,9 por *cuarto número supuesto*, da  $-0,0027091$  de *error*, y  $+0,08$  para la correccion al 2,9; que, agregándosela, da 2,98.

Tomando 3 por *quinto número supuesto*, el numerador del quebrado es  $-0,0826016$ , el denominador es 0,519612, y el cociente de la division del uno por el otro es  $-0,1589679$ ; el cual unido al término constante 0,1590556 convierten el primer miembro en  $+0,0000877$ ; pero como la ecuacion (D) no era exacta sinó hasta el cuarto guarismo decimal, la (D') que de ella resulta tampoco puede ser exacta mas allá del cuarto guarismo decimal; y pues que para el error del quinto supuesto hemos obtenido los cuatro primeros guarismos decimales *ceros*, se debe considerar el error absolutamente como *cero*. Por lo que (§ 170 e), el 3 es raiz de la mencionada ecuacion, como en efecto así debía verificarse.

Para ver si hay mas raices reales deberíamos dividir el primer miembro de la ecuacion (D') por  $x-3$ ; é igualar el cociente á *cero*; pero, como en dicho primer miembro no hay ningun término que contenga á  $x$ , no se puede dividir por  $x$ ; y no pudiéndose efectuar dicha operacion, parece debería inferirse que ya no hay mas raiz real.

Sin embargo, como nuestro método ha superado tan prodigiosamente cuantas dificultades se le han presentado, juzgúe dig-

$$(A) 4x+7z=53, \quad (B) x=\frac{53-7z}{4}=13-z+\frac{1-3z}{4},$$

$$(C) \frac{1-3z}{4}=-u, \text{ ó } 1-3z=-4u, \quad (D) z=\frac{4u+1}{3}=u+\frac{u+1}{3},$$

$$(E) \frac{u+1}{3}=t, \text{ ó } u+1=3t; \quad (F) u=3t-1,$$

$$(G) z=3t-1+t=4t-1, \quad (H) x=13-4t+1-3t+1=15-7t.$$

no de tomarse en consideracion el aplicarle á este caso; y aunque la época en que esto se verificaba era la mas crítica y afanosa de mi vida por las razones que indico en el prólogo, no por eso debo dejar de indicar el rumbo que se debe seguir para investigar una tercera raiz, si es que la hay; pues esto al ménos podrá servir de guia, para que otros Analistas, en circunstancias mas favorables, puedan continuar estas indagaciones.

Si dividimos el primer miembro de la ecuacion (D') por  $x-3$ , resulta lo siguiente:

De dividir el primer término 0,1590556 por  $x$ , primer término del divisor, se obtiene  $\frac{0,1590556}{x}$ ; este cociente multipli-

cado por el primer término del divisor, da el primer término del dividendo; y como se ha de restar, destruye á dicho primer término. De multiplicar este cociente por  $-3$ , segundo término del divisor, y mudándole el signo, porque se ha de restar, resulta

resta  $\frac{0,4771668}{x}$ ; y la resta total unida al cociente, é iguala-

do todo con *cero*, da

$$\frac{0,1590556}{x} + \frac{0,4771668}{x} + \frac{0,3945196 - \log.x}{x-2,480388} = 0 \quad (D'').$$

Para aplicarle el método, supongamos  $x=1$ ; lo que da 0,0538056 de *error*.

El supuesto  $x=2$ , da 0,0404394 de *error*, y 3,02 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 5,02.

Tomando 5 por *tercer número supuesto*, da 0,0191120 de *error*, y 2,69 para la correccion al 5; que, agregándosela, da 7,69

Donde tengo los valores de las variables del problema, que solo dependen de la variable  $t$ ; doy, pues, valores á esta empezando por cero, y tengo que

si	$t = 0,$	$t = 1,$	$t = 2,$	$t = 3$
sale	$z = -1,$	$z = 3,$	$z = 7,$	$z = 11$
y	$x = 15,$	$x = 8,$	$x = 1,$	$x = -6.$

El valor  $t = 0$  y  $t = 3$  no satisfacen, porque dan negativa una de las partes del 53; luego sólo tiene el pro-

Tomando 8 por *cuarto número supuesto*, da 0,0133823 de error, y 7 para la correccion al 8; que, agregándosela, da 15.

Tomando 15 por *quinto número supuesto*, da 0,0080522 de error, y 10,56 para la correccion al 15; que, agregándosela, da 25,56.

Tomando 26 por *sesto número supuesto*, da 0,0050288 de error, y 4,3 para la correccion al 26; que, agregándosela, da 30,3.

Tomando 30,3 por *séptimo número supuesto*, da 0,0044798 de error, y 35,087 para la correccion al 30,3; que, agregándosela, da 65,087.

Tomando 65, por *octavo número supuesto*, da 0,0021986 de error, y 33,4 para la correccion al 65; que, agregándosela, da 98,4.

Tomando 98 por *noveno número supuesto*, da 0,0014897 de error, y 69,3 para la correccion al 98; que, agregándosela, da 167,3.

Aquí observamos, que, aunque los errores van disminuyendo, las correcciones van aumentando lo que parece indicar una cosa análoga á la de las *series divergentes*, que nos van separando cada vez mas del verdadero valor: lo que se puede tomar como un indicio de que la *ecuacion no tiene raices reales*, á no ser que continuando los *supuestos se cambiase la ley de las correcciones*. No insistiremos por ahora en esto, ya porque las circunstancias no nos lo permiten, ya porque esta *ecuacion no estando calculada, sinó con cuatro guarismos decimales exactos, no es la mas á propósito para esta clase de investigaciones*.

Para corroborar mas la *esclencia del método*, haremos aplicacion á otro caso de la *espresion*  $\sqrt{x}$ ; y elegiremos aquel en que  $x=7$ . Mas, para asegurarnos mejor en el rigor de los re-

blema dos soluciones: primera  $t=1$ , que da  $z=3$ , y  $x=8$ ; y las dos partes  $4x$  y  $7z$  del número serán  $32$  y  $21$ , cuya suma  $=53$ ; y segunda  $t=2$ , que da  $z=7$  y  $x=1$ ; y las dos partes del número serán  $4$  y  $49$ , cuya suma  $=53$ .

223 3.<sup>a</sup> Un mercader compra paño de á 61 reales la vara, y paño de á 78; al ajustar cuentas, encuentra que el paño de á 78 le ha costado 97 reales mas que el de á 61; ¿cuánto compró de cada clase?

sultados, calcularémos su espresion con mas exactitud de lo que lo hemos hecho en el texto.

El logaritmo de 7 es 0,8450980; su 7.<sup>a</sup> parte es 0,12072828. Como todos los logaritmos los tomamos con 7 guarismos decimales, suprimirémos el guarismo 8 y en su lugar añá-

dirémos una unidad al 2 y tendremos para el log. de  $\sqrt[7]{7}$  el valor 0,1207283.

Este logaritmo se halla por las tablas que corresponde al número 1,3204693. Por consiguiente, la ecuacion deberá ser

$\sqrt[x]{x} = 1,3204693$ ; á la cual sabemos que satisface la sustitucion del 7 en vez de  $x$ .

Elevando esta ecuacion á la potencia  $x$ , se convierte en  $x = (1,3204693)^x$ ; que, tomando los logaritmos, será  $\log. x = x \cdot \log. 1,3204693$ .

Poniendo en vez de  $\log. 1,3204693$  el valor 0,1207283 que nos ha servido para encontrar dicho número, la ecuacion anterior se nos convertirá en  $\log. x = x \cdot 0,1207283$ ; y trasladando se tendrá  $0,1207283 \cdot x - \log. x = 0$  (E).

A esta ecuacion es á la que debemos aplicar el método.

El supuesto  $x=1$  da 0,1207283 de error en atencion (209) á que  $\log. 1=0$ .

El supuesto  $x=2$  da  $-0,0605734$  de error; y como este error es negativo, indica (170 s) que entre 1 y 2 se halla al ménos una raiz real; y como el error del 2 es menor que el del 1, debemos hallar la correccion al 2.

Para esto, se multiplica su error  $-0,0605734$  por la unidad positiva; y el producto  $-0,0605734$ , se divide por la diferencia de los errores, que es

$0,1207283 - -0,0605734 = 0,1813017$ ; y practicando la

Res. Sea  $x$  el paño de á 61, con lo que  $61x$  será su valor; por lo mismo tambien será  $78z$  el valor del paño de á 78; y como el de á 78 le ha costado 97 reales mas, se tendrá planteado el problema en la ecuacion

$$61x+97=78z, \text{ ó } 61x=78z-97.$$

De la que, aplicando el mismo raciocinio de ántes, se sacará despues de haber sustituido las variables

$$u, t, s, r, q, \text{ que } x=78q+47, \text{ y } z=61q+38.$$

division, se halla  $-0,334102$  para la correccion al 2; que, agregándosela, da  $1,665898$ .

Tomando  $-1,665898$  por *tercer número supuesto*, da  $-0,0205019$  de *error*, que, siendo negativo y habiendo resultado positivo el error del supuesto 1, se infiere (170 s) que entre 1 y  $1,665898$  hay al ménos una raiz real; y como el error del  $1,665898$  es el menor, se debe hallar la correccion á él. Para esto, se multiplica el espresado error  $-0,0205019$  por  $1,665898-1=0,665898$ ; y dividiendo el producto  $-0,0136521742062$  por la diferencia de los dos errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre sí, que es

$0,1207283--0,0205019=0,1412302$ , resulta  $-0,096666$  para la correccion al  $1,665898$ ; que, agregándosela, da  $1,569232$ .

Tomando  $1,569232$  por *cuarto número supuesto*, da  $-0,0062335$  de *error*, y  $-0,0279478$  para la correccion al  $1,569232$ ; que, agregándosela, da  $1,5412842$ .

Tomando  $1,5412842$  por *quinto número supuesto*, da  $-0,0019041$  de *error*, y  $-0,0084044$  para la correccion al  $1,5412842$ ; que, agregándosela, da  $1,5328798$ .

Tomando  $1,5328798$  por *sesto número supuesto*, da  $-0,0004463$  de *error*, y  $-0,0019623$  para la correccion al  $1,5328798$ ; que, agregándosela, da  $1,5309175$ .

Tomando  $1,5309175$  por *séptimo número supuesto*, da  $-0,0001268$  de *error*, y  $-0,0005569$  para la correccion al  $1,5309175$ ; que, agregándosela, da  $1,5303606$ .

Tomando  $1,5303606$  por *octavo número supuesto*, da  $-0,0000361$  de *error*, y  $-0,0004575$  para la correccion al  $1,5303606$ ; que, agregándosela, da  $1,5299031$ .

Tomando  $1,5299031$  por *noveno número supuesto*, da

Por consiguiente, dando valores, resulta que pudo comprar las siguientes varas de

$$\left. \begin{array}{l} \text{pañó de á 61} \\ \text{Idem de á 78} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Si } q=0, 1, 2, 3, 4, 5, \text{ etc.} \\ x=47, 125, 203, 281, 359, 437, \text{ etc.} \\ z=38, 99, 160, 221, 282, 343, \text{ etc.} \end{array}$$

Cuyos números satisfacen á la condicion de valer siempre 97 reales mas el paño de á 78 que el de á 61.

+0,0000387 de *error*. El cual como es positivo y el del 1,5303606 era negativo, indica que entre 1,5299031 y 1,5303606 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1,5299031 es el mayor, se halla la correccion al 1,5303606; y resulta que es -0,0001887; que, agregada al 1,5303606, da 1,5301719.

Tomando 1,5301719 por *décimo número supuesto* da -0,0000052 de *error*, y -0,0000307 para la correccion al 1,5301719; que, agregándosela, da 1,5301412.

Tomando 1,5301412 por *undécimo número supuesto*, da -0,0000030 de *error*, y 0,0000171 para la correccion al 1,5301412; que, agregándosela, da 1,5301241.

Tomando 1,5301241 por *duodécimo número supuesto*, da +0,0000026 de *error*.

El cual, siendo positivo y habiendo resultado negativo el del 1,5301412, indica que entre 1,5301241 y 1,5301412 hay al ménos una raiz real; y se halla +0,0000079 para la correccion al 1,5301241; que, agregándosela, da 1,5301320.

Tomando 1,5301320 por *décimo tercero número supuesto*, se halla +0,0000013 de *error*, y +0,0000028 para la correccion al 1,530132; que, agregándosela, da 1,5301348.

Tomando 1,5301348 por *décimo cuarto número supuesto*, se halla +0,0000011 de *error*, y +0,0000017 para la correccion al 1,5301348; que, agregándosela, da 1,5301365.

Tomando 1,5301365 por *décimo quinto número supuesto*, resulta +0,0000006 de *error*, y +0,0000007 para la correccion al 1,5301365; que, agregándosela, da 1,5301372.

Puesto que tanto el error que acabamos de obtener como la correccion ocupan el séptimo lugar decimal, y que la ecuacion es

*De las permutaciones y combinaciones.*

224 Se llaman *permutaciones* los diferentes modos de disponer ó colocar muchas cosas las unas con respecto á las otras; y se llaman *combinaciones* los diferentes modos de tomar muchas cosas de una en una, de dos en dos, de tres en tres etc. sin atender al órden con que se han de colocar.

solo exacta hasta el espresado séptimo guarismo decimal, no pasaremos mas adelante; y nos contentaremos con saber que  $x=1,5301372$  es una raiz de la ecuacion (E) exacta lo ménos hasta el sexto guarismo decimal.

Para encontrar las demas, se divide el primer miembro de la ecuacion (E) por  $x-1,5301372$ ; lo que da  $0,1207283$  para el cociente del primer término del dividendo por el primero del divisor.

El producto del cociente por el primer término del divisor da el primer término del dividendo; y como se ha de restar del mismo dividendo, le destruye.

El producto del segundo término del divisor por el espresado cociente resulta ser  $-0,18473086292276$ , que, como se ha de restar, se le muda el signo, y tomando solo siete guarismos decimales y añadiendo al último guarismo una unidad por ser 6 el primer guarismo decimal que se omite, resulta que la resta total que queda es  $+0,1847309-\log.x$ ; poniendo á esta resta por denominador el espresado divisor, y uniéndolo al cociente hallado tendremos que el verdadero cociente total es

$$0,1207283 + \frac{0,1847309 - \log.x}{x - 1,5301372}$$

Este cociente igualado á *cero* segun se previene (12.º) de la regla será  $0,1207283 + \frac{0,1847309 - \log.x}{x - 1,5301372} = 0$  (E').

Esta ecuacion debe dar todas las demas raices reales que tenga la ecuacion (E).

El supuesto  $x=1$  reduce el numerador del quebrado á  $0,1847309$  en atencion á que el logaritmo de 1 es *cero*; el denominador se reduce á  $-0,5301372$ ; practicando la division

Sean, pues, las cosas por permutar las letras del alfabeto. Si tuviéramos una sola letra, tal como  $a$ , esta no admitiría nada mas que una permutacion. Si tomamos ahora dos letras  $a$  y  $b$ , se pondrá la  $a$  ántes ó despues de la  $b$ , en esta forma  $ab, ba$ ; luego dos letras se pueden permutar de  $2 \times 1$  maneras. Si suponemos ahora otra tercera letra  $c$ , esta se podrá colocar al principio, en medio y al fin de cada permutacion de las anteriores, y tendremos las seis siguientes  $cab, acb, abc, cba, bca, bac$ ;

del numerador por el denominador, se obtiene  $-0,3384587$ ; lo cual unido al término constante  $0,1207283$  da  $-0,2177304$ ; que es el *error* que resulta de suponer  $x=1$ .

El supuesto  $x=2$  reduce el quebrado á

$$\frac{-0,1162991}{+0,4698628} = -0,2475171;$$

cuyo valor, unido al término constante, da  $-0,1267888$  para el *error* del supuesto  $x=2$ ; y se halla  $1,257$  para la correccion al 2; que, agregándosela, da  $3,257$ .

Tomando  $3,3$  por *tercer número supuesto*, da  $-0,0678191$  de *error*, y  $1,495$  para la correccion al  $3,3$ ; que, agregándosela, da  $4,795$ .

Tomando  $5$  por *cuarto número supuesto*, da  $-0,0274824$  de *error*, y  $+1,158$  para la correccion al  $5$ ; que, agregándosela, da  $6,158$ .

Tomando  $6,16$  por *quinto número supuesto*, da  $-0,0099127$  de *error*, y  $+0,654$  para la correccion al  $6,16$  que, agregándosela, da  $6,814$ .

Tomando  $7$  por *sesto número supuesto*, el numerador del quebrado se reduce á  $-0,6603671$  y el denominador á  $5,4698628$ ; que, practicando la division, se halla  $-0,12072827$ .

Este cociente lo hemos tomado con 8 guarismos decimales para que se vea que el octavo guarismo es mayor que 5; y que por consiguiente apreciando solo 7 guarismos decimales, como hemos hecho hasta ahora, debemos suprimir el 7 añadiendo en su lugar una unidad al 2; y poniendo este valor á continuacion del término constante, tendríamos que el primer miembro de la ecuacion ( $E'$ ) se convierte en  $+0,1207283 - 0,1207283 = 0$ .

Luego, pues que el supuesto  $x=7$  da *cero* de *error*, en virtud de lo espuesto ( $170 e$ ), el número 7 es raiz de la ecuacion

Juego tres cosas ofrecen un número de permutaciones expresado por  $3 \times 2 \times 1$ ; y en general siguiendo el mismo raciocinio, determinaríamos, que un número  $n$  de letras ó cosas ofrece un número de permutaciones expresado por

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 2 \times 1.$$

Es prodigioso el número de permutaciones que ofrecen las cosas; pues si suponemos que en una clase entran nueve discípulos, y se quiere averiguar los diferentes modos

ción ( $E'$ ) y por consiguiente de la (ec.  $E$ ); y el método es lo mas admirable que se puede concebir; pues al intentar yo aplicarle á estas ecuaciones, estaba muy distante de esperar obtener resultados tan completamente satisfactorios.

Para indagar si la (ec.  $E$ ) tiene una tercera raiz, dividiremos el primer miembro de la (ec.  $E'$ ) por  $x-7$ , é igualando el cociente á *cero*, resulta la ecuacion

$$\frac{0,1207283}{x} + \frac{0,8450981}{x} + \frac{0,1847309 - \log x}{x-1,5301372} = 0 \quad (E'').$$

He principiado á aplicarle el método, y resulta que el supuesto  $x=1$ , da 0,0379425 de *error*.

El  $x=2$ , da 0,0256132 de *error*, y 2,07 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 4,07.

Tomando 4,1 por *tercer número supuesto*, da 0,0158063 de *error*, y 3,38 para la correccion al 4,1; que, agregándosela, da 7,48.

Tomando 7,5 por *cuarto número supuesto*, da 0,0101859 de *error*, y 13,6 para la correccion al 7,5; que, agregándosela, da 21,1.

Ahora, deberíamos tomar 21 por *quinto número supuesto*; pero, por las mismas razones que dimos al ocuparnos de la (ec.  $D''$ ) aconsejamos á los lectores, que se hallen en circunstancias mas favorables, el que continúen estas investigaciones; en el concepto de que, como esta ecuacion está calculada con siete guarismos decimales exactos, podrán continuarla hasta que en el error se hallen seis ceros entre la coma y los guarismos significativos, y entonces se podrá observar bien la ley de las correcciones y sacar la consecuencia que convenga.

Pasemos ahora al caso 11.º  $a^{\frac{1}{x}}=b$ . Tomando los logaritmos,

de que podrán colocarse, este número estará expresado por  $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$ ; y suponiendo que cada cinco veces que se colocasen, lo hiciesen en un minuto, necesitarían 50 días, 9 horas, y 36 minutos.

225 Si de las cosas, que se dan para permutar, fuesen dos iguales, el número de permutaciones se reduciría á la mitad, ó se debería partir por  $2 = 2 \times 1$ : como se ve en

resulta  $\log.a^{\frac{1}{x}} = \log.b$ , ó  $\frac{1}{x} \cdot \log.a = \log.b$ ; que da  $x = \frac{\log.a}{\log.b}$ ; resultado idéntico al que nos dió el caso 9.º

12.º  $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = a$ ; tomando los logaritmos, se tiene  $\frac{1}{x} \cdot \log \frac{1}{x} = \log a$ ;

y como  $\log \frac{1}{x} = (\S 207 \dots 2.º) \log.1 - \log x = -\log.x$ , se tendrá  $\frac{1}{x} \cdot -\log.x = \log.a$ ; quitando el divisor, resulta

$-\log.x = x \cdot \log.a$ ; ó suponiendo  $a=10$ , que da  $\log.a=1$ ,  $-\log.x=x$ , ó  $x=-\log.x$ .

Esta ecuacion conduce á la cuestion de hallar un número, tal que sea igual á su logaritmo, tomado este negativamente.

Trasladándolo todo á un miembro, será  $x + \log.x = 0$  (F).

Aplicando nuestro método á esta ecuacion, tendremos que el supuesto  $x=1$ , da 1 de error.

El supuesto  $x=2$  da 2,3010300 de error, y  $-0,7$  para la correccion al 1; que, agregándosela, da 0,3.

Tomando 0,3 por tercer número supuesto, resulta, que como

0,3 es igual con  $\frac{3}{10}$ ,  $\log.0,3$  será igual ( $\S 207 \dots 2.º$ ) á

$\log.3 - \log.10 = 0,4771213 - 1$ ; y el primer miembro de la ecuacion se convertirá en  $0,3 + 0,4771213 - 1 = -0,2228787$  que será el error; el cual siendo de signo contrario al del 1, indica que entre 0,3 y 1 hay al ménos una raiz real; y como el error del 0,3 es menor que el del 1, hallo la correccion al 0,3. Para esto, multiplico su error  $-0,2228787$  por  $0,3 - 1 = -0,7$ ;

$ab$  y  $ba$ ; pues si  $a=b$ , no hay mas que una  $aa$  ó  $bb$ . Si de las letras  $a, b, c$ , que dan seis permutaciones, fuese  $a=b$ , no habría mas de las tres  $cbb, bcb, bbc$ , que es la mitad. Si hubiese tres letras iguales, el número de permutaciones se reduciría á la sexta parte, ó se debería dividir por  $6=3 \times 2 \times 1$ ; como se ve en las seis permutaciones que dan  $a, b, c$ ; pues si  $a=b=c$ , se reducen á una sola  $aaa$  ó  $bbb$  ó  $ccc$ . Continuando del mismo modo, se deducirá, que si hubiese cuatro letras igua-

y dividiendo el producto por la diferencia de los errores de signos contrarios, procedentes de los dos números supuestos mas próximos entre si, que es  $1 - -0,2228787 = 1,2228787$ , se obtiene 0,12 para la correccion al 0,3; que, agregándosela, da 0,42.

Tomando 0,42 por *cuarto número supuesto*, da 0,0432493 de *error*, y  $-0,019$  para la correccion al 0,42; que, agregándosela, da 0,401.

Tomando 0,4 por *quinto número supuesto*, da 0,00206 de *error*; y 0,0093 para la correccion al 0,4; que, agregándosela, da 0,4093.

Tomando 0,4093 por *sesto número supuesto*, da 0,0213417 de *error*, y  $-0,00098$  para la correccion al 0,4; que, agregándosela, da 0,39902.

Tomando 0,39902 por *séptimo número supuesto*, da 0,0001235 de *error*, y  $-0,000005$  para la correccion al 0,39902; que, agregándosela, da 0,399015.

Tomando 0,399015 por *octavo número supuesto*, da 0,0000043 de *error*; y pues que ya el error es tan pequeño que se halla en el sexto guarismo decimal, es escusado buscar mayor aproximacion, y por consiguiente, vemos que en este caso el método nos ha conducido á un resultado tan exacto como podíamos apetecer.

Si queremos comprobar que el número 0,399015 es igual á su logaritmo tomado negativamente, no tenemos mas que observar, que

$$\begin{aligned} \log 0,399015 &= \log \frac{399015}{1000000} = \log 399015 - \log 1000000 \dots \\ &= 5,6009893 - 6 = -0,3990107; \end{aligned}$$

que tomado con un signo contrario es  $+0,3990107$ , que con-

les, se debería dividir el número de permutaciones por  $4 \times 3 \times 2 \times 1$ ; y en general, que si hubiese  $m$  letras iguales, se debería dividir por

$$m(m-1)(m-2)\dots 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

226 En las combinaciones generalmente se pone por condicion, que no se repita ninguna, cuando se forman las de dos en dos, de tres en tres, etc. Así, si se toman para combinar las diez letras  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ , de

viene con el número hallado 0,399015 en cinco guarismos decimales.

La espresion  $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = a$ ; si hacemos  $\frac{1}{x} = z$ , será

$z^z = a$ , que tiene la misma forma que  $x^x = a$  del caso 8.º; y por lo mismo el método la resuelve.

13.º  $\sqrt[\frac{1}{x}]{\frac{1}{x}} = a$ ; quitando el radical por los esponentes

fraccionarios, se tendrá  $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = a$ ; ó  $\left(\frac{1}{x}\right)^x = a$ ; ó

$x \log. \frac{1}{x} = \log. a$ ; ó (207. 2.º)  $x(\log. 1 - \log. x) = \log. a$ ; ó teni-

endo presente que  $\log. 1 = 0$ , será  $-x \log. x = \log. a$ ; ó trasladando  $\log. a + x \log. x = 0$ , ó si  $a = 10$ ,

$$1 + x \log. x = 0 \quad (G).$$

Aplicándole el método, se tiene: que el supuesto  $x = 1$ , da 1 de *error*.

El  $x = 2$  da 1,6020600 de *error*; por lo cual, se debe hallar la correccion al 1; y resulta ser  $-1,66$ ; la cual, agregada al 1, da  $-0,66$ .

Ahora deberíamos tomar por *tercer número supuesto* este valor; pero como es negativo, y los logaritmos de los números negativos son imaginarios, no se puede continuar. Por lo que debemos sacar la misma consecuencia que en el caso 10.º.

Pero, allí hemos visto, que el ser conducidos á tener que tomar logaritmos de cantidades negativas es indicio de que la ecuacion es absurda por el valor que se dió á la cantidad  $a$ ; y lo mismo

una en una, darán  $10 = \frac{10 \times 1}{1}$  combinaciones. Si se

quieren combinar de dos en dos,

la *a* da las . . . . nueve, *ab*, *ac*, *ad* . . . *aj*.

la *b* daría otras nueve, *ba*, *bc*, *bd* . . . *bj*.

y cada una daría nueve; de modo que el número total será  $10 \times 9$ ; pero como *ab* y *ba*, no dan mas de

sucede aquí; pues esta ecuacion no difiere de la del caso 10.<sup>o</sup>.

En efecto, haciendo  $\frac{1}{x} = z$ , se tiene  $\sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{z}$ ;

por consiguiente  $\sqrt{z} = a$ , que tiene la misma forma que la del caso 10.<sup>o</sup>.

Ahora bien, allí hemos visto que  $\sqrt{x}$  no puede llegar á valer 1,5; luego *a* no podrá tener el valor de 10 que le he-

mos supuesto; luego la ecuacion  $\sqrt{\frac{1}{x}} = 10$ , ó  $\sqrt{z} = 10$

es absurda, y pues que el método nos lo da á conocer, tiene las circunstancias mas apreciables.

Pero, allí hemos resuelto tres casos, á saber: cuando  $a=1,4142$ ; cuando  $a=1,4423$ ; y cuando  $a=1,3204693$ .

En el primer valor, esto es, cuando  $\sqrt{x}=1,4142$  ó cuando  $\sqrt{z}=1,4142$  pues la letra con que se designa la incógnita es indiferente, solo hemos obtenido para *x* ó para *z* un valor, que es  $x=2$ .

En el segundo valor de *a*, esto es, cuando  $\sqrt{x}=1,4423$  satisfacen á esta ecuacion dos números, á saber: 2,480388 muy aproximadamente; y el 3 con toda exactitud.

En el tercer valor de *a*, esto es, cuando  $\sqrt{x}=1,3204693$ , ó pues que la letra con que se señala la incógnita es indiferente, la ecuacion  $\sqrt{z}=1,3204693$  tiene *z* dos valores que satisfa-

una combinacion, y cada una se repetirá tambien dos veces, el número de combinaciones diferentes será

$$\frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

Si las mismas letras se quieren combinar de tres en tres, cada dos darían ocho diferentes, cuyo total sería  $10 \times 9 \times 8$ ; pero como cada seis no formarán mas de una

cen á ella, que son:  $x=1,5301372$  muy aproximadamente; y 7 con toda exactitud. Y como si en vez de  $x$ , se sustituye su va-

lor  $\frac{1}{x}$ , tendrémos que la ecuacion  $\sqrt[\frac{1}{x}]{\frac{1}{x}} = 1,4423$ ,

quedará satisfecha en dos circunstancias, á saber: cuando

$\frac{1}{x} = 2,480388$ , que da  $x = \frac{1}{2,480388} = 0,4031628$ , y

cuando  $\frac{1}{x} = 3$ , que da  $x = \frac{1}{3} = 0,3333333$  etc.

La ecuacion  $\sqrt[\frac{1}{x}]{\frac{1}{x}} = 1,3204693$  queda satisfecha tam-

bien en dos circunstancias, á saber: cuando  $\frac{1}{x} = 1,5301372$ ,

que da  $x = \frac{1}{1,5301372} = 0,6535361$ ; y cuando  $\frac{1}{x} = 7$ ;

que da  $x = \frac{1}{7} = 0,142857142857142857$  etc.

Pasemos ahora al caso  $14^{\circ}$ , que es  $x^{\frac{1}{x}} = a$ , que da

$$\frac{1}{x} \log x = \log a \quad \text{ó} \quad x \log a - \log x = 0; \quad \text{ó si } a \text{ es igual con } 10, \\ \log x - x = 0.$$

Suponiendo  $x=1$ , el error es  $-1$ .

Suponiendo  $x=2$  el error es  $-1,69897$ , y se halla  $-1,4$  para la correccion al 1; que, agregándosela, da  $-0,4$ .

Ahora deberíamos tomar por tercer número supuesto  $-0,4$

combinacion diferente, se deberá partir dicho número por  $2 \times 3$ , y dará  $\frac{10 \times 9 \times 8}{2 \times 3} = 120$ .

Del mismo modo se sacará que de cuatro en cuatro darán  $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{2 \times 3 \times 4} = 210$ , y así sucesivamente.

Cor. Luego el jugador de lotería, que acertase los cinco extractos, puede ganar

$$\frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ ambos; y } \frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 3} = 10 \text{ ternos.}$$

y tropezábamos con la dificultad de que los logaritmos de las cantidades negativas son imaginarios.

Lo cual proviene sin duda de ser absurda la ecuacion, por haber dado á  $a$  un valor no adecuado.

15.º  $\left(\frac{1}{x}\right)^x = a$ ; que da  $x \log \frac{1}{x} = \log a$ ; si hacemos

$a=10$ ; y se tiene presente (207..2.º) que

$\log \frac{1}{x} = \log 1 - \log x = 0 - \log x$ , se tendrá  $-x \log x = 1$ , ó

$1 + x \log x = 0$  ecuacion, que es la misma que la (G) á que nos condujo el caso 13.º.

16.º  $\sqrt[\frac{1}{x}]{x} = a$ , ó  $x^{\frac{1}{x}} = a$  ó  $x^x = a$ ; que es el mismo caso 8.º.

17.º  $\sqrt[x]{\frac{1}{x}} = a$ , da  $\frac{1}{x} = a^x$ ; ó  $\log \left(\frac{1}{x}\right) = x \log a$ ; ó

$-\log x = x \log a$  ó  $x \log a + \log x = 0$ ; que, si  $a=10$ , se convierte en  $x + \log x = 0$ ; que es la misma que la (ec. F) del caso 12.º.

*Proposiciones importantes acerca de las cantidades constantes  
y variables, y de los limites.*

227. Teor. Si una cantidad variable  $X$ , al paso que crece, se acerca á la constante  $B$ , la constante  $B$  será mayor que la variable  $X$ .

*Dem.* Si no es  $B > X$ , será  $B = X$ , ó  $B < X$ . No puede ser  $B = X$ , porque entónces, si  $X$  crece, se separa del valor de  $B$ ; y si vuelve á crecer, se volverá á separar mas; y á cada paso que vaya creciendo, se irá separando del valor de  $B$ ; lo cual no cumple con la circunstancia del teorema, que es aproximarse  $X$  á  $B$  al tiempo que crece; luego, no puede ser  $B = X$ .

Tampoco puede ser menor; pues si  $B < X$ , al paso que  $X$  crezca, se diferenciará mas de  $B$ ; y por lo mismo no cumple con la circunstancia de que  $X$ , al crecer, se acerque á  $B$ ; por lo que no puede ser  $B < X$ ; luego si  $B$  no puede ser igual ni menor que  $X$ , será  $B > X$ , que era L. Q. D. D.

228. Teor. Si una cantidad variable  $X$ , al paso que mengua; se acerca á la constante  $B$ , esta  $B$  será menor que  $X$ .

*Dem.* En efecto, si no es  $B < X$ , será igual ó mayor. Si es  $B = X$ , y  $X$  mengua, se diferenciará de  $B$ ; y si vuelve á menguar, se diferenciará mas; y al paso que vaya menguando, se irá diferenciando mas de  $B$ ; lo que no puede ser, pues la condicion del teorema exige que se vaya aproximando.

Tampoco puede ser  $B > X$ ; pues al paso que  $X$  mengüe, se irá diferenciando mas de  $B$ , que tampoco cumple con lo enunciado. Luego si  $B$  no puede ser igual ni mayor que  $X$ , será  $B < X$ , que es L. Q. D. D.

229. Teor. Si dadas dos cantidades desiguales, de la mayor se quita la mitad, y de lo que quède la mitad, y así sucesivamente, se llegará á un resultado que será menor que la otra cantidad, por pequeña que sea.

*Espl.* Sean  $B$  y  $K$  estas dos cantidades (esto es,  $B$  tan grande y  $K$  tan pequeña como se quiera); digo que si de la mayor  $B$  se quita la mitad, y de lo que quede la mitad, y así sucesivamente, llegaré á tener un residuo menor que la otra cantidad  $K$ , por pequeña que esta sea.

*Dem.* Multiplíquese  $K$  por un número  $n$ , tal que el pro-

ducto  $nK$  sea mayor que  $B$ , y al mismo tiempo sea el múltiplo mayor mas aproximado al valor de  $B$ ; y en este caso será  $B < nK$ .

Ahora, si estas cantidades son desiguales, tambien tendrán

desiguales sus mitades, y será  $\frac{B}{2} < \frac{nK}{2}$ ; pero si en vez de to-

mar la mitad de  $nK$ , se quita solamente  $K$  (que será igual con la mitad de  $nK$  sólo cuando  $n=2$ , y en todos los demas casos será menor que la mitad de  $nK$ ), con mayor razon quedarán desiguales; luego  $\frac{1}{2}B < nK - K = (n-1)K$ .

Si de estas cantidades desiguales quitamos la mitad, tambien quedarán desiguales, y si de la mayor quitamos ménos de la mitad (como será quitar  $K$  en el caso de que  $(n-1)$  sea mayor que 2), con mas razon quedarán desiguales, y se tendrá

$$\frac{1}{4}B < (n-2)K;$$

y como siguiendo quitando á la menor la mitad, y á la mayor la cantidad  $K$  (que solo será igual con la mitad en el caso de que el múltiplo que reste de  $K$  sea el duplo), los resultados quedarán siempre desiguales; tendrémos que, al haber hecho un número de divisiones y restas, espresado por  $n-1$ , los resultados

$$\frac{B}{2^{n-1}}; \text{ y } nK - (n-1)K = K,$$

quedarán aun désiguales, esto es  $\frac{B}{2^{n-1}} < K$ , luego  $K$

será mayor que el residuo que nos quede de haber quitado á  $B$  la mitad, y á lo que quede la mitad, etc. que es L. Q. D. D.

*Cor. 1º* De aquí resulta, que si de dos cantidades desiguales, de la mayor se quita mas de la mitad, y de lo que quede mas de la mitad, y así sucesivamente, con mas razon podemos asegurar que lo que resulte, podrá llegar á ser menor que una cantidad dada, por pequeña que sea.

*Cor. 2º* Tambien resulta que podemos concebir á toda variable un valor menor que cualquiera otra cantidad dada, por pequeña que sea.

Porque se puede suponer que la ley de su variacion sea el irse haciendo sucesivamente dos veces ó mas de dos veces menor.

*Cor. 3º* Y como un producto (61, 3.º) disminuye al paso que mengua uno cualquiera de sus factores, cuando se quiera hacerle menor que cualquier cantidad dada, bas-

ta hacer á uno de los factores sucesivamente dos veces ó mas de dos veces menor.

230 Teor. Si la variable  $X$  se puede acercar á un mismo tiempo (creciendo ó menguando) tanto como se quiera á dos constantes  $A, B$ , dichas constantes serán iguales.

Dem. Si no es  $A=B$ , será  $A=B+K$ ; y entonces acercándose  $X$  á  $A$  tanto como se quiera, no se podrá acercar á  $B$  al mismo tiempo, pues se acercaría á  $B+K$ , y lo impediría la cantidad  $K$ ; y como por el supuesto se puede  $X$  acercar á  $A$  y  $B$  á un mismo tiempo tanto como se desée, resulta que no puede haber ninguna diferencia entre ellas; luego serán iguales. L. Q. D. D.

231 Teor. Si dos variables  $X, Z$ , creciendo ó menguando, se pueden acercar tanto como se quiera á dos constantes  $A, B$ , la relacion de las constantes será la misma que la de las variables, y se tendrá  $A:B::X:Z$ .

Espl. Esta proposicion tiene dos partes, á saber: cuando las variables crecen, y cuando menguan, ó lo que es lo mismo: primero cuando  $A>X, B>Z$ ; y segundo, cuando  $A<X, B<Z$ .

Dem. 1.º Si no se verifica que  $A:B::X:Z$ , será  $A:B>X:Z$ , ó  $A:B<X:Z$ .

Si  $A:B>X:Z$ ; podremos hacer que crezca el antecedente  $X$  de la segunda razon lo suficiente, para que esta resulte igual con la primera; y suponiendo que sea  $X'$  dicho antecedente, se tendrá  $A:B::X':Z$  (m), siendo  $X'>X$ ; pero, por pequeña que sea la diferencia  $X'-X$ , todavía por el supuesto puede ser menor la diferencia  $A-X$ ; luego será  $A-X<X'-X$ ;

y como estas dos diferencias, desiguales, tienen el mismo consecuente, el antecedente de la primera (171 cor.) será menor que el de la segunda, y se tendrá  $A<X'$ .

Comparando estas dos cantidades con una misma  $B$ , cuando se compare la menor se tendrá (171 cor.) menor razon, y será  $A:B<X':B$ ; pero (prop. m)  $A:B::X':Z$ ; luego, sustituyendo esta segunda razon en vez de la primera, se tendrá  $X':Z<X':B$ ; y como estas dos razones tienen un mismo antecedente, la menor tendrá (171 cor.) mayor consecuente, ó lo que es lo mismo, será  $Z>B$ , que es contra el supuesto; luego no puede ser  $A:B>X:Z$ .

Tampoco puede ser menor; porque si  $A:B<X:Z$ , podremos hacer que crezca el consecuente  $Z$  de la segunda razon,

para que mengüe esta y resulte igual con la primera; y representándole por  $Z'$ , se tendrá

$$A:B::X:Z' \quad (n) \quad \text{y} \quad Z' > Z;$$

pero, por pequeña que sea la diferencia  $Z'-Z$ , puede ser aun menor la  $B-Z$  por el supuesto; luego será  $B-Z < Z'-Z$ , lo que da  $B < Z'$ .

Comparando ahora la cantidad  $A$  con estas dos, cuando se compare con la menor  $B$ , se tendrá mayor razon, esto es,

$$A:B > A:Z'; \quad \text{pero (prop. n)} \quad A:B::X:Z';$$

luego substituyendo se tendrá  $X:Z' > A:Z'$ ; y como estas dos razones tienen un mismo consecuente, la mayor tendrá mayor antecedente, y dará  $X > A$ , que tambien es contra el supuesto; luego si no puede ser  $A:B >$  ni  $< X:Z$ , será  $A:B::X:Z$ , que era L. 1.º Q. D. D.

2.º En el caso de  $A < X$  y  $B < Z$ , tendríamos que si no fuese  $A:B::X:Z$ , sería  $A:B >$  ó  $< X:Z$ .

Supongamos en primer lugar que  $A:B > X:Z$ , en cuyo caso se hará  $A:B::X:Z'$  (o), siendo  $Z' < Z$ ; y discurrendo como ántes, sacaremos  $Z-B < Z-Z'$ ; de donde (171 cor.) sale  $B > Z'$ ; comparando ahora la  $A$  con estas dos cantidades, dará  $A:B < A:Z'$ , y en virtud de la (prop. o), será  $X:Z' < A:Z'$ , que (171 cor.) da  $X < A$ , que es contra el supuesto; luego no puede ser  $A:B > X:Z$ .

Tampoco puede ser menor; porque si  $A:B < X:Z$ ; se podrá hacer  $A:B::X':Z$  (p), siendo  $X' < X$ ; y siguiendo el raciocinio del caso anterior, se deducirá que  $X-A < X-X'$ , lo que nos dará  $A > X'$ ; y comparando con una misma cantidad  $B$ , se tendrá  $A:B > X':B$ , ó (prop. p)  $X':Z > X':B$ , de donde resulta  $Z < B$ , que tambien es contra el supuesto; luego si no puede ser  $A:B >$  ni  $< X:Z$ , será  $A:B::X:Z$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* De aquí resulta, que si la segunda razon fuese de igualdad, la primera tambien lo sería; ó lo que es lo mismo, si las variaciones de  $X$  y  $Z$  fuesen tales que en todos los casos se tuviese  $X=Z$ , se tendría  $A=B$ , ó las constantes serían iguales.

*Esc.* 1.º El caso de  $A > X$  y  $B < Z$  no tiene lugar; porque cuatro cantidades de esta especie, comparadas ordenadamente, jamás pueden formar proporcion.

*Esc.* 2.º Los principiantes deben procurar familiarizarse mucho con el lenguaje de la demostracion anterior; pues en lo sucesivo solo pondrémos las des-

proporciones y consecuencias que de ellas resulten.

*Esc. 3.º* Si dos cantidades variables  $X, Z$ , se pueden acercar á un mismo tiempo respectivamente á dos constantes  $A$  y  $B$ , tanto como se quiera, el producto  $X.Z$  de las dos primeras se podrá acercar tanto como se quiera al producto  $A.B$  de las dos últimas (\*).

*Espl.* Esta proposición comprende tres casos: 1.º cuando  $X < A$ , y  $Z < B$ ; 2.º cuando  $X > A$ , y  $Z > B$ ; y 3.º cuando  $X > A$ , y  $Z < B$ , ó al contrario  $X < A$ , y  $Z > B$ : voy á demostrar, que en todos estos casos se tendrá que la diferencia entre los productos  $A.B$  y  $X.Z$  podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que pueda ser esta cantidad.

(\*) Como esta proposición se ha tomado por evidente, no siéndolo en realidad, haré aquí algunas reflexiones que me parecen de importancia.

Tanto por los prólogos de mis obras, como por todos aquellos parages de ellas, en que se habla de los axiomas, he manifestado constantemente lo mucho que se ha abusado de ellos, con perjuicio notable de la instrucción, y son bien notorios también mis no interrumpidos esfuerzos para demostrarlos, sin tomar como verdaderos axiomas, sino aquellos que en efecto lo son, y están reconocidos como tales por los mejores Metafísicos; y son únicamente los que resultan del principio de identidad, de que *una cosa es igual á ella misma*. Pero, cuando yo me lisonjaba de no haber incurrido en la falta de haber tomado por axioma ninguna otra proposición, que careciese de dicha circunstancia, y de que había demostrado todas aquellas que se han tomado y se toman aun como evidentes por los Matemáticos, y que según mi modo de ver, y el de los más famosos Metafísicos no lo son, advertí que la demostración de la proposición del texto en la primera edición no tenía el grado de evidencia que correspondía; por lo cual, la he variado en los términos que la presento sin hueco alguno; y he referido á ella las proposiciones en que se demuestra (418) que la diferencia entre la superficie de la pirámide inscrita en el cono, y la de la circunscrita puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; y (451) que la diferencia entre la superficie del cuerpo circunscrito y la del cuerpo inscrito en una esfera, es menor que cualquier cantidad dada; y también el que á toda esfera (454) se le puede inscribir y circunscribir dos cuerpos, tales, que la diferencia entre sus volúmenes sea menor que cualquier cantidad dada. Con lo cual, quedan demostradas estas tres proposiciones con todo el rigor geométrico, y que por los métodos con que se han demostrado hasta el día se hallan sin apoyo alguno.

Esto nos da á conocer lo muy circunspectos que debemos ser en tomar por conocidas, cosas que no lo son, y aun en hacer ciertas hipótesis aventuradas, que después se reconocen inexactas: así es, que ahora se acaba de demostrar por los importantes trabajos de MM. Poisson y Cauchy, que es falsa la suposición que hizo Lagrange, de que, en la *oscilación de las ondas*, el movimiento solo se extendía á capas muy cerca de la superficie: y del mismo modo se echará de ver que en algunos otros puntos se hacen hipótesis arbitrarias ó se viene á suponer lo mismo que se busca. También se comprueba esto con lo espuesto (§ 197 j).

*Dem.* 1.º Supongamos que  $X < A$ ,  $Z < B$ ; y que en un estado cualquiera de la cuestion sea  $\alpha$ , el exceso de  $A$  sobre  $X$ , y  $\varepsilon$  el de  $B$  sobre  $Z$ : lo cual nos dará

$$A = X + \alpha \quad (1), \quad B = Z + \varepsilon \quad (2).$$

Multiplicando estas ecuaciones, y pasando el primer término  $XZ$  del segundo miembro al primero, se tiene

$$A.B - X.Z = \alpha.Z + \varepsilon.X + \alpha\varepsilon \quad (3).$$

Y todo está reducido á probar que, por la naturaleza de la cuestion, el segundo miembro de esta ecuacion puede llegar á ser tan pequeño como se quiera.

No se puede tomar por evidente el que, pudiendo disminuir  $\alpha$  y  $\varepsilon$  todo lo que se desée, cada uno de los términos, de que se compone dicha expresion, disminuirá lo que se quiera; pues, aunque es cierto que  $\alpha$  y  $\varepsilon$  pueden disminuir indefinidamente por la naturaleza de la cuestion, resulta que en el mismo caso aumentan  $X$  y  $Z$ , por la dependencia que tienen en virtud de la relacion que espresan las ecuaciones (1 y 2); luego los dos primeros términos son de tal naturaleza que, cuando uno de los factores disminuye, aumenta el otro, y por consiguiente nada se puede establecer, en general, acerca de su decremento ó incremento: por lo cual, es indispensable manifestar, que por las condiciones que se prefijian, se ha de llegar á verificar que la diferencia que espresa la (ec. 3) podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; que es lo que voy á ejecutar, fundándome en la proposicion demostrada (229).

Con este objeto, observaré, que, pues  $X$ , siendo variable, se puede acercar á  $A$  tanto como se quiera, y lo mismo  $Z$  á  $B$ , se podrá suponer, que la variacion que sobrevenga á  $X$ , despues del estado que suponen las (ecs. 1 y 2), sea el de convertirse  $X$  en  $X'$ , de modo que le falte  $\frac{1}{4}\alpha$  para convertirse en  $A$ , y que sucediendo una cosa análoga á  $Z$ , se tenga

$$A = X' + \frac{1}{4}\alpha \quad (4), \quad B = Z' + \frac{1}{4}\varepsilon \quad (5).$$

Formando el producto, y pasando el término  $X'.Z'$  al primer miembro, se tendrá

$$A.B - X'.Z' = \frac{1}{4}\alpha.Z' + \frac{1}{4}\varepsilon.X' + \frac{1}{16}\alpha\varepsilon \quad (6).$$

Igualando los dos valores de  $A$ , (ecs. 1 y 4), y los dos de  $B$  (ecs. 2 y 5), se tiene

$$X + \alpha = X' + \frac{1}{4}\alpha \quad (7), \quad Z + \varepsilon = Z' + \frac{1}{4}\varepsilon \quad (8),$$

que dan  $X' = X + \frac{3}{4}\alpha \quad (9), \quad Z' = Z + \frac{3}{4}\varepsilon \quad (10).$

Sustituyendo estos valores en el segundo miembro de la (ec. 6) resulta

$$A.B - X'.Z' = \frac{1}{4}\alpha.Z + \frac{1}{4}\varepsilon.X + \frac{7}{16}\alpha\varepsilon \quad (11).$$

Comparando el segundo miembro de esta expresion con el de

la (ec. 3), resulta que el primer término  $\frac{1}{4}\alpha Z$  de esta siendo la cuarta parte del primero  $\alpha Z$  de aquella es mas de dos veces menor que él; lo mismo sucede al  $\frac{1}{4}\epsilon X$  respecto del  $\epsilon X$ ; y como tambien se verifica, que  $\frac{7}{16}\alpha\epsilon$  es mas de dos veces menor que el tercer término  $\alpha\epsilon$  de la expresion (3), resulta que cada uno de los tres términos del segundo miembro de la (ec. 11) es mas de dos veces menor que su correspondiente en la (ec. 3); y por consiguiente todo el segundo miembro de la (ec. 11) será mas de dos veces menor que todo el segundo miembro de la (ec. 3); y como lo mismo debe suceder á los primeros miembros, tendremos que  $A.B - X'.Z'$  es mas de dos veces menor que  $A.B - X.Z$ ; y como ratiocinando del mismo modo, obtendríamos expresiones  $A.B - X''.Z''$ ,  $A.B - X'''.Z'''$  etc. que á cada paso fuesen siendo cada una mas de dos veces menor, resulta que, al cabo de cierto tiempo (229 cor. 1.<sup>o</sup>), se llegará á tener una que sea menor que cualquier cantidad dada; que era L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

2.<sup>o</sup> Supongamos ahora que sea  $X > A$ ,  $Z > B$ ; voy á demostrar que tambien se verifica, que la diferencia entre el producto  $X.Z$  y  $A.B$ , podrá ser menor que cualquier cantidad dada.

En efecto, supongamos que en un estado cualquiera de la cuestion, se tenga  $X = A + \alpha$  (12), y  $Z = B + \epsilon$  (13); formando el producto, y pasando al primer miembro el término  $A.B$ , será  $X.Z - A.B = \alpha B + \epsilon A + \alpha\epsilon$  (14).

Aquí ya la demostracion es mas sencilla; pues como  $A$  y  $B$ , son constantes, suponiendo que  $\alpha$  y  $\epsilon$  se hagan solo dos veces menores, los términos  $\alpha B$  y  $\epsilon A$  se hacen cada uno dos veces menor; y como el  $\alpha\epsilon$  se hará en este mismo caso cuatro veces menor, queda demostrado, que el segundo miembro de la (ec. 14) se hace mas de dos veces menor; luego al cabo de cierto tiempo, (229 cor. 1.<sup>o</sup>), llegará á ser menor que cualquier cantidad dada, que era L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

3.<sup>o</sup> Supongamos ahora que  $X < A$ , y  $Z > B$ ; y tendremos por ejemplo  $A = X + \alpha$  (15); y  $B = Z - \epsilon$  (16); lo que nos dará  $A.B - X.Z = \alpha Z - \epsilon X - \alpha\epsilon$  (17).

Aquí no se puede asegurar nada en general sobre sí el producto  $A.B$  será mayor ó menor que  $X.Z$ ; pero lo que sí sabemos es que dicho segundo miembro, ha de ser menor que el segundo de la (ec. 3) que consta de los mismos términos, pero todos positivos; y como hemos demostrado (1.<sup>o</sup>) que el segundo miembro de la (ec. 3) puede llegar á ser menor que cualquier

cantidad dada, con mas razon lo podrá llegar á ser el de la (ec. 17), que es menor; y como lo mismo demostraríamos del caso en que  $A < X$  y  $B > Z$ , resulta L. 3.º Q. D. D.

*Esc. 4.º* Hemos supuesto en la proposicion anterior, que  $A$  y  $B$  eran cantidades constantes; pero si una de ellas ó las dos fuesen tambien variables, tales que, al variar, se fuesen acercando á los valores de las otras dos, con mas razon se verificaría la proposicion; por lo cual se puede establecer, en general que: *si cuatro cantidades son tales que dos de ellas se pueden acercar respectivamente al valor de las otras dos á un mismo tiempo tanto como se quiera, el producto de las dos primeras se podrá acercar tanto como se desée al producto de las otras dos.*

232 Cuando una cantidad variable se puede acercar á otra constante tanto como se quiera, de manera que la diferencia entre ellas pueda llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, pero sin que jamas puedan llegar á ser iguales, se llama á la constante *límite* de la variable.

En la idéa de límite están comprendidas esencialmente dos: la primera, que la cantidad se pueda acercar al límite tanto como se quiera; y la segunda, que jamas puede llegar á serle igual.

Por esta causa  $A$  y  $B$  (§ 230) son el límite de  $X$ ; y aquella proposicion quiere decir, que *si dos cantidades son límite de una tercera, son iguales entre sí.* Igualmente (§ 231)  $A$  es el límite de  $X$ , y  $B$  el de  $Z$ ; y dicha proposicion quiere decir, que *si dos variables al crecer ó menguar, se acercan respectivamente á sus límites, la relacion de estos es la misma que la de las variables.*

Igualmente, la proposicion del (esc. 3.º § 231) quiere decir, que: *si dos variables se acercan respectivamente á sus límites, el producto de dichas cantidades se acerca tambien al producto de sus límites.*

233 Toda cantidad variable tiene dos límites: uno verdadero que es 0, y otro que es un límite considerado, y se representa por  $\frac{1}{0}$ .

En efecto, si  $x$  es dicha variable, y á cada variacion se va convirtiendo en ser la mitad ó menor que la mitad, al cabo de

cierto tiempo llegará á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea, y por lo mismo la diferencia entre  $x$  y 0 podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada. Por otra parte,  $x$  jamás llegará á ser cero, mientras permanezca cantidad; luego el 0 tiene las dos circunstancias esenciales al límite, y por lo mismo *es el límite de las cantidades que decrecen.*

Ahora, si en la espresion  $\frac{a}{x}$  ó  $\frac{1}{x}$ , la  $x$  va disminuyendo,  $\frac{a}{x}$  ó  $\frac{1}{x}$  irá aumentando; y como  $x$  puede disminuir tanto como se desée, resulta que  $\frac{a}{x}$  ó  $\frac{1}{x}$  podrá

llegar á ser mayor que toda cantidad asignable; pero  $x$ , al disminuir, se va acercando continuamente á su límite 0; luego

la espresion  $\frac{a}{x}$  ó  $\frac{1}{x}$  se irá acercando continuamente á  $\frac{a}{0}$  ó  $\frac{1}{0}$ ; que *es el límite de las cantidades que crecen.*

*Esc.* Este límite no es verdadero, y por eso hemos dicho que solo es un límite considerado; porque no contiene la segunda propiedad del límite; en efecto, no se puede suponer que siendo  $Z$  una variable, que va creciendo, le falta para llegar á ser  $\frac{1}{0}$  la cantidad  $K$ ; porque entónces añadiendo á  $Z$  la  $K$ , debería ser  $Z+K=\frac{1}{0}$ ; y por consiguiente  $\frac{1}{0}$  no podría exceder á  $Z+K$ , que es contra el supuesto de que  $\frac{1}{0}$  puede ser mayor que toda cantidad dada por grande que sea.

234 A la espresion  $\frac{1}{0}$  se le suele dar el nombre de *infinito*, y se señala con este signo  $\infty$ ; de manera que  $\frac{1}{0}$  é  $\infty$  representan una misma cosa.

Puesto que  $\frac{1}{0}=\infty$ , si quitamos el divisor será  $1=\infty\times\infty$ ; y dividiendo por  $\infty$ , será  $\frac{1}{\infty}=0$ ; lo

que suministra otro medio de representar el cero; límite de las cantidades que decrecen.

235 La espresion  $1=\infty\times\infty$  ó  $a=\infty\times\infty$ , da á conocer que *una cantidad cualquiera se puede suponer representada por cero multiplicado por el infinito.*

Si en vez de  $\infty$  ponemos su valor  $\frac{a}{0}$  ó  $\frac{1}{0}$ , será

$a=0 \times \frac{a}{0} = \frac{a \times 0}{0} = \frac{0}{0}$ ; y si en vez de cero sustituimos  $\frac{1}{\infty}$ ,

será  $a=0 \times \infty = \frac{1}{\infty} \times \infty = \frac{\infty}{\infty}$ ; donde se ve, que tam-

bien es símbolo de una cantidad cualquiera la espresion

$$\frac{0}{0} \quad \text{ó} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

236 Todos estos símbolos sirven para indicarnos, cuándo las circunstancias con que tratamos de determinar una cantidad, son insuficientes para este objeto, por convenir á cualquier cantidad en general. V. g. esta cuestion.

*Un hombre, á quien se pregunta cuánto dinero tiene, responde: si al triplo de mi dinero añado 5 duros, tengo dos veces la séptima parte de 21, mas cinco octavas partes de veinticuatro veces mi dinero partido por cinco, ménos un duro. ¿Cuánto dinero tenía?*

*Res.* Llamando  $x$  á dicho número, tendré planteado el problema en la siguiente ecuacion:

$$3x+5=2 \times \frac{21}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{24x}{5} - 1; \quad \text{que practicando lo di-}$$

$$\text{cho (150), tendré} \quad 3x - \frac{5}{8} \times \frac{24x}{5} = \frac{2}{7} \times 21 - 5 - 1, \quad \text{ó}$$

$$x(3 - \frac{5}{8} \times \frac{24}{5}) = \frac{2}{7} \times 21 - 5 - 1,$$

$$\text{que da} \quad x = \frac{\frac{2}{7} \times 21 - 5 - 1}{3 - \frac{5}{8} \times \frac{24}{5}} = \frac{\frac{42}{7} - 5 - 1}{3 - \frac{120}{40}} = \frac{6 - 5 - 1}{3 - 3} = \frac{0}{0}.$$

Lo que manifiesta, que la cantidad  $x$  puede tener un valor cualquiera. Para que no se estrañe este resultado, se ejecutarán las operaciones indicadas en el segundo miembro de la ecuacion, y

$$\text{se tendrá} \quad 3x+5 = \frac{42}{7} + \frac{120}{40}x - 1 = 6 + 3x - 1 = 3x + 5;$$

que quiere decir, que el triplo de dicho número mas cinco es igual con el mismo triplo mas cinco. Y como cualquier cantidad es igual con ella misma, resulta que toda ecuacion en que los dos miembros estén representados por una misma cantidad, no puede servir para determinarla; y por lo mismo el cálculo debe indicar en el último resultado, que cualquier cantidad cumple con la circunstancia exigida.

*Esc.* Esta clase de ecuaciones se llaman *idénticas*; y aunque las espresiones que se reducen á  $\frac{0}{0}$  pueden tener en general un valor cualquiera, hay casos particulares en que no tienen mas de uno solo y determinado, como veremos (II 172).

# GEOMETRÍA.

## PARTE PRIMERA.

### *Nociones preliminares.*

237 **G**EOMETRÍA es la ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la estension, en cuanto terminada ó figurada. De consiguiente, entre todas las propiedades de los cuerpos, que hemos dado á conocer (intr.), la Geometría sólo considera la *estension* y la *figurabilidad*.

Para adquirir una idéa exacta de la estension, se observará que un cuerpo cualquiera, v. g. un libro, en cualquier paraje que esté, ocupa una parte del espacio; y quitado de allí, la parte del espacio se quedará donde estaba, la cual es la *estension* del libro.

Donde se ve, que el objeto de la Geometría no es la estension impenetrable del cuerpo, sinó la parte del espacio que ocupa, en donde se pueden concebir colocados al mismo tiempo otros diferentes cuerpos.

Todo cuerpo es estenso en tres sentidos diferentes, que se llaman *dimensiones*; cada una de estas tiene su nombre particular, relativo al modo con que se considera el cuerpo. Así, la dimension que, al mirar un cuerpo, es la mayor se llama *longitud*; la que constituye lo ancho del cuerpo, se llama *latitud*; y la que constituye el grueso, altura

ó profundidad, se llama *profundidad* ó *grueso*. Así, en el libro (fig. 1) visto de plano, lo que hay desde A á B es la longitud; lo que hay desde B á D la latitud; y lo que hay desde B á G su grueso; pero si se mira el libro de canto, por la parte DFGB, entónces se llamará longitud á la DB, latitud á la BG, y profundidad á la AB, que ántes era la longitud.

238 La estension de un cuerpo se llama tambien *volúmen* ó *cuerpo geométrico*; y aunque para constituirla son indispensables las tres dimensiones, ó por mejor decir, aunque en la estension de todo cuerpo existen simultáneamente las tres dimensiones, sin embargo por medio de la abstraccion podemos prescindir de una, de dos y aun de las tres. Así, prescindiendo del grueso BG, queda sola la estension con las dos dimensiones, longitud AB, y latitud BD, que es lo que se llama *superficie*.

Si en esta prescindimos de la latitud BD, queda la idéa de estension en sola longitud, que se llama *línea*; y si ahora prescindimos de esta longitud, no quedará absolutamente nada de la estension; y á esta idéa que resulta, se le llama *punto matemático*. De modo, que así como para formarnos idéa de la nada ó de cero, es necesario prescindir de toda cantidad, igualmente para formarse una idéa cabal del punto, es necesario prescindir de toda estension; por manera, que *punto matemático*, y *cero* ó *carencia de toda estension*, es una misma cosa.

239 De todo lo dicho resulta: 1.º que *la superficie no tiene nada de grueso, y que es el límite de los cuerpos*; pues para formarnos su idéa prescindimos de él; pero si en vez de prescindir de una vez, suponemos que va disminuyendo poco á poco, el cuerpo se irá acercando á la superficie, sin que jamas pueda confundirse con ella, hasta que el grueso se reduzca á cero, esto es, hasta que no haya cuerpo, que son las dos circunstancias del límite (232).

2.º Que *la línea no tiene nada de grueso ni de ancho, y por lo mismo, es el límite de la superficie*.

3.º Que *el punto no tiene ninguna dimension, y es el límite de la línea, y de toda estension*.

240 La línea se divide en *recta* y *curva*; línea recta es

la que tiene todos sus puntos en una misma direccion (\*) esto es, aquella que está dispuesta de tal manera, que colocándose en uno de sus extremos, quedan ocultos todos sus puntos intermedios, como sucede en las alamedas puestas á cordel, y con los guias de un regimiento cuando están alineados; tales son las que queremos representar por las AB, BD, CD, etc.

Curva es aquella cuyos puntos no están todos en una misma direccion, como las DF, BG, etc.

241 La superficie se divide en plana y curva; se llama plana, aquella cuyos puntos están todos tan altos ó tan salientes los unos como los otros, segun representa la ABCD; y curva, aquella cuyos puntos no están todos tan altos ó tan salientes los unos como los otros, segun manifiesta la CDFE. Ademas, las superficies y líneas curvas, pueden ser cóncavas y convexas: las cuales toman estas denominaciones, segun el aspecto bajo que se miran.

242 La Geometría tiene tres partes: la 1.<sup>a</sup> trata de las líneas; la 2.<sup>a</sup> de las superficies; y la 3.<sup>a</sup> de los volúmenes.

En la 1.<sup>a</sup> parte se supone que todas las líneas están trazadas sobre un plano matemático, que es una superficie plana (241) que concebimos sin límites, y con tal perfeccion cual no existe en la naturaleza; porque, siendo porosos todos los cuerpos, donde hay un poro, existe un hoyo, y en su inmediacion hay eminencias. Por esta causa, en la práctica procuramos elegir, para trazar las líneas, aquel plano físico que mas se aproxime á la superficie plana, cual la hemos descrito (241). De aquí se deduce, que se

(\*) Al dar esta definicion en el párrafo 558 del T. I parte 2.<sup>a</sup> de mi Tratado Elemental, que contiene la Geometría, hemos puesto una nota en que manifestamos la exactitud de esta definicion, é insertamos todas las demas definiciones que se han dado acerca de la línea recta, manifestando los vicios de que adolecen. Ahora tengo la satisfaccion de anunciar que se va adoptando en Europa mi definicion; de lo cual es una prueba nada equívoca el que, en el tomo 2.<sup>o</sup> del Diccionario de Matemáticas, impreso en París en marzo de 1836, por una Sociedad de antiguos discípulos de la Escuela Politécnica, bajo la direccion de A. S. de Montferrier, en el artículo punto, página 357, se dice lo siguiente.

‘Así es, que, fijando al punto su verdadera significacion, podemos definir la línea recta, una línea, cuyos puntos se hallan todos en una misma direccion; y la línea curva, una línea cuya direccion muda continuamente de un punto á otro. Definiciones que caracterizan de un modo exacto la naturaleza esencialmente diferente de estas líneas.’

puede tambien decir, que *plano matemático* es aquel á que se puede aplicar una recta, cual la hemos definido (240), de manera que coincida con él en toda su longitud.

243 *Una recta queda determinada, en fijando dos de sus puntos.* Porque la esencia de la línea recta, es que todos sus puntos estén en una misma direccion; y como en la idea de direccion solo entra la del punto ó parage A (fig. 2), de donde se parte, y la del punto ó sitio B á que uno se dirige, se sigue que los puntos intermedios deben quedar cubiertos por los extremos A y B; y los que se supongan á la izquierda de A le deben cubrir; como igualmente los que se pongan á la derecha de B, deben quedar cubiertos por él. Pero este conocimiento ha provenido solo de los dos puntos A y B; luego *dos puntos determinan la posicion de una recta.*

244 *Un punto no es suficiente;* porque desde un punto O se puede ir á todas partes; y en el mismo punto O pueden concurrir todas las direcciones que se quieran.

Cor. 1.º *Desde un punto A á otro B (fig. 3) no se puede tirar mas de una línea recta,; pero sí infinitas curvas.* Porque si se pudiese tirar mas de una recta, no bastarían dos puntos para fijar su posicion; pero no yendo en línea recta, se podrá ir de A á B por ACB, ó por ADB, ó por AEB etc.

Cor. 2.º *La distancia entre dos puntos se debe medir por una recta;* porque es la única que se puede tirar de su especie.

Cor. 3.º *Dos rectas no pueden encontrarse mas que en un punto;* porque si se encontrasen en dos, se confundirían en una sola; y de consiguiente no habría dos rectas, que es contra el supuesto.

Cor. 4.º *Cuando una recta tiene dos puntos en un plano, toda ella se halla en el mismo plano;* pues si no lo estuviese, concibiendo una recta en dicho plano que pasase por los dos puntos espresados, habría dos rectas diferentes con dos puntos comunes; lo que (cor. 3.º) no puede ser.

245 Por suponerse las rectas tiradas en un mismo plano, y no tener este límites, inferimos que cuando se necesite, se podrán concebir prolongadas ó acortadas las

líneas; y que en siendo rectas, se podrán *superponer*, de manera que se confundan en un todo si son iguales, ó en aquella parte que tengan de comun; y recíprocamente, *si al superponer dos rectas, se confunden sus extremos, se habrán confundido en toda su longitud, y de consiguiente serán iguales.*

*Esc.* Se dice que dos líneas tienen una *comun medida* ó que son *comensurables*, cuando ambas contienen á una tercera de su misma especie un número exacto de veces.

246 Entre la infinidad de curvas, que puede concebir nuestra imaginacion, la Geometría elemental sólo considera la *circunferencia de círculo*, que es una *línea curva reentrante*, cuyos puntos distan todos igualmente de uno que se halla en su mismo plano, y se llama su *centro*: tal es (fig. 4) la *AEBD*, cuyo centro es *C*. El espacio ó superficie que encierra la circunferencia se llama *círculo*. Las rectas *CA, CE*, etc. que desde el centro van á parar á la circunferencia, se llaman *radios*; los cuales son todos iguales por medir (244 cor. 2.º) la distancia de la circunferencia al centro, y ser dicha distancia una misma en todos los puntos.

Toda línea *DCE*, que pasando por el centro termina con sus extremos en la circunferencia, se llama *diámetro*; por consiguiente *el diámetro es igual á dos radios ó al duplo de uno*; y como todos los radios son iguales, *tambien lo serán todos los diámetros.*

*Esc.* Para tirar rectas y describir circunferencias, se emplea la *regla* y el *compas*, cuya construccion y uso se entiende fácilmente con la esplicacion del Profesor.

247 Se llama *arco* una porcion cualquiera de la circunferencia; así, la parte *BFD* es un arco, y la parte *DAEB* es otro arco; toda recta *BD*, que desde un extremo de un arco va á parar al otro, se llama *cuerda* del arco; por manera, que *BD* es cuerda, tanto del arco *BFD* como del *DAEB*; y se llama *sajita* del mismo arco, á la parte *FG* del radio *FC*, interceptada entre el punto medio de dicho arco y la cuerda. Se llama *sector* de círculo, al espacio *CBFD*, comprendido por dos radios y un arco; y se llama *segmento*, al espacio comprendido entre una cuerda y su arco, tal es el *BDF*.

Siempre que se hable de arcos ó cuerdas, se entiende de los menores.

Cuando dos circunferencias  $ABD$ ,  $abd$  (fig. 5), tienen un mismo centro  $C$ , se dice que son *concéntricas*; y cuando tienen diferentes centros, se llaman *escéntricas*.

El espacio  $ABDdba$ , comprendido entre dos circunferencias concéntricas, se llama *corona* ó *ánulo*.

248 Teor. *Dos circunferencias concéntricas no se pueden encontrar sin confundirse en una sola.*

*Dem.* Porque ó sus radios son iguales ó desiguales: si son iguales, todos los puntos de la una se confundirán exactamente con los de la otra, y por lo mismo se habrán confundido en una sola. Si los radios son desiguales, la que tenga menor radio estará toda dentro de la otra, habiendo siempre entre ellas una distancia igual á la diferencia de los radios. Luego dos *circunferencias etc.*

*Cor.* De donde se deduce, que *si dos circunferencias tienen un mismo radio serán iguales; y colocada la una sobre la otra, de manera que se confundan sus centros, se confundirán todas ellas.*

249 Teor. *El diámetro divide al círculo y á la circunferencia en dos partes iguales.*

*Espl.* Sea el círculo  $ABDE$  (fig. 6); digo que si se dobla por el diámetro  $AD$ , la parte  $AED$  caerá exactamente sobre la  $ABD$ ; y habiéndose confundido serán iguales.

*Dem.* Si la parte  $AED$  no cae sobre  $ABD$ , caerá ó por mas arriba ó por mas abajo. Si cayese por mas arriba, y estuviese representada por  $AND$ , tirando la  $NC$ , esta sería un radio del círculo, y por consiguiente igual con  $BC$ , radio tambien del mismo círculo; lo que es absurdo, por ser  $NC$  todo y  $BC$  parte suya; luego no se puede suponer que caiga por mas arriba. Si cae por mas abajo, y se representa por  $AMD$ , tirando la  $MC$ , será un radio del círculo, y por consiguiente igual con  $BC$ , lo que tambien es imposible; luego no puede caer por mas abajo. Luego si no puede caer ni por mas arriba ni por mas abajo, se habrán confundido y serán iguales.  $L. Q. D. D.$

*Esc.* En el plano donde se halla trazado un círculo *no hay ningun punto, dentro ni fuera de la circunferencia que diste del centro una magnitud igual con el radio; ó lo que es lo mismo la circunferencia pasa por todos los pun-*

tos que en el plano donde ella está trazada, distan del centro una magnitud igual con el radio.

Porque si supusiéramos que  $N$  ó  $M$  distaban del centro una magnitud igual con el radio, se tendría  $NC=BC$ , ó  $MC=BC$ ; lo que es absurdo.

250 Cuando dos líneas  $AB$ ,  $AC$  (fig. 7) se encuentran en un punto  $A$ , se llama *ángulo* á la abertura ó inclinacion que tienen entre sí; el punto  $A$  donde se encuentran, se llama *vértice*; y se llaman *lados* las dos líneas  $AB$ ,  $AC$ , que le forman.

Cuando un ángulo está solo, se enuncia nombrando la letra del vértice; pero cuando en un mismo punto se forman varios ángulos, se leen las tres letras, pronunciando siempre en medio la del vértice: así, el de la (fig. 7) se leerá  $BAC$  ó  $CAB$ .

Es mas sencillo aun poner una letra minúscula dentro, y pronunciarla sola; así el mismo ángulo se leerá con mas sencillez *el ángulo n*.

Si se prolonga la  $CA$  hasta  $D$ , la  $AB$  formará con la parte prolongada  $AD$  el ángulo  $BAD$  ó  $m$ , cuyos dos ángulos  $BAC$ ,  $BAD$  ó  $n$ ,  $m$ , se llaman *ángulos contiguos ó adyacentes*.

Como, ya se prolonguen ó acorten las rectas  $AB$ ,  $AC$ , su direccion no se altera (245), resulta que la inclinacion que tienen entre sí no varía; por lo que *la cantidad de un ángulo no pende de la longitud de sus lados sino de su inclinacion*.

Cuando los lados del ángulo son líneas rectas, se llama *rectilíneo* ó *ángulo plano*; cuando curvas *curvilíneo*, como  $DAC$  (fig. 3); y cuando uno de los lados es una línea recta, y el otro una curva, se llama *mistilíneo*, tal es el  $CAB$ .

251 Teor. *Dos ángulos iguales se pueden superponer de modo que se confundan.*

*Espl.* Si el ángulo  $bac=BAC$  (fig. 8), y se coloca el uno sobre el otro, de manera que el vértice  $a$  caiga sobre el  $A$ , y  $ac$  sobre  $AC$ , digo que  $ab$  caerá sobre  $AB$ , y quedarán confundidos en uno solo.

*Dem.* Si esto no se verifica, la  $ab$  caerá por mas arriba de la  $AB$ , ó por mas abajo. Si cae por mas arriba y toma la di-

reccion AN, se tendrá que  $bac$  estará representado por NAC, ó será igual con él; y como por el supuesto  $bac=BAC$ , será (intr. ax. 5.º)  $NAC=BAC$ , lo que es absurdo; pues NAC es todo y BAC parte suya; luego la  $ab$  no puede caer por más arriba de AB.

Si cae mas abajo, y se representa por AM, se tendrá  $MAC=bac$ ; y como por el supuesto  $BAC=bac$ , será  $MAC=BAC$ ; lo cual siendo también absurdo, por ser MAC parte y BAC todo, manifiesta que no puede caer por mas abajo. Luego se confundirán. L. Q. D. D.

*Esc.* Recíprocamente, si dos ángulos son tales que puesto el uno sobre el otro, se confunden exactamente, serán iguales; pues para formarnos la idea de la igualdad ó desigualdad de dos cosas, siempre recurrimos á la superposicion. Ademas, advertimos que siempre que digamos de dos cosas, que son iguales, han de ser tales que se puedan superponer, como sucede con un duro que se puede superponer á otro duro, y no se ve mas de uno si estan hechos con un mismo cuño; y cuando una cosa valga tanto como otra, pero que puesta la una sobre la otra no se ajusten exactamente, como sucede con un duro y dos medios duros ó cinco pesetas, las llamaremos *equivalentes*.

252 Cuando una recta DC (fig. 9) forma con otra AB los dos ángulos adyacentes DCA, DCB, iguales entre sí, cada uno de dichos ángulos se llama *recto*, y la línea DC *perpendicular* á la AB; de manera, que una recta es perpendicular á otra cuando forma con ella dos ángulos iguales, ó cuando cae sin inclinarse mas hacia un lado que hacia otro.

Todo ángulo BCK, menor que uno recto, se llama *agudo*; todo ángulo ACK, mayor que uno recto, se llama *obtuso*; y se llaman *ángulos opuestos al vértice* los que estando formados por dos rectas que se cruzan, tienen sus vértices opuestos, ó los que los lados del uno son prolongacion de los lados del otro, como AOD y COB (fig. 13), y AOC y DOB.

Toda recta CK (fig. 9) que forma con otra dos ángulos desiguales, se llama *oblicua* respecto de ella.

253 Teor. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

*Espl.* Sea  $DC$  perpendicular á  $AB$ , lo que supone (252) que los ángulos  $DCA$ ,  $DCB$ , son rectos é iguales entre sí; y sea  $HG$  perpendicular á  $EF$ , lo que tambien supone que los ángulos  $HGE$ ,  $HGF$ , son rectos é iguales entre sí; pues voy á demostrar que estos últimos son iguales con los primeros.

*Construccion.* Tómese  $AC=EG$ ,  $CB=GF$ , y se tendrá  $AB=EF$ ; colóquese la  $EF$  sobre la  $AB$ , de modo que se confundan sus estremos, en cuyo caso el punto  $G$ , estremo de  $EG$ , caerá sobre el punto  $C$ , estremo de su igual  $AC$ ; y digo que la línea  $GH$  caerá sobre la  $CD$ .

*Dem.* Porque si esto no se verifica, el lado  $GH$  caerá fuera del  $CD$ ; si suponemos que tenga la direccion  $CK$ , será  $ACK=KCB$ , por ser estos ángulos los que representan á los  $EGH$ ,  $HGF$ , iguales por el supuesto; pero esto es un absurdo, porque siendo tambien por el supuesto  $ACD=DCB$ , no se puede verificar que  $ACK$  que es mayor que  $ACD$ , sea igual con  $KCB$  que es menor que  $DCB$ , ó que su igual  $ACD$ ; luego no se puede suponer que la  $GH$  caiga fuera de la  $CD$ ; luego caerá encima, y se confundirá  $EGH$  con  $ACD$ , y  $HGF$  con  $DCB$ ; luego se tendrá  $EGH=ACD$  y  $FGH=BCD$ ; que era *L. Q. D. D.*

254 Teor. *Los dos ángulos juntos que forma una recta al caer sobre otra, valen dos ángulos rectos.*

*Espl.* Si  $KC$  cae sobre  $AB$  de un modo cualquiera, digo que la suma de los dos ángulos  $ACK$ ,  $KCB$ , contiguos que forma con ella, equivalen á dos rectos.

*Dem.* Concíbase la perpendicular  $CD$ , y tendremos que los dos ángulos  $ACD$ ,  $DCB$  serán rectos; y como  $ACK=ACD+DCK$ , se tendrá  $ACK+KCB=ACD+DCK+KCB$ ; pero  $DCK+KCB$  componen el ángulo recto  $DCB$ , luego resultará  $ACK+KCB=ACD+DCB=2$  rectos  $=\pi$ , que era *L. Q. D. D.*

*Esc.* De aquí en adelante llamaremos  $\pi$  á la suma de dos ángulos rectos, y por consiguiente  $\frac{1}{2}\pi$  al ángulo recto.

*Cor. 1.º* Si uno de los ángulos  $ACK$  ó  $KCB$  es recto, lo será igualmente el otro; porque entre los dos han de valer dos rectos.

*Cor. 2.º* Si una recta  $CD$  (fig. 10) es perpendicular á otra  $AB$ , esta  $AB$  lo será á la primera  $CD$ .

Porque como la  $CD$  es perpendicular á  $AB$ , se tiene  $AEC = CEB$  por rectos; y como de ser el  $AEC$  recto, se deduce que su adyacente  $AED$  tambien lo ha de ser, resulta que la  $AE$  es perpendicular (252) á la  $CD$ .

De ser recto el ángulo  $CEB$ , se deduce que su contiguo  $BED$  lo ha de ser; luego cuando dos perpendiculares se cruzan, forman cuatro ángulos rectos.

Cor. 3.º Todos los ángulos  $ACF, FCD, DCE, ECB$ , que se forman (fig. 11) en un punto, hácia un mismo lado de una recta  $AB$ , valen juntos dos ángulos rectos ó  $\pi$ ; y todos los ángulos  $ACF, FCD, DCE, ECB, BCP, PCN, NCM, MCA$ , que se pueden formar al rededor de un punto  $C$ , no valen mas ni ménos que cuatro rectos ó  $2\pi$ .

255 Un ángulo es suplemento de otro, cuando es lo que le falta para dos rectos; así,  $KCB$  (fig. 9) es suplemento de  $ACK$ , y al contrario. Y un ángulo es complemento de otro, cuando es lo que le falta ó sobra para un recto; así, el ángulo  $KCD$  es complemento de cada uno de los dos  $ACK$  y  $KCB$ : del primero por esceso, y del segundo por defecto. De donde se deduce, que los ángulos que tienen un mismo suplemento ó suplementos iguales, son iguales: y los que tengan un mismo complemento, solo serán iguales cuando los complementos sean ambos por esceso ó por defecto.

256 Teor. Si dos rectas tiradas al extremo de otra forman con ella dos ángulos que juntos valgan dos rectos, dichas dos rectas son una sola y misma recta.

Espl. Sean  $AC$  y  $BC$  (fig. 12) dos rectas tiradas por el extremo  $C$  de la  $CD$ , de modo que  $ACD + DCB = \pi$ ; digo que dichas dos rectas  $AC$  y  $CB$  son una sola y misma recta, ó que la  $CB$  es prolongacion de la  $AC$ .

Dem. Si esto no se verifica, la recta  $AC$  prolongada caerá ó por mas arriba ó por mas abajo de la  $BC$ . Si la prolongacion de  $AC$  fuese la  $CE$ , tendríamos (§ 254)  $ACD + DCE = \pi$ ; y como por el supuesto  $ACD + DCB = \pi$ , será (intr. ax. 5.º)  $ACD + DCE = ACD + DCB$ ; y quitando el ángulo comun  $ACD$ , queda  $DCE = DCB$ : lo que es absurdo, por ser  $DCE$  parte y  $DCB$  todo; luego la  $AC$  prolongada no puede caer por mas arriba de la  $CB$ .

Si dicha prolongacion fuese la CF, se tendría  $ACD+DCF=\pi$ ; y como por el supuesto  $ACD+DCB=\pi$ , sería  $ACD+DCF=ACD+DCB$ , de donde quitando  $ACD$ , quedará  $DCF=DCB$ , que tampoco puede ser; luego si la AC prolongada no puede caer por mas arriba ni por mas abajo de la CB, caera encima, y dichas rectas AC, CB, serán una sola y misma recta. L. Q. D. D.

257 Teor. *Los ángulos opuestos al vértice son iguales.*

*Espl.* Sean las dos rectas AB, CD (fig. 13), que se corten en el punto O; digo que el ángulo  $AOD=COB$ , y que  $DOB=AOC$ .

*Dem.* Si consideramos que la DC cae sobre la AB, será (§ 254)  $AOD+DOB=\pi$ ; y suponiendo que la BA cae sobre la DC, se tendrá  $COB+BOD=\pi$ ; luego (intr. ax. 5.º)  $AOD+DOB=COB+BOD$ ; y quitando el ángulo comun  $DOB$ , quedará  $AOD=COB$ ; del mismo modo se demostrará que  $DOB=AOC$ , que es L. Q. D. D.

258 Se llama *triángulo rectilíneo*, ó simplemente triángulo, el espacio cerrado por tres líneas rectas, que se llaman *lados del triángulo*.

Los triángulos, con relacion á sus lados, se dividen en *equiláteros*, *isósceles* y *escalenos*; y con relacion á sus ángulos, en *rectángulos* y *oblicuángulos*. Triángulo equilátero es el que tiene sus tres lados iguales, como ABC (fig. 14); isósceles el que tiene dos lados iguales, como ABC (fig. 15); y escaleno el que tiene sus tres lados desiguales entre sí; como ACB, (fig. 16). Es rectángulo un triángulo cuando tiene un ángulo recto, como ACB (fig. 17); y es oblicuángulo cuando no tiene ningun ángulo recto. Este se llama *obtusángulo*, cuando tiene un ángulo obtuso, como ACB (fig. 16); y *acutángulo*, cuando sus tres ángulos son agudos, como AEC (fig. 14).

En el triángulo rectángulo, el lado AB (fig. 17) opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*; y los otros dos lados AC, BC, *catetos*.

En general, se llama *base* de un triángulo al lado sobre que se considera insistiendo; pero cuando el triángulo es isósceles, se llama *base* el lado que no es igual con ninguno de los otros. La recta que se baja perpendicularmente á la base ó á su prolongacion, desde el ángulo opuesto, se llama *altura*; así las rectas AC son las ba-

ses en las (figs. 15 y 16), y las  $BD$  las alturas; cuando en un triángulo rectángulo (fig. 17) se considera por base un cateto  $AC$ , la altura es el otro cateto  $BC$ .

259 Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando los tres lados del uno son iguales respectivamente á los tres lados del otro, esto es, cada uno al suyo.*

*Espl.* Sean los dos triángulos  $ABC, abc$  (fig. 18), en que se supone  $AB=ab$ ,  $AC=ac$  y  $BC=bc$ ; digo que sus tres ángulos tambien son iguales; esto es,  
 $A=a$ ,  $B=b$  y  $C=c$ .

*Constr.* Haciendo centro en  $A$  con un radio  $AC=ac$ , trácese el arco  $mn$ ; y haciendo centro en  $B$  con  $BC=bc$  trácese el arco  $op$ .

*Dem.* Concíbase superpuesto el triángulo  $abc$  sobre el  $ABC$ , de manera que el lado  $ab$  se confunda con  $AB$ : en lo cual no habrá dificultad (245) por ser  $AB=ab$ ; con lo cual el punto  $c$  extremo de  $ac=AC$ , caerá en algun punto (249 esc.) del arco  $mn$ ; y por ser  $bc=BC$ , el extremo  $c$  del lado  $bc$  caerá tambien en algun punto del arco  $op$ ; pero los dos lados  $ac, bc$ , tienen su extremo en el punto comun  $c$ , luego este mismo punto será comun á los dos arcos  $mn, op$ ; luego será su punto de interseccion; pero su punto de interseccion se halla en  $C$ , punto donde se encuentran los lados  $AC$  y  $BC$  del triángulo  $ABC$ ; luego el punto  $c$ , extremo del lado  $ac$ , se habrá confundido con  $C$  extremo de  $AC$ ; y como el punto  $a$  se había confundido con  $A$ , resulta (245) que todo el lado  $ac$  se habrá confundido con  $AC$ ; por la misma razon el lado  $bc$  se habrá confundido con  $BC$ ; y habiéndose confundido sus tres lados, se habrán confundido tambien sus tres ángulos (251 esc.); es decir, que se tendrá  $A=a$ ,  $B=b$ ,  $C=c$ , que era L. Q. D. D.

*Esc.* Se debe advertir que los ángulos que resultan iguales, son los que en cada triángulo se oponen á los lados iguales.

260 Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un ángulo igual, formado por dos lados, que en el un triángulo son respectivamente iguales á los lados del otro triángulo.*

*Espl.* Sean  $ABC, abc$  dos triángulos, en que se tenga  $AB=ab$ ,  $AC=ac$ , y el ángulo en  $A=$  al en  $a$ ; digo que dichos triángulos son iguales.

*Dem.* Concíbase superpuesto el triángulo  $abc$  sobre el  $ABC$

de manera que el vértice  $a$  caiga sobre  $A$ , y el lado  $ab$  sobre  $AB$ , con lo que el lado  $ac$  caerá (251) sobre  $AC$ . Ahora, por ser  $ab=AB$  y partir estas rectas desde un mismo punto  $A$ , el punto  $b$  caerá sobre  $B$ ; y por la misma razon el punto  $c$  caerá sobre  $C$ . Pero  $b$  y  $c$  no solo son extremos de  $ab$  y de  $ac$ , sino que lo son tambien del lado  $bc$ ; luego se han confundido los extremos del lado  $bc$  con los del  $BC$ ; luego (245) todo el lado  $bc$  ha coincidido con el  $BC$ ; y habiéndose confundido sus tres lados, serán iguales dichos triángulos. L. Q. D. D.

261 Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual á un lado, adyacente á dos ángulos iguales.*

*Espl.* Sean los dos triángulos  $ABC, abc$ , en que se supone el ángulo  $A=a$ , el  $B=b$ , y el lado  $AB$ , adyacente á los ángulos  $A, B$  del primero, igual al  $ab$  del segundo; digo que estos triángulos son iguales.

*Dem.* Concibase superpuesto el triángulo  $abc$  sobre el  $ABC$ , de manera que el lado  $ab$  caiga sobre  $AB$ , lo cual se puede hacer, porque  $ab=AB$ ; hecho esto, el lado  $bc$  tomará (251) la direccion del lado  $BC$ , por ser el ángulo  $B=b$ ; y por la misma razon el  $ac$  tomará la direccion del  $AC$ . Ahora, como las rectas  $bc, ac$ , y  $BC, AC$ , se cortaban ántes de superponerse, y la superposicion no altera en nada la naturaleza de los triángulos, resulta que tambien se cortarán despues; y como dos rectas no pueden encontrarse (244 cor. 3.º) mas que en un punto, se sigue, que habiéndose confundido las  $bc, ac$  con las  $BC, AC$ , el punto de interseccion  $c$  de las primeras, se habrá confundido con el punto de interseccion  $C$  de las segundas; luego se ha confundido el triángulo  $abc$  con el triángulo  $ABC$ , y será igual con él. L. Q. D. D.

262 De lo dicho se infiere, que con cualesquiera datos que satisfagan á lo demostrado en los tres teoremas anteriores, se podrá formar un triángulo igual á otro dado; y ademas se podrán resolver estos problemas.

263 1.º *En un punto  $a$  (fig. 19) de una recta  $ab$ , formar un ángulo  $bac$  igual con otro dado  $BAC$ .*

*Res. y Dem.* Haciendo centro en  $a$  con un radio cualquiera  $ap$ , trácese un arco indefinido  $prqs$ ; haciendo centro en  $A$  con el mismo radio, se trazará un arco  $PRQ$ , hasta que encuentre á los lados del ángulo  $CAB$ ; con la cuerda  $PQ$  del arco  $PRQ$ , haciendo centro en  $p$ , se trazará un arco  $ux$ ; por el punto de interseccion  $q$  y por  $a$ , tírese la recta  $aq$ , y

se tendrá el ángulo  $\widehat{cab} = \widehat{CAB}$ . Porque si concebimos las cuerdas  $pq$ ,  $PQ$ , que son iguales por construcción, los triángulos  $AQP$ ,  $aqp$ , serán iguales (259), y por lo mismo el ángulo en  $a =$  al en  $A$ .

264 2.º *Dado un ángulo CAB, dividirle en dos partes iguales.*

*Res. y Dem.* Haciendo centro en  $A$  con un radio cualquiera  $AP$ , trácese entre sus lados un arco  $PRQ$ ; haciendo centro en sus extremos  $P$  y  $Q$ , con un radio cualquiera, trácense dos arcos que se crucen en  $T$ ; por  $A$  y  $T$ , tírese la recta  $AT$ , la cual dividirá el ángulo propuesto en las dos partes iguales  $\widehat{QAT}$ , y  $\widehat{TAP}$ . Porque si se conciben los radios  $PT$ ,  $QT$ , los triángulos  $QAT$ ,  $TAP$ , serán iguales (259).

265 Teor. *En un mismo triángulo, ó en triángulos iguales, á lados iguales se oponen ángulos iguales; ó lo que es lo mismo, en un triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales; y al contrario, si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos también lo serán, ó el triángulo será isósceles.*

*Espl.* Sea en el triángulo  $ABC$  (fig. 15),  $AB = BC$ ; digo que se tendrá el ángulo  $\widehat{ACB} =$  al  $\widehat{BAC}$ ; y si se supone  $\widehat{ACB} = \widehat{BAC}$ , será  $AB = BC$ .

*Dem.* 1.º Por el vértice  $B$  y el punto  $D$ , medio del lado  $AC$ , concíbese tirada la  $DB$ , y resultará que los triángulos  $ADB$ ,  $BDC$  serán iguales (259); luego los ángulos en  $A$  y en  $C$ , opuestos al lado comun  $BD$ , serán iguales. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si los lados  $BC$ ,  $AB$  no son iguales, serán desiguales. Supongamos que  $BA$  sea el mayor; tomando en él una parte  $AE = BC$ , y concibiendo la  $CE$ , los triángulos  $AEC$ ,  $ABC$ , tendrán el lado  $AC$  comun, el lado  $AE = CB$  por construcción, y el ángulo  $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$  por el supuesto; luego (260) serán iguales, lo que es absurdo; porque el  $\widehat{BAC}$  es todo, y el  $\widehat{AEC}$  es su parte; luego si los lados  $BA$  y  $BC$  no pueden ser desiguales, serán iguales. L. 2.º Q. D. D.

*Cor.* Luego el triángulo equilátero es equiángulo y al contrario.

*Esc.* La igualdad de los triángulos  $ABD$ ,  $BDC$ , prueba al mismo tiempo que el ángulo  $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ , y que  $\widehat{BDA} = \widehat{BDC}$ ; de donde se deduce (252) que estos dos últimos son rectos, y por consiguiente, que una recta tirada desde el vértice de un triángulo isósceles al medio

de su base, es perpendicular á esta base, y divide á su ángulo opuesto en dos partes iguales.

266 Teor. Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo esterno es mayor que cualquiera de los dos internos opuestos.

*Espl.* Sea el triángulo ABC (fig. 20); digo que si se prolonga uno de los lados BC, el ángulo ACD (que se llama *esterno* por estar fuera del triángulo) es mayor que cualquiera de los dos BAC, ABC, opuestos á los lados que forman el esterno.

*Dem.* Para demostrarlo respecto del BAC, concíbase por B y por el punto E medio de AC, la BE, y prolongada de manera que la prolongacion  $EF=BE$ ; únase el punto F con el C, y resultarán los triángulos ABE, FCE iguales (260); luego nos darán el ángulo BAE ó  $BAC=ECF$ ; pero  $ACD > ECF$ , luego  $ACD > BAC$ .

Concibiendo en el lado BC una construccion análoga, se demostrará del mismo modo que  $BCK > ABC$ ; y como (§ 257)  $BCK=ACD$ , resultará  $ACD > ABC$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* 1.º Siendo  $BAC < ACD$ , añadiendo ACB, será  $BAC+ACB < ACD+ACB$ ; pero  $ACD+ACB=\pi$ , luego  $BAC+ACB < \pi$ ; luego en todo triángulo la suma de dos ángulos es menor que dos rectos.

*Cor.* 2.º Luego en todo triángulo rectángulo ú obtusángulo, cada uno de los otros dos ángulos debe ser agudo.

*Cor.* 3.º Desde un punto cualquiera C (fig. 21), fuera de una recta AB, no se le puede tirar mas de una perpendicular CD; porque si se le pudieran tirar dos, tales como CD, CE, en el triángulo CDE los ángulos CDE, CED, valdrían juntos dos rectos, lo que es imposible.

*Cor.* 4.º La perpendicular es la que mide la verdadera distancia que hay desde un punto á una línea; pues es la única que se puede tirar de su especie.

*Cor.* 5.º Tampoco se puede tirar mas de una perpendicular en un punto D de una recta AB; porque si suponemos que haya dos, tales como DC, DK, se tendrá que los ángulos KDA, CDA serán rectos, y por consiguiente iguales (253): lo que no puede ser, porque ADK es parte, y ADC es todo.

*Cor.* 6.º Si desde un punto C de una oblicua CE se

baja una perpendicular  $CD$  á la  $AB$ , caerá hácia el ángulo agudo; porque si cayese hacia el ángulo obtuso, el ángulo  $ADC$  no podría ser mayor que él.

267 Teor. *En todo triángulo al mayor lado se opone el mayor ángulo; y al contrario, al mayor ángulo está opuesto el mayor lado.*

*Espl.* Sea el triángulo  $BAC$  (fig. 22); digo que si el lado  $AC > BC$ , será el ángulo  $ABC > BAC$ ; y si se supone  $ABC > BAC$ , será  $AC > BC$ .

*Dem.* 1.º Tómese en el lado mayor  $AC$  una parte  $CD = BC$ , y tírese la  $BD$ : con lo cual el triángulo  $BDC$ , dará los ángulos  $n$  y  $m$  iguales (265); pero  $n > A$  por ser externo en el triángulo  $ABD$ , luego también será  $m > A$ ; y como  $ABC > m$ , con mas razon será  $ABC > BAC$ , que era L. 1.º Q. D. D.

2.º Si no es  $AC > BC$ , será  $AC$  igual ó menor que  $BC$ .

Si  $AC = BC$ , resultará por lo demostrado (265), que  $ABC = BAC$ , que es contra el supuesto; tampoco puede ser menor, porque entónces el ángulo  $ABC$  sería menor que el  $BAC$ , que es también contra el supuesto; luego si no puede ser  $AC =$  ni  $< BC$ , será  $AC > BC$ , que es L. 2.º Q. D. D.

268 Teor. *La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero.*

*Espl.* Sea  $BCA$  (fig. 23) un triángulo cualquiera; digo que  $BA + CA > BC$ .

*Constr.* Haciendo centro en  $B$  y con un radio igual al lado mayor  $BC$ , trácese el arco  $CED$ , hasta que encuentre al lado  $BA$  prolongado, y tírese la cuerda  $DC$ .

*Dem.* Las rectas  $BC$  y  $BD$  son iguales por radios de un mismo círculo; luego (265) en el triángulo  $CBD$  el ángulo  $DCB = g$ ; pero el ángulo  $r < DCB$  por ser parte suya; luego también será  $r < g$ . Luego en el triángulo  $DCA$  el ángulo  $g > r$ , y por lo mismo (267) el lado  $CA > DA$ . Si á estas cantidades desiguales añadimos una misma cantidad  $AB$ , también permanecerán desiguales, y se tendrá  $CA + AB > DA + AB$ ; y como  $DA + AB = BD = BC$ , se sigue que  $CA + AB > BC$ , que era L. Q. D. D.

269 Teor. *Si desde un punto cualquiera dentro de un triángulo, se tiran rectas á los vértices de dos de sus ángulos, la suma de estas rectas será menor que la de los lados del triángulo opuestos á los ángulos; y el ángulo que*

*formen dichas rectas, será mayor que el ángulo que formen dichos lados.*

*Espl.* Sea el triángulo  $ABC$  (fig. 24); digo que si desde un punto  $D$ , elegido dentro, se tiran dos rectas  $DB$ ,  $DC$ , á dos ángulos cualesquiera  $B$ ,  $C$ , se tendrá  $BD+DC < AB+AC$ ; y que  $BDC$ , ó el ángulo en  $o > m$ .

*Dem.* 1.º Prolongando una cualquiera de las dos rectas, tal como  $BD$ , hasta que vaya á encontrar al lado opuesto  $AC$ , se tendrá (§ 268)  $BA+AE > BE$ ; y añadiendo  $EC$ , será  $BA+AE+EC > BE+EC$ , ó reduciendo será

$$BA+AC > BE+EC \text{ (k).}$$

Ahora, el triángulo  $DEC$  dará  $DE+EC > DC$ ; y añadiendo  $BD$ , se tendrá  $BD+DE+EC > BD+DC$ ; ó por ser  $BD+DE=BE$ , resultará  $BE+EC > BD+DC$ .

Y como ántes (k) teníamos  $BA+AC > BE+EC$ , con mas razon se tendrá  $BA+AC > BD+DC$ , que era L. 1.º Q. D. D.

2.º El triángulo  $BAE$  da (266) el ángulo  $n > m$ ; y por la misma razon el triángulo  $DEC$  dará el ángulo  $o > n$ ; luego con mas razon  $o > m$ , que es L. 2.º Q. D. D.

270 Teor. *Si desde un punto á otro se tira una recta y una curva, la recta es mas corta que la curva.*

*Espl.* Si desde el punto  $A$  (fig. 25) al punto  $B$ , se tira la recta  $BA$  y la curva  $ADCB$ , digo que  $ADCB > BA$ .

*Dem.* Desde  $A$  y  $B$  tírense á un punto cualquiera  $C$  de la curva, las rectas  $AC$  y  $BC$ , y se tendrá (§ 268)  $AC+CB > AB$ ; y si desde los puntos  $C$  y  $A$  se tirán á uno cualquiera  $D$  intermedio del arco  $AC$ , las  $AD$ ,  $DC$ , se tendrá tambien  $AD+DC > AC$ ; que añadiendo  $CB$ , da  $AD+DC+CB > AC+CB$ ; y si volviéramos á tirar rectas á los puntos intermedios de los arcos  $AD$ ,  $DC$  etc., el conjunto de rectas que resultase sería mayor que el  $AD+DC+$  etc., pues la suma de cada dos rectas siempre sería mayor que su correspondiente; pero este conjunto de rectas, al paso que crece, se aproxima á la curva  $ADCB$ , por tener mas puntos comunes con ella, y hallarse entre el conjunto anterior y la misma curva; luego la curva será mayor (227) que cada uno de estos conjuntos; y como cualquiera de estos es mayor que  $AB$ , con mas razon será la curva  $ADCB > AB$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Luego la línea recta es la mas corta de todas cuantas se pueden tirar desde un punto á otro.

271 Teor. *Si desde un punto á otro se tira una recta,*

y diferentes curvas, que sean cóncavas ó convexas hacia un mismo lado, la curva que mas se acerque á la recta será la mas corta.

*Espl.* Si desde el punto A al punto B (fig. 26), se tira la recta AB y diferentes curvas ACB, ADB, la ACB que mas se acerca á la recta AB, es la mas corta.

*Dem.* Concíbase por el punto C la recta MN, tal que solo tenga el punto C comun con la curva interior ACB, estando toda ella fuera, y en virtud de lo demostrado (270) se tendrá  $MDN > MN$ ; y añadiendo  $AM + NB$ , resultará

$$MDN + AM + NB > MN + AM + NB;$$

pero el primer miembro  $MDN + AM + NB =$  curva ADB, y el segundo  $MN + AM + NB =$  conjunto AMNB; luego  $ADB > AMNB$ .

Concíbense ahora por los puntos P y U, tomados entre C y A y entre C y B, las rectas RS y TQ con las mismas circunstancias que la MN, y se tendrá (§ 270 cor.)

$$RM + MS > RS, \quad TN + NQ > TQ;$$

y sumando ordenadamente resultará

$$RM + MS + TN + NQ > RS + TQ.$$

Añadiendo á ambos miembros la cantidad  $AR + ST + QB$ , será  $RM + MS + TN + NQ + AR + ST + QB > RS + TQ + AR + ST + QB$ ; pero el primer miembro  $=$  conjunto AMNB, y el segundo  $=$  ARSTQB; luego  $AMNB > ARSTQB$ , y con mas razon será  $ADB > ARSTQB$ .

Y como si se tirasen rectas por los puntos intermedios de los arcos AP, PC, CU, etc. se demostraria del mismo modo, que el conjunto de rectas que fuese resultando, sería menor que el anterior ARSTQB, y así sucesivamente, se sigue que con mas razon la curva ADB será mayor que cualquiera de estos conjuntos; pero estos conjuntos de rectas, al paso que menguan, se van acercando á la curva ACB, por tener mas puntos comunes con ella y estar cada conjunto entre la curva y el conjunto anterior; luego (228) la curva ACB es menor que cualquiera de estos conjuntos, y con mas razon se tendrá  $ACB < ADB$ , que era L. Q. D. D.

*Cor.* Puesto que la curva interior es menor que cualquier conjunto de rectas, cada arco de curva será menor que la porcion de rectas correspondientes á dicho arco, ó lo que es lo mismo  $\text{arco } Col < PS + CS$ .

272 Teor. Si dos lados de un triángulo son iguales á dos de otro, y el ángulo que forman es desigual, el lado

*opuesto al mayor ángulo será mayor que el que en el otro triángulo está opuesto al ángulo menor.*

*Espl.* Sean dos triángulos  $ABC, DEF$  (fig. 27), tales que  $AC = DF, AB = DE$ , y el ángulo  $BAC > EDF$ ; digo que  $BC > FE$ .

*Dem.* Superpóngase el triángulo  $DEF$  sobre el  $BAC$ , de manera que el lado  $DF$  se confunda con  $AC$ , con lo que el triángulo  $DEF$  vendrá á tener la posición del  $A'E'C$ , cayendo  $DE$  dentro del ángulo  $BAC$  por ser el ángulo  $FDE < BAC$ .

Aquí pueden ocurrir tres casos: 1.º que el punto  $E$  caiga fuera del triángulo  $ABC$  como en  $E'$ .

2.º Que caiga sobre el lado  $BC$  como en  $H$ : y 3.º que caiga dentro del triángulo como en  $K$ .

1.º Si cae en  $E'$  será (§ 268)

$$E'G + GC > E'C, \text{ y } AG + GB > BA;$$

y sumando ordenadamente se tendrá

$$E'G + GC + AG + GB > E'C + BA,$$

ó lo que es lo mismo  $E'A + BC > E'C + BA$ ; y suprimiendo en ambos miembros  $E'A$  y  $BA$ , que son iguales por ser  $E'A = DE = BA$ , quedará  $BC > E'C = EF$ .

2.º Si  $E$  cae en  $H$ , en el lado  $BC$ , se tendrá (ax. 4.º)

$$BC > HC = FE.$$

3.º En fin, si el punto  $E$  cayese dentro, v. g. en  $K$ , se tendría (§ 269)  $AB + BC > AK + KC$ ; y quitando  $AB$  y  $AK$ , que son iguales por ser  $DE = AK = AB$ , quedará  $BC > KC = EF$ , que es *L. Q. D. D.*

*Cor.* Recíprocamente, si dos lados de un triángulo son iguales á dos de otro; y el tercer lado desigual, el ángulo opuesto en el triángulo donde el lado sea menor, será menor que el del otro triángulo donde el lado es mayor. Porque no puede ser igual ni mayor.

273 Teor. Si desde un punto fuera de una recta, se tira una perpendicular y diferentes oblicuas: 1.º la perpendicular será mas corta que las oblicuas; 2.º las oblicuas que distén igualmente de la perpendicular, serán iguales; y 3.º la oblicua, que mas se separe de la perpendicular, será la mas larga.

*Espl.* Si desde el punto  $A$  fuera de la  $FD$  (fig. 28) se le tira una perpendicular  $AB$ , y diferentes oblicuas  $AE, AC, AD$ , se verificará: 1.º que la  $AB$  será la mas corta de todas; 2.º que las oblicuas  $AE, AC$ , equidis-

tantes de la perpendicular  $AB$ , serán iguales; y 3.º que de las oblicuas  $AC, AD$ , la  $AD$  que mas se separa de la perpendicular, será la mas larga.

*Dem.* 1.º Por ser el triángulo  $ABC$  rectángulo en  $B$ , y ser el ángulo recto el mayor de un triángulo (266 cor. 2.º), se sigue (267) que el lado  $AC > AB$ , ó  $AB < AC$ , que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Si  $BC = BE$ , los triángulos  $ABE, ABC$ , serán iguales (260); luego darán  $AE = AC$ , que es L. 2.º Q. D. D.

3.º Siendo el triángulo  $ABC$ , rectángulo en  $B$ , el ángulo  $ACD$ , esterno de dicho triángulo, será obtuso; pues ha de ser mayor (266) que el interno y recto  $ABC$ ; luego (266 cor. 2.º), el ángulo  $ACD$  es el mayor del triángulo  $ACD$ , y por lo mismo se le opondrá mayor lado (267); luego  $AD > AC$ , que era L. 3.º Q. D. D.

Cor. 1.º Desde un mismo punto fuera de una recta no se le pueden tirar tres rectas iguales.

Cor. 2.º Dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tienen iguales las hipotenusas y uno de los catetos, ó uno de los ángulos agudos; porque, primero, sean los triángulos  $ABC$  y  $DEF$  (fig. 29), en que se supone  $AC = DF$  y  $AB = DE$ ; digo que  $BC = EF$ ; y por lo mismo estos triángulos son iguales (259).

En efecto, si colocamos el triángulo  $DEF$  sobre el  $ABC$ , de modo que  $DE$  se confunda con  $AB$ , resultará que como los ángulos en  $B$  y en  $E$  son iguales, por rectos, el lado  $EF$  caerá sobre el  $BC$  (§ 251). Ahora, si el punto  $F$  no cae sobre el punto  $C$ , caerá ó mas á la izquierda como en  $G$ , ó mas á la derecha como en  $H$ .

Si cae en  $G$ , la  $DF$  estará representada por  $AG$ ; y como por el supuesto  $DF = AC$ , será  $AC = AG$ , que es un absurdo, pues se tendrían dos oblicuas iguales á un mismo lado de la perpendicular  $AB$ . Como del mismo modo se demostraría que no puede caer hacia la derecha de  $C$ , v. g. en  $H$ , resulta que caerá sobre  $C$ ; luego se habrán confundido los tres lados del triángulo  $DEF$  con los del  $ABC$ ; luego son iguales.

Sea en 2.º lugar  $AC = DF$ , y el ángulo  $BAC = EDF$ ; colocando el triángulo  $DEF$  sobre el  $ABC$ , de modo que  $DF$  se confunda con  $AC$ , la  $DE$  tomará la direccion de  $AB$  (§ 251); y como el punto  $F$  se ha confundido con  $C$ , si la  $FE$  no cayese sobre lo  $CB$ , se podrían tirar desde  $C$  dos perpendiculares á  $AB$ , lo que es absurdo; luego los triángulos serán iguales.

Cor. 3.<sup>o</sup> *Si un punto de una perpendicular dista igualmente de dos puntos de la recta á que lo es, todos los puntos de la primera estarán á igual distancia de aquellos mismos puntos de la segunda.*

Porque si fuese B (fig. 28) el punto que distase igualmente de E y C, desde cualquier punto A, M, ó H, de la AH, que se tirasen rectas á E y C, serían iguales (260) los triángulos ABE, ABC, los MBE y MBC tambien, ó los HBE, HBC; luego se tendrá  $AE=AC$ ,  $ME=MC$  y  $HE=HC$ .

Si el punto A, que se halla fuera de la FD, dista igualmente de E y de C, será  $AE=AC$ ; y como tienen un lado AB comun los triángulos rectángulos ABE, ABC, resultará (cor. ant.) que  $EB=BC$ ; y si por un punto cualquiera de AB, tal como M, se tiran las ME, MC, serán iguales por hipotenusas de triángulos EBM, MBC iguales; y como lo mismo se demostraría de cualquier otro punto, resulta la proposicion.

Cor. 4.<sup>o</sup> *Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales é igual tambien el ángulo opuesto al mayor de ellos.*

*Espl.* Sean ABC, DEF (fig. 24\*) dos triángulos en que se supone  $AB=ED$ ,  $AC=DF$ ,  $ACB=DFE$ , sabiéndose ademas que  $BA > AC$ ; digo que los dos triángulos ABC, DEF son iguales.

*Dem.* Por ser  $AB > AC$ , resulta (267) que el ángulo  $ACB > ABC$ ; luego el ángulo ABC será por precision agudo, pues que si ACB es agudo, con mas razon lo será el ABC que es menor que él; si ACB fuese recto, ú obtuso, el ABC sería (266 cor. 2.<sup>o</sup>) por precision agudo; luego la AB será oblicua respecto de la BC, y por la misma razon tendremos que DE será oblicua respecto de EF. Ahora, los ángulos ACB, DFE que son iguales, no pueden ménos de ser agudos, rectos ú obtusos.

Si los suponemos agudos, resulta que las AC y DF serán tambien oblicuas respecto de las BC, EF; y concibiendo las perpendiculares AP, DQ caerán dentro de los triángulos ACB, DFE (266 cor. 6.<sup>o</sup>), y los triángulos ACP, DFQ serán iguales (cor. 2.<sup>o</sup>); pues son ambos rectángulos, el uno en P y el otro en Q, tienen iguales las hipotenusas AC, DF, y ademas tienen iguales los ángulos agudos ACP, DFQ; luego  $AP=DQ$ , y  $PC=QF$ . Ahora, por ser  $AP=DQ$ , resulta que los triángulos APB, DQE rectángulos en P y en Q, serán iguales (cor. 2.<sup>o</sup>), pues que, ademas de ser rectángulos, tienen iguales las

hipotenusas  $AB, ED$  y los catetos  $AP, DQ$ . Luego  $PB=QE$ ; y sumando esta ecuacion con la  $PC=QF$ , será  $BC=EF$ : y por consiguiente teniendo por el supuesto  $AB=DE, AC=DF$ , y por lo que acabamos de demostrar  $BC=EF$ , resulta que los triángulos  $ABC, DEF$  tienen iguales sus tres lados; luego (259) serán iguales.

Si los ángulos  $ACB, DFE$  fuesen rectos, entónces los triángulos rectángulos  $ACB, DFE$  tendrían por el supuesto iguales las hipotenusas  $AB, DE$ , y los catetos  $AC, DF$ , luego (cor. 2.º) serían iguales.

Si los ángulos  $ACB, DFE$  fuesen obtusos como en la (fig. 25<sup>o</sup>); resulta que las perpendiculares  $AP, DQ$ , caerían fuera de los triángulos (266 cor. 2.º), y resultaría que siendo iguales por el supuesto los ángulos  $ACB, DFE$ , sus suplementos  $ACP, DFQ$  serán tambien iguales; y los triángulos  $ACP, DFQ$  rectángulos en  $P$  y en  $Q$  serán iguales (cor. 2.º), pues ademas tienen iguales las hipotenusas  $AC, DF$ ; de donde resulta  $AP=DQ$  y  $CP=FQ$ . De ser  $AP=DQ$ ; y de tener por el supuesto  $AB=DE$ , resulta que los triángulos  $ABP, DEQ$  rectángulos en  $P$  y en  $Q$  serán iguales (cor. 2.º); y por lo mismo  $BP=EQ$ ; restando de esta ecuacion, la  $CP=FQ$ , se tiene  $BC=EF$ ; y como por el supuesto  $AB=DE$ , y  $AC=DF$ , resulta que los triángulos  $ABC, DEF$  tienen sus tres lados iguales, y por consiguiente (259) serán iguales. Luego en todos los casos es verdadera la proposicion.

Cor. 5.º *Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales y el ángulo opuesto al menor de ellos, con tal que en ambos triángulos sea de la misma especie el ángulo opuesto al mayor lado; esto es, que en ambos sea agudo ú obtuso.*

*Espl.* Sean los dos triángulos  $ABC, DEF$  (figs. 24\* y 25\*); en los cuales suponemos que  $AB=DE, AC=DF, \angle ABC=\angle DEF$ , y sabemos ademas que  $AC < AB$ , y  $DF < DE$ , y que los ángulos  $ACB, DFE$  son en ambos triángulos de una misma especie, esto es, son en ambos ó agudos como en la (fig. 24\*), ó en ambos obtusos como en la (fig. 25\*); digo que son iguales los expresados triángulos  $ABC, DEF$ .

*Dem.* Colóquese el triángulo  $DEF$  sobre el  $ABC$ , de modo que  $DE$  se confunda con  $AB$ , y resultará (251) que el lado  $EF$  caerá sobre el  $BC$ .

Ahora, las circunstancias que se suponen conocidas, dan á

entender que las  $AC$ , y  $DF$  no son perpendiculares á las  $BC$ ,  $EF$ ; pues que si lo fuesen, los ángulos en  $C$  y  $F$  serían rectos, y los triángulos  $ABC$ ,  $DEF$  serían iguales por lo demostrado (cor. 2.º). Luego si concebimos por  $A$  una perpendicular al lado opuesto  $BC$ , resultará que por ser  $DF=AC$  y estar el punto  $D$  confundido con  $A$ , que la  $DF$ , ó se confundirá con  $AC$  ó caerá en  $Ac$  (273); de modo que  $PC=Pc$ .

Mas si suponemos que caiga en  $Ac$ , el ángulo  $DfE$  estará representado por el  $AcB$ , y tendremos (fig. 24\*) que  $AcB > P$  será obtuso; y el  $ACP=AcP$ , por la igualdad de los triángulos  $APC$ ,  $APc$  (cor. 2.º), será agudo; y como por el supuesto se sabe que los ángulos  $DfE$ ,  $ACB$  son de una misma especie, resulta que la  $DF$  no puede caer á diverso lado de la perpendicular; luego caerá al mismo lado y se confundirá  $DF$  con  $AC$ , cayendo el punto  $F$  sobre  $C$ , y todo el lado  $EF$  se habrá confundido con  $BC$ . Luego los dos triángulos se habrán confundido y serán iguales.

La misma consecuencia se saca respecto de la (fig. 25\*); pues si suponemos que, al hacer la superposicion, la  $DF$  no caiga sobre la  $AC$ , sinó que tome la posicion de  $Ac$ , al otro lado de la perpendicular, el ángulo  $ACB > P$  sería obtuso, y el ángulo  $AcP$  que representa en este supuesto al  $DfE$ , sería agudo, que es contra el supuesto; luego no se puede suponer que la  $DF$  caiga hacia diferente lado de la perpendicular respecto de la  $AC$ ; luego caerá encima y se confundirá con ella; luego los triángulos  $DEF$  y  $ABC$  se confundirán en un todo y serán iguales.

Cor. 6.º *Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales é igual un ángulo opuesto á uno de ellos, con tal que el ángulo opuesto al otro de los lados iguales, sea de una misma especie en ambos triángulos.*

*Espl.* Sea  $ABC$ ,  $abc$  (fig. 26\*) dos triángulos cualesquiera, en los que suponemos  $AB=ab$ ,  $BC=bc$  y  $A=a$ ; voy á demostrar que si se sabe además que los ángulos  $C$ ,  $c$  son ambos rectos, ambos agudos, ó ambos obtusos, los espresados triángulos son iguales.

*Dem.* Superpóngase el triángulo  $abc$  sobre el  $ABC$ , de modo que  $ab$  se confunda con  $AB$ , y tendremos que, por ser  $ab=AB$ , el punto  $b$  se confundirá exactamente con  $B$ ; y por ser el ángulo  $a=A$ , el lado  $ac$  caerá sobre el lado  $AC$ . Ahora, si el punto  $c$  no cae precisamente sobre  $C$ , caerá ó á su izquierda como en  $D$ , ó á su derecha como en  $E$ .

Supongamos que caiga en  $D$ , y tendremos, que el triángulo

lo  $abc$  estará representado por  $ABD$ , siendo el ángulo  $a = ADE$ . Pero si  $c$  y  $C$  son rectos, habrá dos perpendiculares  $BD, BC$  tiradas desde  $B$  á la  $AC$ , lo que es imposible. Si los ángulos  $c$  y  $C$  fuesen agudos, el  $ADB = c$  sería agudo, y  $BDC$ , suplemento de  $ADB$  sería obtuso (254), y por consiguiente mayor (252) que el ángulo  $C$ , que es agudo; luego el triángulo  $BDC$ , nos daría (267)  $BC > BD$ , lo que es contra el supuesto, que exige el que  $BC = bc = BD$ . Si los ángulos  $c$  y  $C$  fuesen obtusos, el  $ADB$  sería obtuso, y su suplemento  $BDC$  sería agudo; por lo que  $BC$  sería (266 cor. 2.º y 267) menor que  $BD$ , y por consiguiente que su igual  $bc$ , lo que también es contra el supuesto; luego en ninguno de los tres casos de ser los ángulos  $C, c$  rectos, agudos ú obtusos se puede verificar que el punto  $c$  caiga hácia la izquierda de  $C$ , al superponerse los triángulos; y como por un razonamiento análogo deduciríamos que tampoco puede caer dicho punto á la derecha de  $C$ , por ejemplo en  $E$ , resulta que debiendo caer  $ac$  sobre  $AC$ , se habrá confundido precisamente  $a$  con  $C$ , y como  $b$  se había confundido con  $B$ , todo el lado  $bc$  se habrá confundido (245) con  $BC$ : y habiéndose confundido los tres lados, se habrán confundido los triángulos, y por consiguiente estos serán iguales, que era L. Q. D. D.

**Cor. 7.º** *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual, é iguales también dos ángulos que el uno sea el opuesto al lado igual.*

*Dem.* Sean  $ABC, abc$ , (fig. 26<sup>ª</sup>) dos triángulos cualesquiera, en los que se tenga  $AB = ab, A = a, C = c$ . Superpóngase el triángulo  $abc$  sobre el  $ABC$ , de modo que  $ab$  se confunda con  $AB$ , y tendremos que por ser  $AB = ab$ , el punto  $b$  caerá exactamente sobre  $B$ ; y por ser el ángulo  $A = a$ , el lado  $ac$  caerá sobre  $AC$ . Ahora, si el punto  $c$  no se confunde con  $C$ , caerá hácia la izquierda de este como en  $D$  ó hácia su derecha como en  $E$ ; y el triángulo  $abc$  estará representado por el  $ABD$  ó por el  $ABE$ : en cuyo caso el ángulo  $ACB$  sería menor que el  $BDA$  y mayor que el  $BEA$  (266); y como tanto el  $ADB$  como el  $BEA$  espresarían el ángulo  $c$ , resulta, que en ninguno de estos casos podría ser el ángulo  $c = C$ , como exige el supuesto. Luego el punto  $c$  no puede ménos de caer sobre el punto  $C$ ; en cuyo caso todo el lado  $bc$  se habrá confundido con  $BC$ , y habiéndose confundido los tres lados del triángulo  $abc$  con los del  $ABC$ , estos serán iguales; que era L. Q. D. D.

En el apéndice puesto al fin de la segunda parte de la Geometría  
Tomo I,

tría en la tercera edición del tomo I, parte segunda, demuestro otros seis casos nuevos de igualdad de triángulos.

274 Teor. *Si una recta tiene dos puntos, tales, que cada uno de ellos dista igualmente de dos puntos de otra, le será perpendicular.*

*Espl.* Si los dos puntos A y H, ó A y B, ó A y M, de la recta AH (fig. 28), distan igualmente de dos puntos E y C de la FD, digo que la AH es perpendicular á la FD.

*Dem.* 1.º Sean los dos puntos A y H, ó supongamos que  $AE=AC$  y  $HE=HC$ ; lo cual dará los triángulos AEM, AHC, iguales (259), pues además tienen comun el lado AH; la igualdad de estos triángulos dará el ángulo  $EAB=BAC$ ; luego los triángulos EAB, ABC, serán iguales: pues tienen los ángulos EAB, BAC, iguales, comun el lado AB, é iguales también los lados AE, AC por el supuesto; luego los ángulos en B serán iguales, y por consiguiente rectos (252); luego la AH es perpendicular á la FD.

2.º Sean ahora los puntos A y B, y tendrémos  $AE=AC$ , y  $BE=BC$ ; y por lo mismo los triángulos ABE, ABC, serán iguales (259); luego los ángulos en B serán iguales, y por consiguiente rectos; luego la AH será perpendicular á la FD.

3.º Sean los dos puntos A y M, y se tendrá  $AE=AC$ ,  $ME=MC$ ; luego los triángulos AME, AMC, serán iguales (259), lo que da el ángulo  $EAM=CAM$ ; y teniendo los triángulos AEB, ACB, iguales los ángulos en A y los lados que los forman, á saber:  $AE=AC$ , por el supuesto, y AB por comun, serán iguales (260); luego los ángulos en B son iguales, y por consiguiente rectos; luego la AH es perpendicular á la FD, que es L. Q. D. D.

*Cor.* *Si una perpendicular CD (fig. 21) tiene un punto cualquiera D, equidistante de dos A y B de la línea AB á que lo es, pasa por todos los puntos que en dicho plano distan igualmente de A y de B,*

Porque si hubiese otro punto tal como K con esta circunstancia, tirando por él y por D, la DK, esta sería perpendicular á la AB, por lo que acabamos de demostrar; y como CD lo es por el supuesto, resultarían dos perpendiculares en un mismo punto de la recta AB, lo que es absurdo (266 cor. 5.º).

275 Probl. 1.º *Desde un punto A fuera de una recta BC (fig. 30), tirar una perpendicular á esta recta.*

*Res. y Dem.* Haciendo centro en el punto dado  $A$ , y con un radio cualquiera, trácense dos arcos que corten á la recta en  $D$  y  $E$ ; haciendo centro en estos puntos  $D$  y  $E$ , con el mismo ó con otro radio cualquiera, trácense por la parte inferior otros dos arcos que se corten; por el punto de interseccion  $F$  y el punto dado  $A$ , tírese la  $AF$ , que será perpendicular á la  $BC$ . Porque tiene dos puntos  $A$  y  $F$  á igual distancia de los  $D$  y  $E$ .

276 Probl. 2.<sup>o</sup> *Por un punto  $A$  de una recta  $BC$  (fig. 31), tirarle una perpendicular.*

*Res. y Dem.* Haciendo centro en el punto dado  $A$ , trácense dos arcos en  $D$  y  $E$  con un radio cualquiera; haciendo centro en  $D$  y  $E$  con un radio arbitrario, pero mayor que  $AE$ , trácense dos arcos por arriba ó por abajo; por el punto de interseccion  $F$  y el punto dado  $A$ , tírese la  $FA$ , que será perpendicular á la  $BC$ . Porque tiene dos puntos  $A$  y  $F$  á igual distancia de los  $D$  y  $E$ .

277 Probl. 3.<sup>o</sup> *Dividir una recta  $AB$  (fig. 32) en dos partes iguales.*

*Res. y Dem.* Haciendo centro en sus extremos  $A$  y  $B$  con un mismo radio, trácense dos arcos que se corten por la parte de arriba, y otros dos que se corten por la parte de abajo; y tirando la  $FG$  dividirá á la  $AB$  en dos partes iguales. Porque teniendo la  $FG$  dos puntos equidistantes de  $A$  y  $B$ , será perpendicular (274) á la  $AB$ , y tendrá (273 cor. 3.<sup>o</sup>) todos sus puntos á igual distancia de  $A$  que de  $B$ ; luego  $AH=HB$ .

### *De las paralelas.*

278 Cuando dos líneas rectas se hallan en un plano de modo que no se encuentran, aunque se las prolongue todo lo que se quiera, como  $AB, CD$  (fig. 33), se llaman *paralelas*.

Cuando dos rectas paralelas  $AB, CD$  son cortadas por una recta  $FE$ , esta se llama *secante*; la cual forma con las paralelas ocho ángulos: cuatro *internos*, á saber:  $m, n, p$ , y  $q$ ; y cuatro *externos*, á saber:  $k, l, r, s$ .

Cuando se comparan dos ángulos internos á diferente lado de la secante, uno en cada paralela, se llaman *ángulos alternos internos*: tales son los  $m$  y  $q$ , y los  $n$  y  $p$ ; cuando se comparan dos ángulos internos á un mismo la-

do de la secante, como los  $m, p$ , ó los  $n, q$ , se llaman solamente *internos*; cuando se comparan dos ángulos externos, uno en cada paralela hácia diferente lado de la secante, se llaman *alternos externos*: tales son los  $k y r$ , y los  $l y s$ ; cuando se comparan dos ángulos externos á un mismo lado de la secante, tales como  $k y s$ , ó  $l y r$ , se llaman simplemente *externos*; y cuando se comparan dos ángulos, uno en cada paralela, á un mismo lado de la secante, uno dentro y otro fuera, se llaman *correspondientes*: tales son los  $k y p$ , los  $m y s$ , los  $l y q$ , y los  $n y r$ .

279 Teor. *Das rectas perpendiculares á una tercera son paralelas.*

*Espl.* Si las dos rectas  $AB, CD$ , son perpendiculares á la  $GH$ , son paralelas, ó no se pueden encontrar en ningun punto del plano donde se hallan.

*Dem.* Porque si se encontrasen, desde el punto en que lo hiciesen, se tendrían tiradas dos perpendiculares á la  $GH$ , lo que no puede ser (266 cor 3.<sup>o</sup>).

*Cor. 1.<sup>o</sup>* Luego para tirar una paralela á una recta dada  $AB$ , desde un punto cualquiera  $G$ , se bajará á dicha recta desde el espresado punto una perpendicular  $GH$ , y en dicho punto  $G$  se tirará á esta perpendicular  $GH$ , otra recta  $GD$  que le sea perpendicular, la cual será paralela á la propuesta  $AB$ ; por ser ambas perpendiculares á la  $GH$ .

*Cor. 2.<sup>o</sup>* Y como desde el punto  $G$  no se puede bajar mas de una perpendicular  $GH$  á la  $AB$ , y en  $G$  sólo se puede levantar una perpendicular á  $GH$ , resulta que por un punto dado, sólo se podrá tirar una paralela á una recta dada (\*).

(\*) La Teoría de las paralelas es una de las mas trascendentales de las Matemáticas; y sin embargo, hasta el presente, ha reposado en proposiciones que carecian de todo el grado de rigor y exactitud que es característico de la Geometría. En la nota del § 385a de la 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup> edición del Tomo I parte II de mi *Tratado Elemental*, que contiene la *Geometría*, y en la *digresion*, que en dicho volumen inserto desde el § 401 hasta el 429 ambos inclusive, pongo todas cuantas teorías de las paralelas han llegado á mi noticia, desde Euclides hasta el presente, y manifiesto su inexactitud.

Uno de los Geómetras, que han hecho mayores esfuerzos para la

280 Teor. Si una recta es perpendicular á una de dos paralelas, lo será también á la otra.

Espl. Sean  $AB, CD$  dos paralelas, (fig. 33) y  $GH$

demonstración rigurosa de la espresada Teoría de las paralelas, es Mr. Legendre; del cual hemos insertado en la citada digresión todas sus diversas teorías hasta las comprendidas en la duodécima edición de su Geometría; y habiendo hecho despues este Sabio nuevas investigaciones sobre tan interesante asunto, me parece de mi deber, para no omitir nada que pueda conducir á formar idea del estado actual de tan importante materia, el insertar aquí lo mas principal.

En el Tomo XII (impreso en 1855) de las memorias de la Academia de Ciencias del Instituto de Francia, pág. 567 hay un escrito intitulado *Reflexiones sobre diferentes maneras de demostrar la teoría de las paralelas, ó el teorema sobre la suma de los tres ángulos del triángulo por Mr. Legendre.*

Y dice pág. 597 «la idea del ángulo se une naturalmente con la del espacio infinito comprendido entre sus lados; este espacio tiene siempre una relación determinada con la superficie entera del plano; porque los cuatro ángulos rectos formados por la intersección de dos rectas perpendiculares entre sí, comprenden toda la superficie del plano. Luego un ángulo cualquiera encierra entre sus lados un espacio que es á la superficie del plano, como el ángulo mismo es á cuatro rectos.

«El plano estando estendido al infinito tanto en longitud como en ancho, su superficie es considerada como un infinito de segundo orden; así, un ángulo cualquiera, si está medido por el espacio comprendido entre sus lados, será considerado como un infinito de segundo orden.

«Mas el espacio infinito, comprendido en todo ángulo dado, se puede dividir en una infinidad de partes iguales, que serán ellas mismas infinitas, pero de primer orden solamente.

«En efecto, sea  $A$  un ángulo dado (fig. 33a debajo de las 20 y 21); si sobre uno de sus lados  $AP$  se toman partes iguales  $AC, CE, EG$  etc., en número cualquiera, y desde los puntos  $C, E, G$ , etc. se tiran paralelas  $CD, EF, GH$  etc. al otro lado  $AB$ , ó lo que viene á ser lo mismo, rectas que hagan con  $AP$  ángulos  $DCP, FEP, HGP$ , etc. iguales al ángulo  $A$ , se formarán así en el ángulo  $BAP$ , tantos espacios como se quieran  $BACD, DCEF, FEHG$  etc. que son todos iguales entre sí; porque es visible que pueden ser superpuestos del mismo modo que se hace respecto de dos triángulos que tienen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales cada uno á cada uno.

«Llamaremos *biángulo* al uno de estos espacios formados por dos rectas indefinidas  $AB, CD$ , que estando situadas en un mismo plano, hacen con una tercera  $AC$ , dos ángulos interiores  $BAC, ACD$ , cuya suma es igual á dos rectos. Hay, como se ve, una infinidad de *biángulos* iguales en el espacio que contiene un ángulo dado; esto es por lo que el biángulo es un infinito del primer orden solamente, y el ángulo un infinito del segundo orden,

perpendicular á  $AB$ ; digo que la  $GH$  también es perpendicular á la  $CD$ .

*Dem.* Si la  $GH$  no es perpendicular á  $CD$ , le se-

cuando se conviene en medir estas dos cantidades por el espacio superficial comprendido entre sus lados.

“Establecidas estas nociones, es muy fácil demostrar el *postulado* de Euclides” (es nuestro teorema § 287 del texto).

Pág. 400. “*Demostracion hecha mas simple solo por la consideracion de los biángulos.*”

“Las ideas, que acabamos de desenvolver, son las primeras que se presentan al espíritu cuando se consideran los ángulos y los biángulos como representando los espacios superficiales comprendidos entre sus lados. Pero, esta teoría se puede simplificar mucho reduciéndola á la consideracion sola de los biángulos; se evita entónces el inconveniente bastante grave de admitir infinitos de dos órdenes diferentes, y se obtiene la demostracion de la teoría de las paralelas, mas simple, si yo no me engaño, que todas las que se han insertado hasta aquí en los elementos.

“Observemos primero que todo biángulo oblicuo, es decir, todo biángulo  $CABD$  (fig. 33 b), cuyo ángulo no es recto, se puede trasformar en un biángulo recto que le sea equivalente. En efecto, si desde el medio  $F$  de la base  $AB$  se baja la  $FG$  perpendicular sobre  $AC$ , y  $FH$  perpendicular sobre la paralela  $BD$  prolongada hácia  $H$ , es fácil de probar (no es fácil como dice el Autor, sinó muy difícil, á no ser que se cometa el círculo vicioso de suponer conocida parte de la teoría de las paralelas) que los triángulos rectángulos  $AFG$ ,  $BFH$  son iguales, y que así  $GFH$  es una sola línea recta, perpendicular á la vez á las dos paralelas  $AC$ ,  $BD$ , y dividida en dos partes iguales en el punto  $F$ .

“Tendremos, pues, por esta construccion, un *biángulo recto*  $CGHD$ , que será equivalente al biángulo oblicuo  $CABD$ ; porque se ve, que basta añadir el triángulo  $BFH$  al biángulo oblicuo, y quitar de él el triángulo igual  $AGF$ , para mudar el biángulo oblicuo en biángulo recto. Se ve, ademas, que tirando la recta  $FE$  perpendicular á  $GH$ , el biángulo recto  $CGHD$  será dividido en dos partes iguales por la recta  $FE$ ; porque los dos biángulos  $CGFE$ ,  $EFHD$ , que tienen bases iguales  $GF$ ,  $FH$ , pueden ser superpuestos, y son por consiguiente iguales. Esto supuesto, vamos á principiar por demostrar el teorema siguiente,

rá oblicua, y por  $G$  se podrá concebir una recta  $TU$  perpendicular á  $GH$ , la cual (279 cor 1.<sup>o</sup>) será paralela á  $BA$ ; y como la  $CD$  lo es por el supuesto, se

de donde se puede fácilmente deducir toda la teoría de las paralelas.

*Teorema.* Sean  $AC, BD$  (fig. 33c sobre la 33) dos rectas perpendiculares á una tercera  $AB$  y por consiguiente paralelas entre sí; si por un punto cualquiera  $M$  tomado sobre  $AC$ , se tira la recta  $MN$  perpendicular á  $AC$  y terminada en su paralela  $BD$ : digo 1.<sup>o</sup> que la recta  $MN$  será igual con  $AB$ ; 2.<sup>o</sup> que esta misma recta  $MN$  perpendicular á  $AC$ , será también perpendicular á su paralela  $BD$ .

*Demostracion.* Desde el punto  $N$  tírese al punto  $I$  medio de  $AB$ , la recta  $NI$  que se prolongará hasta que encuentre á  $AC$  igualmente prolongada, en el punto  $P$ ; los dos triángulos  $BIN, AIP$  serán iguales por tener un lado igual  $BI=AI$ , adyacente á dos ángulos iguales cada uno á cada uno, á saber, el ángulo  $BIN=AIP$  como opuestos al vértice y el ángulo  $B=A$  como siendo ambos rectos. Luego el lado  $IN=IP$ , y el ángulo  $BNÍ=API$ . Esto supuesto la suma de los dos ángulos  $CPN, PND$ , es igual á la de los dos ángulos  $INB, IND$ , y por consiguiente vale dos ángulos rectos. Tenemos pues un biángulo oblicuo  $CPND$ , que será equivalente al biángulo recto  $CABD$ , cuya base es  $AB$ : pero, se puede hallar un segundo valor del biángulo oblicuo  $CPND$ .

“Prolónguese  $PN$  una cantidad  $NQ$  igual con  $PN$ , y por el punto  $Q$  tírese la recta  $GQY$  que forme con  $NQ$  el ángulo  $GQN=QND$ . Entónces la suma de los dos ángulos  $DNQ, NQY$  será igual á la suma de los dos ángulos  $GQN, NQY$ , y por consiguiente será igual á dos ángulos rectos; luego se tendrá un segundo biángulo  $DNQY$ , que será igual al biángulo  $CPND$ ; porque estos dos biángulos pueden ser superpuestos, como se verificaría para dos triángulos que tuviesen un lado igual  $PN=NQ$ , adyacente á dos ángulos iguales, cada uno á cada uno.

“Por otra parte, los mismos dos biángulos, tomados juntos, forman un solo biángulo  $CPQY$ , cuya base es  $PQ$ ; y pues que el punto  $N$  es el medio de  $PQ$ , los triángulos  $GNQ, MNP$  son iguales, como teniendo un lado igual adyacente á dos ángulos iguales cada uno á cada uno, á saber,  $NQ=PN$ ,

tendrán por el punto  $G$  tiradas dos paralelas  $CD, UT$  á la  $AB$ , lo que no puede ser (279 cor 2.º).

281 Teor. *Si dos rectas cortadas por otra, forman*

ángulo  $GNQ = PNM$ , ángulo  $GQN = QND = NPM$ . Luego el lado  $GN = MN$ , y el ángulo  $NGQ$  será recto, así como el ángulo  $NMP$ . Luego el biángulo oblicuo  $CPQY$ , doble del biángulo  $CPND$  será equivalente al biángulo recto  $CMGY$ , cuya base es  $MG$ , y por consiguiente sería doble del biángulo recto, cuya base es  $MN$ , mitad de  $MG$ . Se sigue de aquí, que el biángulo oblicuo  $CPND$ , que es equivalente al biángulo recto cuya base es  $AB$ , es equivalente tambien al biángulo recto cuya base es  $MN$ . Pero, dos biángulos rectos iguales deben tener bases iguales. Luego 1.º la perpendicular  $MN$  es igual con  $AB$ .

“Hemos levantado  $MN$  perpendicular á  $AC$  hasta que encuentre á  $BD$ , y hemos probado que  $MN$  debe ser igual con  $AB$ ; si por el punto  $N$  levantásemos del mismo modo una perpendicular á  $BD$  hasta el encuentro de  $AC$ , será necesario que esta perpendicular, que designaremos por  $NM'$  sea igual tambien con  $AB$ ; pero, es visible que esta segunda recta  $NM'$  si no se confundiese con la perpendicular  $NM$ , sería una oblicua mayor que  $NM$ , y por consiguiente mayor que  $AB$ . Luego, para que ella sea igual con  $AB$ , es preciso necesariamente que se confunda con  $NM$ ; luego 2.º la misma  $MN$  es perpendicular al mismo tiempo á las dos paralelas  $AC, BD$ .

“Esta demostracion establece de una manera muy simple y muy rigurosa una propiedad esencial de las paralelas, de que se tiene naturalmente la idea sin ningun estudio preliminar; porque no se pueden concebir dos paralelas sin representárselas como dos líneas que conservan la misma distancia entre sí aun cuando se las prolongase al infinito; y se concibe al mismo tiempo que esta distancia, que es por todas partes la misma, está medida por una recta perpendicular á un mismo tiempo á las dos paralelas.

“Este principio estando una vez demostrado, toda la teoría de las paralelas, así como el teorema sobre la suma de los ángulos del triángulo son consecuencias de él, muy fáciles de deducir por el método ordinario de los elementos. Esto es por lo que nosotros podríamos dispensarnos de añadir aquí desarrollos ulte-

*ángulos alternos internos, ó alternos externos, iguales, dichas rectas serán paralelas.*

*Espl.* Sean  $AB$ ,  $CD$ , dichas rectas, y  $EF$  la

riores. Sin embargo, vamos á hacer ver cómo de la proposición precedente se puede deducir el teorema sobre la suma de los tres ángulos del triángulo.

“Pues que hemos encontrado que el rectángulo  $ABNM$  (figura 33c) tiene sus cuatro ángulos rectos, se sigue que una diagonal  $BM$  tirada en este rectángulo, le dividirá en dos triángulos, en que la suma de los ángulos es igual á dos rectos; y desde entónces, por la aplicacion de las proposiciones  $A$  y  $B$  (que él pone), se demostrará que en todo triángulo, la suma de los ángulos es igual á dos ángulos rectos. Pero, esta consecuencia puede ahora ser obtenida sin recurrir á las proposiciones  $A$  y  $B$ .

“En efecto, sea  $BAC$  un triángulo cualquiera (fig. 33 d), cuyo mayor lado sea  $BC$ ; desde el vértice  $A$  bájese la perpendicular  $AD$  sobre  $BC$ , por el mismo punto  $A$  tírese la recta  $EF$  perpendicular á  $AD$ ; en fin, por los puntos  $B$  y  $C$  elevense sobre la  $BC$  las perpendiculares  $BM$  y  $CN$ , terminadas en los puntos  $M$  y  $N$  sobre la recta  $EF$ .

“Por esta construccion, las rectas  $BC$ ,  $EF$ , perpendiculares á una misma recta  $AD$ , son paralelas; despues, la recta  $CN$  perpendicular á  $BC$  será, segun la proposición precedente, perpendicular á  $EF$  y al mismo tiempo igual con  $AD$ . Luego los triángulos rectángulos  $ACD$ ,  $CAN$  son iguales como teniendo una hipotenusa comun  $AC$ , y el lado  $AD$  igual al lado  $CN$ . Luego los ángulos opuestos á estos lados iguales, á saber  $ACD$ ,  $CAN$  son iguales, del mismo modo lo serán los dos ángulos  $ABD$ ,  $BAM$ ; luego los tres ángulos del triángulo  $ABC$ , hacen la misma suma que los tres ángulos  $CAN$ ,  $CAB$  y  $BAM$ ; esta última suma es igual á dos ángulos rectos, pues que  $MAN$  es una línea recta; luego la suma de los ángulos del triángulo  $ABC$  es igual tambien á dos ángulos rectos.

“Así, toda la dificultad está resuelta, y hemos encontrado en fin una demostracion de la teoría de las paralelas tan simple como rigorosa, y muy propia para ser insertada en los elementos. Sin embargo, no debemos disimular que hay una objecion que hacer contra las propiedades de los biángulos, sobre

secante ; digo que si  $n \equiv p$ , ó  $m \equiv q$ , ó  $k \equiv r$ , ó  $l \equiv s$ , dichas rectas no se encuentran, ó serán paralelas.

*Dem.* 1.º Sea  $n \equiv p$  ó  $m \equiv q$ , y se tendrá que las

las cuales la demostracion de nuestra proposicion principal está apoyada.

“Hemos supuesto que dos biángulos rectos son equivalentes, es decir, iguales en superficie, si sus bases son iguales. En efecto, si se comparan entre sí los dos biángulos rectos CABD, PMNQ, (fig. 33e) cuyas bases AB, MN son iguales, se ve que estos dos biángulos pueden ser superpuestos, y que por lo mismo son iguales.

“Pero, lo que tiene lugar para dos biángulos rectos, así aislados, parece no ser verdadero para dos biángulos rectos que tienen bases iguales, pero que están enclavados el uno en el otro. Tales son los dos CMND, CABD (fig. 33c), cuyas dos bases MN y AB son iguales en virtud de la proposicion citada.

“Es evidente, en efecto, que estos dos biángulos son desiguales, pues que su diferencia es igual al rectángulo ABNM, que puede ser de una magnitud cualquiera finita.

“El principio de que dos biángulos rectos son iguales cuando sus bases son iguales, cae pues aquí en defecto, ó al menos exige una modificacion. He aquí ahora la esplicacion que se puede dar de esta dificultad.

“La igualdad entre dos cantidades de magnitud finita exige que su diferencia sea absolutamente nula; pero, si las dos cantidades que se comparan son infinitas, tales como dos biángulos que se suponen representar la estension superficial infinita, comprendida entre sus lados, no es absolutamente necesario que su diferencia sea nula; basta que la relacion de esta diferencia á la una de las dos cantidades comparadas, sea mas pequeña que toda fraccion dada de la unidad.

“Pero, el rectángulo AMNB, de que hablábamos poco ha, no se puede considerar sinó como una parte infinitamente pequeña de cada uno de los biángulos de los que es la diferencia. En efecto, se puede llevar 100 veces por ejemplo la longitud AM sobre la recta MC, indefinidamente prolongada, y si se elevan por estos puntos de division otras tantas perpendiculares á MC, se formarán así 100 rectángulos iguales al rectángulo AMNB; se pueden formar del mismo modo 1000, 10000, 100000 etc. rectángulos iguales con AMNB, y quedará siempre en el biángulo

réctas AB, CD no se podrán encontrar en un punto K hacia la derecha de FE; porque entónces las tres rectas FE, CD, AB, formarían en triángulo, en el cual,

lo CMND un espacio superficial infinito, no ocupado por los rectángulos, el cual podrá ser superpuesto sobre el biángulo CABD. Luego el rectángulo, en su relacion con el biángulo es menor que un término cualquiera de la serie decreciente

$$\frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \quad \frac{1}{100000}, \quad \text{etc.}$$

Luego, cuando no se trate sinó de la relacion de magnitud entre dos biángulos rectos, cuyas bases son iguales, como esto tiene lugar en la demostracion de nuestra proposicion, se podrá suponer que esta relacion es rigurosamente igual á la unidad, y que así estos dos biángulos son iguales.

“La dificultad, que acabamos de resolver, proviene de la naturaleza de la cuestion, donde la idéa del infinito parece inseparable de la idéa de las paralelas; pero, está bien comprobado ahora que el empléo de los biángulos no puede introducir ningun error en la demostracion que hemos dado de la proposicion principal, y que así esta demostracion reúne al rigor geométrico toda la sencillez apetecible.

#### Conclusion.

“El deseo de perfeccionar mis *Elementos de Geometria*, poniendo al abrigo de toda objecion la teoria de las paralelas, me ha hecho volver muchas veces sobre el mismo asunto, y ensayar en diferentes ediciones demostraciones diferentes del teorema sobre la suma de los tres ángulos del triángulo, que ofrece el mismo punto de dificultad que la teoria de las paralelas. Memorias bastante numerosas, que me han sido dirigidas sobre estas demostraciones, no me han suministrado ninguna luz; pero me han dado lugar á reflexionar de nuevo sobre los medios de llegar en fin á una demostracion que reuniese todos los sufragios. Instruido en último lugar, de que la demostracion inserta en la 12.<sup>a</sup> edicion (de esta hablamos en el § 414 del Tomo I parte II), y que no se ha mudado despues, no había obtenido el asentimiento de algunos Profesores, que, sin contestar su exactitud, la encontraban muy difícil de comprender por sus discípulos, he querido hacer una revista general de las diversas demostraciones que yo había propuesto en diversas épocas, comprendiendo en ellas demostraciones de otro género de las que yo no había hecho mencion, á fin de poder elegir yo mismo, despues de un profundo exámen, la que me pareciese deber ser preferida á las otras. Ha resultado de este exámen, y de las nuevas idéas que me ha sugerido, que yo he sido conducido, de una manera imprevista, á una nueva demostracion que no le cede en rigor geométrico á ninguna otra; y que parece poder ser elegida como la mas simple y la mas propia de ser insertada en los elementos. Sin embargo, como esta demostracion reposa sobre las propieda-

por ser  $n=p$ , ó  $m=q$ , el ángulo esterno  $n$  sería igual á uno de los internos opuestos  $p$ , lo que no puede ser en virtud de lo demostrado (266).

Del mismo modo se demuestra que no se pueden encontrar hácia la izquierda; luego dichas rectas son paralelas. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si se supone  $k=r$ , ó  $l=s$ , sus opuestos al vértice  $n$  y  $p$  ó  $m$  y  $q$ , serán iguales; pero estos son alternos internos, luego por la primera parte del teorema, dichas rectas son paralelas. L. 2.º Q. D. D.

282 Teor. *Si dos rectas cortadas por otra, forman con ella los ángulos correspondientes iguales, serán paralelas.*

*Dem.* Porque si se supone  $k=p$ , como  $k=n$  (§ 257) será  $n=p$ , que es el caso anterior; luego serán paralelas. L. Q. D. D.

283 Teor. *Si dos rectas cortadas por otra forman ángulos internos ó externos, que juntos valgan dos rectos, dichas rectas son paralelas.*

*Dem.* Porque si se supone  $m+p=\pi$ ; como  $m+n=\pi$  (§ 254), será (intr. ax. 5.º)  $m+p=m+n$ , de donde quitando  $m$ , quedará  $p=n$ ; luego (281) serán paralelas. Y si se supone

des de una figura que no ha sido considerada hasta ahora en los elementos, sería posible que esta innovacion no fuese generalmente aprobada. Cualquiera que sea por lo demas, el juicio que se forme, yo me felicitaré siempre de la especie de casualidad que me ha permitido presentar á la eleccion de los Geómetras, dos demostraciones igualmente rigurosas de la *Teoria de las paralelas*. (Pone por nota. 'Antes que yo publicase mi obra, no existía ningún libro elemental, donde la demostracion de la *Teoria de las paralelas* pudiese considerarse como absolutamente rigurosa)\*; la una (la de la 12.ª edicion) mas directa y mas conforme con los métodos ordinarios; la otra fundada sobre un principio nuevo, pero cuya aplicacion entra en las formas elementales mas simples.'

Aquí se ve ante todas cosas, que lo insertado por Mr. Legendre en la 12.ª edicion de su Geometría no se ha considerado por todos suficientemente exacto: y como en el (§ 414) de mi Geometría impresa en 1825 tengo manifestado esto mismo, es para mí la mayor satisfaccion el saber que ha habido otros que opinan como yo; lo cual se ve confirmado por el mismo Legendre, cuando á aquello ha tratado de sustituir otra cosa.

En cuanto á la presente demostracion por medio de los *biángulos*, el mismo Legendre manifiesta por donde flaquea; y si se compara toda esta complicacion con los dos sencillísimos, claros y exactos *corolarios* del teorema del párrafo 279 del texto, que es en lo único que consiste mi última teoria de las paralelas, yo dejo á la consideracion imparcial de los Geómetras el que decidan cuál es preferible.

$k+s=\pi$ , como  $p+s=\pi$ , será  $k+s=p+s$ , y quitando  $s$ , quedará  $k=p$ ; pero estos son correspondientes, luego (282) serán paralelas. L. Q. D. D.

284 Teor. Si una secante corta á dos paralelas, se verifica: 1.º que los ángulos alternos internos son iguales; 2.º que los alternos externos tambien lo son; 3.º que tambien son iguales los correspondientes; 4.º que los dos internos juntos valen dos rectos, ó son el uno suplemento del otro; y 5.º que lo mismo se verifica en los externos.

Espl. Sean AB, DE (fig. 34) las paralelas y FK la secante; digo 1.º que los ángulos  $m=n$  y  $p=q$ ; 2.º que  $r=t$  y  $u=s$ ; 3.º que  $r=n$ ,  $p=s$ ,  $u=q$  y  $m=t$ ; 4.º que  $m+q=\pi$ ,  $n+p=\pi$ , y por lo mismo  $m$  es suplemento de  $q$ , y  $n$  de  $p$ ; y 5.º que  $r+s=\pi$ ,  $u+t=\pi$ , ó que  $r$  es suplemento de  $s$ , y  $u$  de  $t$ .

Dem. 1.º por el punto L, medio de la parte CO de la FK, interceptada por las paralelas, concíbese la GH perpendicular á una de las dos paralelas, la cual lo será tambien á la otra (280), y por lo mismo los dos triángulos GLO, CLH serán rectángulos en G y H; y como LO=LC por construcción, y los ángulos en L son iguales (257), dichos triángulos (273 corolario 2.º) serán iguales, y darán el ángulo en  $m=n$ ; y como los  $p$  y  $q$  son sus suplementos, serán (255) tambien iguales. L. 1.º Q. D. D.

2.º Como (§ 257)  $m=r$  y  $n=t$ , y por lo acabado de demostrar es  $m=n$ , será  $r=t$ ; del mismo modo se demuestra que  $u=s$ , que es L. 2.º Q. D. D.

3.º El ángulo  $m=r$  (257), y  $m=n$  por alternos internos; luego  $r=n$ ; del mismo modo se demuestra que  $p=s$ ,  $u=q$  y  $m=t$ , que es L. 3.º Q. D. D.

4.º Siendo  $m+q=\pi$ , resulta que por ser  $m=n$ , se tendrá  $n+q=\pi$ , y por lo mismo  $n$  es suplemento de  $q$ ; y como lo mismo se demuestra respecto de  $m$  y  $p$ , resulta L. 4.º Q. D. D.

5.º Siendo  $p+r=\pi$ , y  $p=s$ , será  $r+s=\pi$ , y por lo mismo  $r$  es suplemento de  $s$ ; y como lo mismo se demuestra de los  $u$  y  $t$ , resulta L. 5.º Q. D. D.

285 Teor. Si una recta es paralela á una de dos paralelas, lo es tambien á la otra.

Espl. Sean las rectas AB, DE paralelas, y la XZ

paralela con  $AB$ ; digo que tambien  $XZ$  será paralela con  $DE$

*Dem.* Por ser  $AB$  y  $XZ$  paralelas, se tiene (284 3.º)  $k=r$ ; y por serlo las  $AB$ ,  $DE$ , se tiene  $n=r$ ; luego  $k=n$ , luego  $XZ$  es (282) paralela á  $DE$ . L. Q. D. D.

286 Teor. *Las partes de paralelas interceptadas entre paralelas son iguales.*

*Espl.* Sean  $AB$ ,  $CD$  (fig. 35) dos paralelas; digo que si desde la  $AB$  se tiran á la  $CD$  las  $FG$ ,  $HE$ ,  $KL$ ,  $MN$  etc. paralelas entre sí, todas estas partes, y lo mismo las  $FH$ ,  $GE$ , ó  $HK$ ,  $EL$  etc. comprendidas por las paralelas, son iguales.

*Dem.* Tirese la secante  $GH$ , y se tendrán los triángulos  $FGH$ ,  $GHE$ , que por tener el lado  $GH$  común, el ángulo  $p=m$ , por alternos internos entre las paralelas  $AB$ ,  $CD$ , el ángulo  $n=q$  por la misma razon entre las  $FG$ ,  $HE$ , serán (261) iguales; luego se tendrá  $FG=HE$ ,  $FH=GE$ . Del mismo modo se demuestra de todas las demas, y resulta L. Q. D. D.

*Esc.* 1.º Si fuesen perpendiculares, sucedería lo mismo, y se deducirá, que las paralelas están equidistantes en todos sus puntos.

*Esc.* 2.º La igualdad de los triángulos  $FGH$ ,  $GHE$ , da el ángulo  $GFH=GEH$ ; y como  $n=q$ , y  $m=p$ , será sumando  $n+m=q+p$ , ó  $FGE=FHE$ .

287 Teor. *Si dos rectas cortadas por otra, forman con ella dos ángulos internos, que juntos valgan ménos que dos ángulos rectos, dichas líneas se encontrarán hacia el paraje donde forman dichos ángulos.*

*Espl.* Si las dos rectas  $UT$ ,  $AB$  (fig. 33), cortadas por la  $GH$ , forman los dos ángulos  $UGH$ ,  $AHG$ , tales que  $UGH+AHG < \pi$ , se llegarán á encontrar hacia la izquierda de la  $GH$ .

*Dem.* Si no se encuentran, serán paralelas (278); pero si en  $G$  formamos el ángulo  $HGC$  tal, que junto con el  $AHG$  valga dos rectos, ó  $\pi$ , la recta  $DC$  será paralela á la  $AB$ ; luego se tendrían tiradas por el punto  $G$  dos paralelas  $UT$ ,  $CD$ , á una misma recta  $AB$ , lo que no puede ser (279 cor. 2.º); luego dichas rectas prolongadas suficientemente, se encontrarán. Y esto se verificará hácia la izquierda de la  $GH$ , porque no pudiendo la  $GT$  volver á encontrar (244 cor. 3.º), en ningún punto á la  $GD$ , con ménos razon podrá encontrar á la parte

HB; luego se encontrarán hácia la izquierda, que es hácia donde forman los ángulos cuya suma es menor que dos rectos. L. Q. D. D. (\*)

288 Teor. *Dos ángulos que tienen sus lados paralelos, ó son iguales, ó son el uno suplemento del otro: son iguales, cuando sus vértices están vueltos hacia un mismo lado, ó en situacion enteramente opuesta; y son el uno suplemento del otro, cuando le tienen vuelto hácia diferente lado.*

*Espl.* Los dos ángulos  $n$ ,  $m$ , (fig. 36) que tienen sus lados paralelos y sus vértices vueltos hácia un mismo lado, ó los  $m$  y  $o$  que los tienen en una situacion enteramente opuesta, son iguales; y los DEG y  $m$ , que tienen los lados paralelos y sus vértices hácia diferente lado, son el uno suplemento del otro.

*Dem.* Prolónguese la DE hasta que encuentre á la BC en H; y será  $n=p$ , por correspondientes entre las paralelas GF, BC, siendo la secante DH; y  $p=m$  por correspondientes entre las paralelas AB, DH, y la secante BC; luego  $m=n$ ; y como  $n=0$ , por opuesto al vértice, será tambien  $m=0$ .

Ahora, DEG es suplemento de  $n$ : luego tambien lo será de su igual  $m$ , que era todo L. Q. D. D.

289 Teor. *Los tres ángulos de un triángulo valen juntos dos rectos, ó  $\pi$ .*

*Dem.* Si por el vértice A (fig 37), se tira la DE parale-

(\*) Esta proposicion la tomó Euclides por evidente; pues era el axioma XII (ó el XIII segun Clavio) del libro 1.º de sus *Elementos de Geometría*; y dista mucho de ser axioma. Para que se compruebe el sólido fundamento con que en varios parages de mis obras, he insistido tanto en manifestar lo mucho que se ha abusado tomando por axiomas, proposiciones que no lo son, voy á poner aqui uno, que no solo no es evidente para poderse tomar por axioma, sino que es una proposicion falsa.

Efectivamente, en los *Elementos de Geometría* por Thomas Simpson, pág. 5 se ponen diez axiomas ó verdades evidentes por si mismas; y entre ellas la que ocupa el 9.º lugar dice así.

*Si dos puntos D, F, en una recta MN (fig. 56 a) están puestos á desiguales distancias DC, FE de otra recta AB, en la misma superficie plana, dichas lineas prolongadas, por el lado de la distancia menor FE, se encontrarán la una á la otra\*.*

Esta proposicion es falsa. En efecto, supongamos que MN y AB (fig. 56 b) sean perpendiculares á FE, y por lo mismo serán paralelas. De cualquier modo que se tire la DC, que no sea paralela con FE, se verificará que  $DC > FE$ ; y á pesar de esto, las MN y AB no se encontrarán en parte alguna.

la al lado BC, se tendrá  $m=ACB$ ,  $n=B$ , por alternos internos entre las paralelas BC, DE, siendo las secantes AC, AB; luego sumando será  $m+n=ACB+B$ ; y añadiendo el ángulo  $o$ , será  $m+n+o=ACB+B+o$ ; pero (§ 254 cor. 3.º)  $m+n+o=\pi$ , luego  $ACB+B+o=\pi$ , que es L. Q. D. D.

Cor. 1.º Luego dados dos ángulos de un triángulo, se conocerá el tercero, restando de dos rectos la suma de los dos dados; y dado un ángulo, se hallará la suma de los otros dos, restándole de dos rectos; así, en un triángulo cualquiera un ángulo es suplemento de la suma de los otros dos, y al contrario; y en un triángulo rectángulo cada ángulo agudo es complemento del otro, pues entre los dos valen un recto.

Cor. 2.º Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, el tercero será igual al tercero; pues en ambos ha de ser lo que falta á los otros dos para dos rectos.

Cor. 3.º En el (§ 266) hemos demostrado, que el ángulo externo de un triángulo es mayor que cualquiera de los dos internos opuestos; ahora podemos deducir, que el ángulo externo de un triángulo es precisamente igual á la suma de los dos ángulos internos opuestos.

En efecto, si en la (fig. 37) se prolonga el lado BC hasta M, y se tira la CG paralela con BA, tendremos que el ángulo  $o$  con el  $l$  por alternos internos entre las paralelas AB, CG siendo CA la secante; el ángulo  $i$  es igual con el  $ABM$  por correspondientes entre las mismas paralelas siendo BCM la secante. Sumando ordenadamente estas ecuaciones, resulta que

$$\text{ángulo } o + \text{ángulo } ABC = \text{ángulo } l + \text{ángulo } i;$$

pero los dos ángulos  $l$  é  $i$  componen el ángulo ACM, que es el externo en el triángulo ABC; y los ángulos  $o$  y  $ABC$  son los dos internos opuestos; luego resulta lo que hemos asegurado.

Cor. 4.º Si dos triángulos isósceles tienen una misma base, el ángulo opuesto á esta base será menor en el triángulo en que los lados iguales son mayores; es decir, que si en los dos triángulos isósceles ACB, MDN, (fig. 37\*) suponemos que las bases AB, MN, son iguales; se verificará, que si los lados MD, DN iguales entre sí en el triángulo MDN, son mayores que los lados AC, BC,

tambien iguales entre sí en el triángulo  $ACB$ , el ángulo  $MDN$  será menor que el ángulo  $ACB$ .

En efecto, pues que  $MD$  lo suponemos mayor que  $AC$ , podremos tomar en  $MD$  una parte  $ML=AC=CB$ ; y uniendo el punto  $L$  con  $N$  por medio de la recta  $LN$ , resultará que el ángulo  $MNL$ , por ser parte del  $MND$ , será menor que él; y como  $MND=NMD$  por el supuesto de ser isósceles el triángulo  $MDN$ , se tendrá  $MNL < NMD$ ; y como el ángulo  $NMD$  es el mismo que el  $NML$ , resulta que en el triángulo  $LMN$  se tendrá  $LN > LM$ ; y como  $LM=AC=CB$  por construcción y ser isósceles el triángulo  $ACB$ , resulta que los triángulos  $ACB, LMN$  tienen  $AC=LM, AB=MN$  y  $LN > CB$ ; luego en virtud de lo demostrado (272 cor.) será el ángulo  $LMN > CAB$ ; y como  $LMN$  es el mismo ángulo que el  $DMN$ , se tendrá  $DMN > CAB$  (a); y como  $DNM=DMN$ , y  $CAB=CBA$ , se tendrá tambien  $DNM > CBA$ ; y sumando esta desigualdad con la (a), será  $DMN+DNM > CAB+CBA$  (b).

Pero, por el teorema que acabamos de demostrar, se tiene  $DMN+DNM+MDN=\pi$ ; y  $CAB+CBA+ACB=\pi$ ; y como cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, resultará  $DMN+DNM+MDN=CAB+CBA+ACB$ .

Si del primer miembro de esta ecuacion, restamos  $DMN+DNM$ , que es el primero de la desigualdad (b) y del segundo restamos  $CAB+CBA$ , que es el segundo de la misma desigualdad, en virtud de lo espuesto (61..2.º), se tendrá  $MDN < ACB$ .

Cor. 5.º Si haciendo centro en  $C$  (fig. K que se halla entre las 159, 162 y 163 lámina 4.ª) uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles  $BAC$  con un radio igual á  $AC$ , uno de los lados iguales, se traza un arco  $AD$  y por el punto  $D$  en que encuentre al lado opuesto ó á su prolongacion, se tira la  $DC$ ; digo que el ángulo  $DCE$ , formado por la prolongacion del lado desigual  $BC$ , y la linea tirada  $DC$ , es triplo del  $ACB$ , ó de su igual  $ABC$ .

Porque, cuando  $CD$  cae dentro del triángulo, se tiene

$$DCE = DBC + BDC = DBC + DAC + DCA;$$

y como  $DCA = \pi - 2DAC$ , se tendrá

$$DCE = DBC + DAC + \pi - 2DAC = DBC + \pi - DAC;$$

pero  $\pi - DAC = \pi - BAC = 2ABC$  ;  
 luego  $DCE = DBC + 2ABC = 3ABC = 3ACB$ . Cuando la  
 CD cae fuera del triángulo, se tiene  
 $DCE = DBC + BDC = DBC + DAC = DBC + 2ABC$ .....  
 $+ ABC + ACB = 3ABC = 3ACB$ , que era. L. Q. D. D. (\*).

*Del círculo y de las rectas consideradas en él.*

290 Teor. *El diámetro es la mayor de todas las cuerdas.*

*Éspl.* Sea AB un diámetro (fig. 38), y AD una cuerda; digo que  $AD < AB$  ó que  $AB > AD$ .

*Dem.* Tirando el radio OD al otro extremo de la cuerda, se tendrá (§ 268)  $AO + OD > AD$ ; pero  $AO + OD = AB$ , luego  $AB > AD$ , que era. L. Q. D. D.

(\*) Fundándose en este corolario y en el caso en que CD cae fuera del triángulo isósceles CAB, el Sr. Don Joaquin de Loresecha, que ha pertenecido á los Cuerpos facultativos de Ingenieros y Artillería, y en la actualidad se halla de oficial de la Secretaria de Guerra, ha inventado un instrumento, para dividir un ángulo en tres partes iguales; y con su auxilio, cuando está bien construido, queda resuelto gráficamente el famoso problema de la *triseccion del ángulo* ó del *arco*, que hasta el presente no se puede resolver por la Geometría elemental, sino en el caso de ser recto el ángulo ó de ser el arco un cuadrante.

El espresado instrumento, que el Sr. de Loresecha ha tenido la bondad de regalarme, podrá llamarse *compas de triseccion angular* ó *trisector del ángulo*, y está representado en la figura T entre las 162, 165 y 169 al fin de la lámina 4.<sup>a</sup> de este tomo.

Consiste en dos reglas AB, CD, unidas con otras dos *ab, bc* iguales entre si y mas pequeñas que las anteriores; pero que tienen un movimiento giratorio al rededor del punto *b* fijo en la regla AB, al rededor del punto *a* fijo en la CD, y del punto *c* fijo tambien en una corredera *ce* igual á las reglas *ab, y bc*, que se mueve en la ranura *hi* de la regla CD. Esta disposicion permite que la regla CD se aproxime lo que se quiera á la AB.

Para manifestar el uso de este instrumento, supongamos que FEC sea el ángulo que se quiere dividir en tres partes iguales. Colóquese la regla AB de modo que su canto interior coincida con uno de los lados del ángulo, tal como GE, y la regla *ba* con el lado EF. Despues se hace girar en *a* la regla CD hasta que el punto *c*, canto extremo de la corredera, coincida en *e'* con el canto interior de la regla AB, tomando entónces la regla CD, la posicion *CD'* y el punto *c* la del *c'*: en dicho caso, trazando el ángulo *c'etb*, este será la tercera parte del dado. La razon es la siguiente: siendo por construccion  $ab = bc = ce$ , con el movimiento se ha constituido el triángulo *bete'* isósceles, y el *abc'* tambien isósceles, siendo *ac'* prolongacion de *ce'*, y por consiguiente es el caso del corolario anterior.

Debe observarse, que siendo el ángulo de 155° el limite de los que este instrumento puede llegar á dividir, que es el caso en que las dos reglas *ab, y bc* coinciden, los ángulos que pasen de dicha graduacion, se subdividirán en dos partes iguales etc.

Los ángulos, por pequeños que sean, no tienen mas limitacion que las que provienen de la mayor ó menor perfeccion del instrumento y del grueso del lápiz ó tiralíneas.

291 Teor. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, arcos iguales tienen cuerdas iguales, y cuerdas iguales subtenden arcos iguales.*

*Espl.* Sea  $A\text{DBF}$  (fig. 39) un círculo; digo que si se suponen los arcos  $AzD$ ,  $AzF$  iguales, las cuerdas  $AD$ ,  $AF$  tambien lo serán; y si se suponen las cuerdas  $AD$ ,  $AF$  iguales, los arcos  $AzD$ ,  $AzF$  serán iguales.

*Dem.* 1.º Tirese el diámetro  $AB$ ; y concibiendo doblada por él la figura, la parte  $AFB$  se confundirá (249) con  $ADB$ ; y por ser iguales los arcos  $AzD$  y  $AzF$ , el punto  $F$  caerá sobre el punto  $D$ ; pero el punto  $F$  es tambien extremo de la cuerda  $AF$ , y  $D$  lo es de la  $AD$ : y ademas dichas rectas tienen comun el punto  $A$ ; luego se han confundido sus extremos; luego (245) serán iguales. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si  $AD=AF$ , tirando los radios  $CD$ ,  $CF$ , los triángulos  $ACD$ ,  $ACF$ , serán iguales (259), y darán el ángulo  $CAF=$  al  $CAD$ . Esto supuesto, si se dobla la figura por el diámetro  $AB$ , la parte  $AFB$  caerá sobre  $ADB$ , y el punto  $F$  caerá sobre el punto  $D$ , por la igualdad de los triángulos; pero los puntos  $F$  y  $D$ , extremos de las cuerdas, son tambien extremos de los arcos; luego habiéndose confundido los extremos de los arcos, serán iguales. L. 2.º Q. D. D.

*Cor.* La igualdad de los triángulos  $ACD$ ,  $ACF$  darán el ángulo  $ACD=$  al  $ACF$ ; de donde se deduce, que si desde los extremos de dos arcos iguales de un mismo círculo ó de círculos iguales, se tiran radios al centro, los ángulos formados por dichos radios son iguales.

292 Teor. *En un mismo círculo; ó en círculos iguales, el mayor arco tiene mayor cuerda; y la mayor cuerda subtende á mayor arco.*

*Dem.* 1.º Porque si se supone el arco  $AzH>AzD$  tirando las cuerdas  $AD$ ,  $AH$ , y los radios  $CD$ ,  $CH$ , los dos lados  $AC$ ,  $CH$  del triángulo  $ACH$ , serán iguales á los dos lados  $AC$ ,  $CD$  del  $ACD$ ; el ángulo  $ACH$ , que es todo respecto del  $ACD$ , será mayor que él; y por lo mismo (272) el tercer lado  $AH>AD$ , que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Si  $AH>AD$ , digo que será  $AzH>AzD$ . Porque si esto no se verifica, será  $AzH=$  ó  $<AzD$ .

Si  $AzH=AzD$ , resultará (§ 291)  $AH=AD$ , que es contra el supuesto; si  $AzH<AzD$ , se tendría por la primera parte  $AH<AD$ , que tambien es contra el supuesto; luego no pudiendo ser  $AH$  igual ni menor que  $AD$ , será  $AH>AD$ , que es L. 2.º Q. D. D.

293 Teor. *A una recta que corta á la cuerda de un círculo, le pueden suceder tres cosas: 1.<sup>a</sup> que pase por el centro; 2.<sup>a</sup> que sea perpendicular á la cuerda; y 3.<sup>a</sup> que la divida en dos partes iguales; digo que si se verifican dos de estas cosas se verificará la tercera.*

*Dem.* Supongamos primero que la CP (fig. 40), salga del centro y sea perpendicular á la cuerda FM; digo que divide á la cuerda en dos partes iguales, esto es, que  $FP=PM$ .

En efecto, por salir la CP del centro tiene un punto C equidistante de F y de M; y por ser perpendicular los tiene todos (273 cor. 3.<sup>o</sup>); luego el punto P que es punto de la CP, está equidistante de F que de M; luego las rectas FP, PM, que miden estas distancias, serán iguales. L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

2.<sup>o</sup> Si la CP sale del centro y divide á la FM en dos partes iguales, digo que es perpendicular á la FM.

En efecto, por salir la CP del centro, tiene el punto C equidistante de F y de M; y por dividir á la cuerda en dos partes iguales tiene el punto P equidistante de F y de M; luego la CP tiene dos puntos C y P equidistantes de los F y M de la FM; luego (274) le será perpendicular. L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

3.<sup>o</sup> Si la CP divide á la cuerda FM en dos partes iguales, y le es perpendicular, pasará por el centro.

En efecto, por dividir la CP á la FM en dos partes iguales, tiene el punto P, equidistante de F que de M; y por serle perpendicular, pasa (274 cor.) por todos los puntos que en dicho plano están á igual distancia de F que de M; y como el centro es uno de estos, se deduce que la CP pasará por él. L. 3.<sup>o</sup> Q. D. D.

294 Teor. *La recta que cumple con estas circunstancias, divide en dos partes iguales al arco que la cuerda subtende.*

*Dem.* Porque siendo perpendicular, y teniendo un punto equidistante de F y de M, los tendrá todos; luego el punto Q donde la CP vaya á encontrar al arco FQM, también estará equidistante de F que de M; luego las cuerdas FQ y QM serán iguales; luego también lo serán los arcos FqQ, QmM, que es L. Q. D. D.

*Esc.* Recíprocamente, si una recta CP sale del centro y divide al arco en dos partes iguales, será perpendicular á la cuerda FM de dicho arco. Porque

por las condiciones con que está tirada, tiene el punto C y el punto Q equidistantes de los extremos F, M, de la cuerda FM.

295 Teor. Si en un círculo se tiran dos cuerdas paralelas, los arcos que estas interceptan serán iguales.

Espl. Sean FM y fm estas dos paralelas; digo que los arcos Ff, Mm son iguales.

Dem. Si desde el centro C tiramos una recta CP perpendicular á una de ellas, lo será igualmente á la otra (280), y dividirá (293 y 294) tanto á ellas como á los arcos FQM, fQm; en dos partes iguales, y se tendrá  $FfQ = MmQ$ ,  $fQ = mQ$ , restando estas ecuaciones será  $FfQ - fQ = MmQ - mQ$ , ó arco  $Ff = Mm$ , que era L. Q. D. D.

296 Teor. Dados tres puntos A, B, C (figura 41) que no esten en línea recta, se puede siempre hacer pasar por ellos una circunferencia de círculo.

Constr. Unanse dichos puntos por medio de las rectas AB, BC, y divídanse estas en dos partes iguales por medio de las perpendiculares EL, KG, las cuales se encontrarán en el punto O, que será el centro.

Dem. En efecto, si no se encuentran, serán paralelas; y en este caso la AB perpendicular á DE, será perpendicular (280) á FG en el punto K; pero BK, prolongacion de AB, es diferente de BFC, pues que los tres puntos A, B, C, no están en línea recta; luego tendríamos dos perpendiculares BF, BK, tiradas desde un mismo punto B, á la recta GK, lo que es imposible (266 cor. 3.º); luego las perpendiculares DE, FG, se cortarán en un punto tal como O.

Ahora, por pertenecer el punto O á la perpendicular DE, está á igual distancia de los dos puntos A y B; el mismo punto O, por pertenecer á la perpendicular FG, está á igual distancia de los dos puntos B, C; luego las tres distancias OA, OB, OC, son iguales; luego la circunferencia descrita haciendo centro en O con el radio OB, pasará por los tres puntos A, B, C, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.º Para trazar una circunferencia por tres puntos dados ó por los tres vértices de un triángulo, se aplicará la construcción del teorema.

Cor. 2.º Para hallar el centro de un círculo, ó de un arco de circunferencia, se tirarán de un modo cualquiera dos cuerdas AB, BC, con tal que no sean pa-

rales; se dividirán en dos partes iguales por medio de perpendiculares, y el punto donde se encuentren será el centro.

297 Cuando una recta corta á la circunferencia de un círculo, teniendo parte dentro y parte fuera, se llama *secante*: tal es la AB (fig. 42). Y cuando una recta es tal que no tiene mas de un punto comun con la circunferencia, teniendo fuera todo lo demas, aunque se la prolongue quanto se quiera, se llama *tangente*: tal es la CE. El punto D, que es comun á la circunferencia y á la tangente se llama *punto de contacto*.

298 Teor. Toda recta CE perpendicular al extremo D de un radio, es tangente del círculo.

Dem. Por ser CE perpendicular á OD, esta lo será á CE (§ 254 cor. 2.<sup>o</sup>); y como desde un punto solo se puede tirar una perpendicular á una recta, se verificará que todas las rectas tiradas desde O á la CE, serán oblicuas; y se tendrá (§ 273)  $ON > OD$ ; luego el punto N estará fuera del círculo; luego la recta CDE no tiene comun con la circunferencia sinó el punto D estando toda ella fuera; luego es tangente. L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce, que, para tirar una tangente por un punto dado en una circunferencia, se tirará el radio correspondiente á dicho punto, y en el extremo de este se levantará una perpendicular.

299 Teor. Toda tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto.

Dem. Por suponerse la CE tangente, todos sus puntos están fuera del círculo, excepto el de contacto D; luego toda recta que desde el centro termine en la CE, es mayor que la OD; luego la OD es la línea mas corta que desde O se puede tirar á la CE; luego es perpendicular. L. Q. D. D.

#### De los ángulos considerados en el círculo.

300 Teor. Si haciendo centro en el vértice de un ángulo, con un radio cualquiera se traza un arco, y se concibe dividido este en un número cualquiera de partes iguales, y por los puntos de division se tiran radios al

*vértice, los ángulos parciales en que quede dividido el ángulo dado serán iguales.*

*Espl.* Sea el ángulo COA (fig. 43); digo que si con un radio AO, se traza un arco ABC, y se concibe dividido este en partes iguales AB, BD, etc. y por los puntos de division B, D, etc. se tiran los radios OB, OD, etc. los ángulos AOB, BOD, etc. serán iguales.

*Dem.* Doblando la figura por el radio OB, se tendrá (243) que el arco AB caerá sobre el arco BDC: y por ser iguales los arcos AB, BD, el extremo A del primero caerá sobre el extremo D del segundo; luego habiéndose confundido el punto A con el D, las rectas AO, OD, que parten desde un mismo punto O, también se habrán confundido (245); luego (251 esc.) los ángulos serán iguales. Como lo mismo se demostraría de los demas, resulta L. Q. D. D.

301 Teor. *Si desde los vértices O, o, de dos ángulos AOC, aoc, se describen con un mismo radio dos arcos de círculo, la relacion de los arcos comprendidos entre los lados de cada ángulo, será la misma que la de estos ángulos.*

*Espl.* Aquí pueden ocurrir dos casos: ó que los dos arcos AC, ac tengan una comun medida (245 esc.), ó que no la tengan.

*Dem.* 1<sup>o</sup> Si los dos arcos AC y ac tienen por comun medida al arco AB=ab, colocándola sobre cada uno de ellos tantas veces como se pueda, quedarán divididos ambos en partes iguales; y llamando m al número de partes iguales á AB que contiene el arco AC, y n al número de partes iguales á ab=AB, que contiene el ac, se tendrá

$$AC=m \times AB, ac=n \times AB;$$

y formando proporcion y simplificando por AB, será

$$AC:ac::m \times AB:n \times AB::m:n;$$

ahora, si por los puntos de division se tiran los radios OB, etc. ob, etc. el ángulo AOC quedará dividido (300) en tantos ángulos iguales con AOB, como partes iguales á AB contenía el arco CA, esto es, en m ángulos iguales: y por la misma razon el ángulo aoc quedará dividido en n ángulos iguales con aob=AOB por lo demostrado (§ 291 cor.); y se tendrá AOC=m×AOB, aoc=n×aob=n×AOB; y formando proporcion será AOC:aoc::m×AOB:n×AOB::m:n;

y como esta proporcion y la anterior tienen comun la razon

$m:n$ , resultará (§ 184, 2.<sup>a</sup>)  $AC:ac::AOC:aoc$ . Luego la relación de los arcos etc.

2.<sup>o</sup> Si los arcos  $AC, ac$  son inconmensurables, digo que la relación de dichos arcos no puede ser mayor ni menor que la de los ángulos, y de consiguiente será igual.

Si se supone (fig. 44) la relación de los ángulos menor que la de los arcos, ó  $AOC:aoc < AC:ac$ , para que la segunda razón sea igual con la primera, se necesitará que su consecuente  $ac$  crezca, y se convierta v. g. en  $ad$ ; lo que dará

$$AOC:aoc::AC:ad.$$

En este caso, concibiendo dividido el arco  $AC$  en dos partes iguales, y luego en otras dos etc., se llegará (229) á un arco menor que  $cd$ , el cual colocado sucesivamente sobre el  $acd$ , hará que uno de los puntos de división caiga entre  $c$  y  $d$ , v. g. en  $e$ ; con lo cual los ángulos  $AOC$  y  $aoc$ , guardarán la misma relación que los arcos comensurables  $AC, ac$ , y se tendrá  $AOC:aoc::AC:ae$ ; pero esta proporción tiene los mismos antecedentes que la anterior; luego (184, 2.<sup>a</sup> cor.) los consecuentes darán  $aoc:aoc::ad:ae$ ; pero este es un absurdo, pues la primera razón  $aoc:aoc$  es de menor desigualdad, y la segunda  $ad:ae$ , es de mayor; luego la relación de los ángulos no puede ser menor que las de los arcos.

Tampoco puede ser mayor; porque si se supone

$AOC:aoc > AC:ac$ , disminuyendo el consecuente de la segunda razón, lo suficiente para que resulte igual con la primera, y suponiendo que se convierta en  $ad'$ , se tendrá  $AOC:aoc::AC:ad'$ ; y concibiendo dividido como ántes el arco  $AC$  en partes iguales, bastante pequeñas, para que colocada una sobre el arco  $ac$  las veces que se necesite, caiga un punto de división entre  $c$  y  $d'$ , como en  $e'$ , se tendrá  $AOC:aoc::AC:ae'$ ; que (184 2.<sup>a</sup> cor.) dará  $aoc:aoc::ad':ae'$  que es un absurdo, porque una razón es de mayor desigualdad, y otra de menor. Luego si la razón de los ángulos no puede ser menor ni mayor que la de los arcos, deberá ser igual. L. Q. D. D.

302 Por esta razón se toma, para la *medida de los ángulos*, el arco de círculo comprendido entre sus dos lados, y descrito desde su vértice como centro.

Pera entender bien esta medida, debe saberse que la circunferencia se considera dividida en 360 partes iguales, que se llaman *grados*; cada grado en 60 partes iguales, que se llaman *minutos*; cada minuto en 60 partes iguales, que se llaman *segundos*; cada segundo en 60 *ter-*

ceros etc. Los grados se señalan con una *o* sobre el número, los minutos con un acento, los segundos con dos etc.: de manera, que  $57^{\circ}17'44''22'''$ , quiere decir 57 grados, 17 minutos, 44 segundos, y 22 terceros. De consiguiente, la medida de un ángulo recto es un cuadrante ó  $90^{\circ}$ , que se señala con  $\frac{1}{2}\pi$ .

303 Teor. *El ángulo formado por una tangente y una cuerda tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende.*

*Espl.* Sea el ángulo  $\text{ETA}$  (fig. 45), formado por la cuerda  $\text{AT}$  y por la tangente  $\text{EM}$ ; digo que tiene por medida la mitad  $\text{FT}$  del arco  $\text{TFA}$  que la cuerda  $\text{AT}$  subtende.

*Constr.* Tírese el diámetro  $\text{HF}$  perpendicular á la cuerda  $\text{AT}$ , el  $\text{BD}$  paralelo á la misma cuerda, y tírese el radio  $\text{CT}$ .

*Dem.* Por ser  $\text{FH}$  perpendicular á  $\text{AT}$ , lo será también á su paralela  $\text{BD}$  (§ 280); luego el ángulo  $\text{FCD}$  es recto; el ángulo  $\text{ETC}$  también es recto (299), luego (253) será  $\text{FCD}=\text{ETC}$ .

Ahora, el ángulo  $\alpha=p$ , por alternos internos entre las paralelas  $\text{AT}$ ,  $\text{BD}$ , siendo  $\text{CT}$  la secante; luego restando estas ecuaciones, se tendrá  $\text{FCD}-\alpha=\text{ETC}-p$ ; ó  $n=\text{ETA}$ ; pero, por tener  $n$  su vértice en el centro del círculo, tiene por medida el arco  $\text{FT}$ ; luego el ángulo  $\text{ETA}$ , que es su igual, tendrá la misma medida  $\text{FT}$ ; y como  $\text{FT}$  es la mitad de  $\text{TFA}$  (294), resulta *L. Q. D. D.*

*Esc.* Como entre los dos ángulos  $\text{ETA}$ ,  $\text{ATM}$ , han de valer dos rectos, el valor del ángulo  $\text{ATM}$  será lo que le falte á la mitad de  $\text{AFT}$  para la semicircunferencia, ó su medida será la mitad del arco  $\text{ABHT}$ ; luego ya se considere el arco mayor ó el menor que la cuerda subtende, se verifica la proposición.

304 Teor. *El ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, formado por el concurso de dos cuerdas, tiene por medida la mitad del arco que abrazan sus dos lados.*

*Espl.* Sea el ángulo  $\text{DTE}$  (fig. 46), cuyo vértice  $\text{T}$  está en la circunferencia, formado por las dos cuerdas  $\text{TE}$ ,  $\text{TD}$ ; digo que tiene por medida la mitad del arco  $\text{ED}$  que sus dos lados abrazan.

*Dem.* Porque si en  $\text{T}$  se concibe la tangente  $\text{ATB}$ , los tres ángulos  $\text{ATD}$ ,  $\text{DTE}$ ,  $\text{ETB}$ , valdrán juntos (254 cor. 3<sup>o</sup>)

la mitad de la circunferencia  $TEDM$ ; pero el  $ATD$ , por lo acabado de demostrar, tiene por medida la mitad de  $TMD$ , y el  $BTE$  la mitad de  $TE$ ; luego el  $DTE$  tendrá por medida la mitad de  $DE$ , que era L. Q. D. D.

*Cor. 1.º* Si se unen los puntos  $D$  y  $E$  con el centro  $C$ , el ángulo  $DCE$  tendrá por medida todo el arco  $DE$ , y  $DTE$  su mitad; luego será  

$$DCE = 2DTE.$$

Al ángulo  $DCE$ , por tener su vértice en el centro, se le llama ángulo *central*, y al  $DTE$ , por tener su vértice en la circunferencia, se le llama ángulo *inscrito*; luego el ángulo central es duplo del ángulo inscrito.

*Cor. 2.º* Todos los ángulos  $BAE$ ,  $BCE$ ,  $BDE$  (figura 47), que tienen sus vértices en la circunferencia é insisten sobre un mismo arco  $BE$ , son iguales; porque todos tienen por medida la mitad del arco  $BE$  (\*).

(\*) El Señor D. *Joaquin de Loresecha*, que ha pertenecido á los cuerpos facultativos de Ingenieros y Artillería, y en la actualidad se halla de oficial de la Secretaría de Guerra, fundándose en esta propiedad, ha excogitado un importante procedimiento para *determinar los puntos que se quieran de una circunferencia, con tal que se den tres, sin necesidad de conocer el centro, ni el radio*; lo cual es muy útil aunque se conociera el radio, si este fuese demasiado grande etc.

Sean los tres puntos dados  $a, b, c$ , (fig. 47<sup>º</sup> que se halla colocada entre las figuras 38, 47, y 48 de la lámina 1.<sup>a</sup>). Únanse dichos tres puntos por medio de las tres rectas  $ab, ac, bc$ . Divídase el ángulo  $bac$  en un número cualquiera de partes iguales, que lo mas sencillo es en dos, por medio de la recta indefinida  $ad$ , y se tendrá  $\text{áng. } bad = \text{áng. } dac$ . Por la parte exterior de la  $bc$ , fórmese el ángulo  $bcs = bad$ , y el punto  $e$  en que el lado  $cs$  encuentre á la recta  $ad$  será punto de la circunferencia.

En efecto, por esta construccion resulta que el ángulo  $dec$ , como esterno del triángulo  $aec$ , será igual con

$$eac + eca = bac - bad + acb + bce;$$

pero  $bad = bce$  por construccion, luego resulta  $dec = bac + acb$ ; pero, si prolongamos  $ab$  hasta  $l$ , tendríamos que el ángulo  $lbc$ , esterno del triángulo  $abc$ , será igual con  $bac + acb$ ; y como cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, resul-

Cor. 3.º *Todo ángulo  $ACB$  (fig. 48), cuyo vértice está en la circunferencia, y cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro  $AB$ , es recto; porque tiene por medida la mitad del arco  $AEB$ , que es un cuadrante.*

Cor. 4.º *Todo ángulo  $ACD$ , cuyo vértice esté en la circunferencia y abrace un arco mayor que la semicircunferencia, será obtuso; porque la mitad de este arco será mayor que un cuadrante; y todo ángulo  $ACE$ , cuyo vértice esté en la circunferencia y sus lados abracen un arco menor que la semicircunferencia, es agudo; porque su mitad será menor que un cuadrante.*

305 Probl. *En el extremo  $B$  de una recta  $AB$  (fig. 49), que no se puede prolongar, levantar una perpendicular.*

tará  $dec=IBC$ ; y siendo estos ángulos iguales, tendrán suplementos iguales, luego será  $cea=abc$ ; pero, siendo el punto  $b$  por el supuesto un punto de la circunferencia, el ángulo  $abc$  tiene por medida la mitad del arco que la cuerda  $ac$  subtende; luego el ángulo  $aec$ , que es igual con  $abc$ , tendrá la misma medida, esto es, la mitad del arco que la cuerda  $ac$  subtende. De donde se deduce, que el punto  $e$  se halla en la circunferencia de que se trata. Porque si estuviese fuera de la circunferencia, tendría por medida la mitad del mismo arco que subtende la cuerda  $ac$  menos (§ 457 T. I P. II T. E.) la mitad del arco convexo que abrazasen las  $ea, ec$ ; y si el punto  $e$  se hallase dentro de la circunferencia, tendría por medida (§ 456 T. I P. II T. E.) la mitad del arco subtendido por  $ac$  mas la mitad del arco que cortasen en la circunferencia las prolongaciones de  $ae$  y  $ce$ .

Para determinar los puntos que estén inferiores á los dados  $a, b, c$ , se procederá del modo siguiente. Fórmese en  $b$  el ángulo  $abm=bac$ ; y en  $a$  el ángulo  $bap=abc$ , y el punto  $n$  en que la  $ap$  encuentre á la  $bm$  será punto de la circunferencia. Porque de este modo, resulta (289 cor. 2.º) que  $\text{áng. } anb=\text{áng. } acb$ ; pero el ángulo  $acb$ , estando el punto  $c$  en la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco que subtende la cuerda  $ab$ ; luego el ángulo  $anb$  tiene por medida la mitad del arco que subtende la misma cuerda  $ab$ , y el punto  $n$  se halla en la circunferencia de que se trata.

*Res. y Dem.* Haciendo centro en un punto cualquiera  $C$ , trácese una circunferencia que pase por  $B$ , y que además corte en otro punto cualquiera  $A$  á dicha recta. Por este punto tírese el diámetro  $AD$ ; únase el extremo  $D$  de dicho diámetro con el  $B$  por medio de la  $BD$ ; y esta será la perpendicular pedida. Porque el ángulo  $ABD$  es recto (304 cor. 3.<sup>o</sup>), y por lo mismo la  $BD$  es perpendicular á la  $AB$ .

306. Probl. Dado un punto  $A$  (fig. 50) fuera de un círculo  $DEB$ , tirarle una ó dos tangentes.

*Res. y Dem.* Únase dicho punto  $A$  con el centro  $C$  del círculo, por medio de la  $AC$ ; sobre esta recta como diámetro, trácese una circunferencia; desde el punto dado tírense á los puntos de intersección  $D, B$ , las rectas  $AD, AB$ , las cuales serán las tangentes pedidas. Porque tirando los radios  $CD, CB$ , los ángulos  $ADC, ABC$ , que tienen su vértice en la circunferencia del círculo  $BDA$ , y cuyos lados pasan por los extremos del diámetro  $AC$ , serán rectos; y por lo mismo la  $AD$  será perpendicular á  $DC$ , y la  $AB$  á  $CB$ ; y como  $DC, CB$  son radios del círculo dado  $DEB$ , resulta que las  $AD, AB$ , perpendiculares á estos radios son tangentes de dicho círculo.

*De las figuras en general, y propiedades de los cuadriláteros.*

307 Se llama *figura* el espacio terminado por líneas. En la idea de figura entran estas dos: la del espacio cerrado, que se llama *área* ó *superficie*, y la de las líneas que le cierran, que se llama *contorno* ó *perímetro*. Las figuras terminadas por rectas, se llaman *rectilíneas*; las terminadas por una ó muchas curvas, *curvilíneas*; y las que por líneas rectas y curvas, *mistilíneas*.

Cuando dos figuras tienen sus perímetros de igual estension, se llaman *isoperímetras*; cuando sus superficies son iguales, se dice que son *equivalentes*; y cuando son tales que superpuesta la una á la otra se confunden exactamente, se llaman *iguales*.

Se dice que una figura está *inscrita* en un círculo, ó que un círculo está *circunscrito* á una figura, cuando to-

dos sus ángulos están en la circunferencia de dicho círculo, como  $ABDC$  (fig. 51).

Cuando una figura es tal que todos sus lados son tangentes de un círculo, se dice que está *circunscrita* al círculo, ó que el círculo está *inscrita* en la figura: tal es la  $ABCDE$  (fig. 52).

En general, se llama *base* de una figura al lado sobre que se considera insistiendo; *altura*, la perpendicular bajada á la base desde el punto de la figura que diste mas de la base; y se llama *diagonal* toda línea  $AD$  (fig. 51) que desde un ángulo va á parar á otro no inmediato.

308 De esto y de lo dicho (270 y 271) se deduce, 1.º que el perímetro de una figura inscrita en una curva es menor que la misma curva; 2.º de dos figuras inscritas en una curva, la que tenga mayor número de lados tiene mayor perímetro; 3.º el perímetro de toda figura, circunscrita á una curva, es mayor que la misma curva; y 4.º de dos ó mas figuras circunscritas á una curva, la que tenga mayor número de lados tiene menor perímetro; pues aquí llamamos perímetro á lo que allí conjuntos de rectas.

309 Cuando una figura está terminada por cuatro rectas, se llama *cuadrilátero*. Si de estas cuatro rectas ninguna es paralela á otra, la figura se llama *trapezoide*, como  $ABCD$  (fig. 53); cuando dos son paralelas entre sí, como  $AD$ ,  $BC$  (fig. 54), se llama *trapecio*; y *paralelogramo*, cuando las cuatro rectas son paralelas de dos en dos.

Hay cuatro especies de paralelogramos: primero, cuando los ángulos  $A$  y  $D$  (fig. 55) adyacentes á un mismo lado  $AD$ , y los lados  $AB$ ,  $AD$  que forman un mismo ángulo, son desiguales, el paralelogramo se llama *romboide*; cuando los ángulos adyacentes á un mismo lado son desiguales, é iguales los lados que forman un mismo ángulo, como  $ABCD$  (fig. 56), se llama *rombo*; cuando los ángulos adyacentes á un mismo lado son iguales, y los lados que forman un mismo ángulo desiguales, como en la (fig. 57), se llama *rectángulo*; y cuando los lados que forman un mismo ángulo son iguales, y los ángulos adyacentes á un mismo lado también son iguales, como se vé en  $ABCD$  (fig. 58), se llama *cuadrado*.

Se llama *base* de un paralelogramo el lado sobre que se considera insistiendo, y la perpendicular á la base ó á su prolongacion, desde el lado opuesto, se llama *altura*; así, BE es la altura de los paralelogramos ABCD (figs. 55 y 56), cuando se considera por base el lado AD. En un trapecio se llaman *bases* los dos lados paralelos; y *altura* la perpendicular tirada desde uno de ellos al otro.

310 Teor. *Los cuatro ángulos de un cuadrilátero valen  $2\pi$  ó cuatro rectos.*

*Dem.* Porque (figs. 53, 54 y 55), tirando la diagonal AC quedará dividido en dos triángulos, cuyos ángulos valen lo mismo que los del cuadrilátero; y como los ángulos de cada triángulo valen  $\pi$ , los del cuadrilátero valdrán  $2\pi$  ó cuatro rectos. L. Q. D. D.

311 Teor. *Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, será un paralelogramo.*

*Espl.* Si los dos lados AB, CD del cuadrilátero ABCD (fig. 59), son iguales y paralelos, los otros dos lados AD, BC, también lo serán, y la figura será un paralelogramo.

*Dem.* Si se tira la diagonal AC, se tendrán dos triángulos BAC, DAC, que tienen  $AB=CD$  por el supuesto; el lado CA comun, y el ángulo  $m=n$ , por alternos internos entre las paralelas AB, CD, y la secante AC; luego son iguales (260); luego  $AD=BC$ , y el ángulo  $p=q$ ; pero estos son alternos internos entre las rectas AD, BC, cortadas por otra AC; luego dichas rectas serán paralelas (281), y la figura un paralelogramo. L. Q. D. D.

312 Teor. *Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero será un paralelogramo.*

*Espl.* Si en el cuadrilátero ABCD, se supone  $AD=BC$ , y  $BA=CD$ , digo que AD será paralela con BC, y BA con CD, y la figura un paralelogramo.

*Dem.* Porque tirando la diagonal AC, los triángulos ABC, ADC serán iguales (259); luego el ángulo  $m=n$ , y  $p=q$ ; la primera ecuacion da, que CD es (281) paralela con BA, y la segunda que AD lo es á BC; luego la figura es un paralelogramo. L. Q. D. D.

313 Si aplicamos aquí lo demostrado (286), y se sustituye el lenguaje de *paralelogramo, lados, etc.* se tendrá:  
1.º que *la diagonal de un paralelogramo le divide en dos*

*triángulos iguales.* 2.º *En todo paralelogramo son iguales los lados y ángulos opuestos.* 3.º *Dos ángulos A, D, contiguos á un mismo lado de un paralelogramo, son (284..4.º) el uno suplemento del otro.* 4.º *Si uno de los ángulos es recto, lo son todos.* 5.º *Si dos lados contiguos de un paralelogramo son iguales, lo son todos los demas.*

314 *Si dos paralelogramos tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, serán iguales; pues los otros dos lados lo serán por opuestos á los dados; y los ángulos serán, el opuesto igual al dado, y los adyacentes tambien serán iguales, por ser suplementos suyos.*

Ademas puede observarse, que si por la parte superior ó inferior de la AD, y por la derecha ó izquierda de la AB, se tirasen varias rectas, y por el punto C se tirasen paralelas respectivamente á dichas rectas, resultarían una multitud de paralelogramos, que todos tendrían una misma diagonal AC, como se ve en la (fig. 59\*).

#### *De los polígonos.*

---

315 Una figura terminada por mas de cuatro líneas se llama *polígono*; si está terminada por cinco lados, se llama *pentágono*, si por 6, *exágono*; si por 7, *eptágono*; si por 8, *octógono*; si por 9, *eneágono*; si por 10, *decágono*; si por 11, *endecágono*; si por 12, *dodecágono*. Cuando ocurre nombrar un *polígono* de mas lados, se dice *polígono de 16, de 20, de 30 lados.*

Un *polígono* es *regular* cuando tiene iguales todos sus ángulos y todos sus lados, como ABDEF (fig. 60); y es *irregular* cuando le falta alguna de estas circunstancias, como ABCDEF (fig. 61).

Se llama *ángulo saliente* de un *polígono*, aquel cuyo vértice mira hácia fuera de la figura, como los A, B; y *ángulo entrante*, aquel cuyo vértice mira hácia dentro de la figura como el D.

Cuando el *polígono* es *regular* hay un punto dentro, tal que todas las rectas que desde él se tiran á los ángulos; son iguales; este punto se llama el *centro* del *polígono*, y las rectas tiradas *radios oblicuos*; y se llaman *ra-*

*dios rectos* las perpendiculares tiradas desde el centro á los lados; y en un polígono se llama *sajita* á la diferencia entre el radio oblicuo y el radio recto.

316 *La suma de todos los ángulos de un polígono vale tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono menos dos.*

*Dem.* Porque si desde uno de los ángulos  $A$  (fig. 61) se tiran diagonales, quedará dividido el polígono en tantos triángulos como lados tiene menos dos; pero los ángulos de estos triángulos componen los del polígono; luego los ángulos de este valen tanto como los de los triángulos; y como los de cada triángulo valen dos rectos, se deduce L. Q. D. D.

*Cor. 1.º* Luego llamando  $\pi$  á dos ángulos rectos ó á  $180^\circ$ , y  $n$  al número de lados,  $(n-2)\pi$  será la expresión del valor de todos los ángulos de un polígono.

*Cor. 2.º* Como en un polígono regular todos los ángulos son iguales, y hay tantos como lados, para hallar el valor de uno se dividirá el valor de todos, que es  $(n-2)\pi$ , por  $n$ ; que es también el número de ángulos, y se tendrá:

$$\text{Ángulo de polígono regular} = \frac{(n-2)\pi}{n}.$$

*Esc.* La fórmula anterior da á conocer que el ángulo de un polígono regular es siempre menor que  $\pi$ ; porque, para obtener su valor, se ha de multiplicar  $\pi$  por el

$$\text{quebrado propio } \frac{n-2}{n}.$$

*El triángulo equilátero y el cuadrado se pueden considerar como polígonos regulares de tres y de cuatro lados; y les convienen las propiedades del teorema y corolarios que acabamos de deducir.*

Así es, que sustituyendo 3, 4, 5, etc. en vez de  $n$ , se tendrán los ángulos de los polígonos regulares siguientes, que es muy útil saber de memoria.

$$\text{Ángulo de triángulo equilátero} = 60^\circ;$$

$$\text{Ángulo de cuadrado} = 90^\circ;$$

$$\text{Ángulo de pentágono regular} = 108^\circ;$$

$$\text{Ángulo de exágono regular} = 120^\circ.$$

317 *Teor. Si se dividen los ángulos de un polígono*

*regular en dos partes iguales por medio de rectas, estas se encontrarán en un mismo punto y serán iguales.*

*Espl.* Si los ángulos  $A, B, D$ , etc. (fig. 60), se dividen en dos partes iguales por medio de las rectas  $AC, BC, DC$ , etc. digo que estas se encontrarán en un mismo punto  $C$  y serán iguales.

*Dem.* Pues que (316 esc.) el ángulo  $FAB < 180^\circ$ , su mitad  $CAB$  valdrá ménos de  $90^\circ$ ; por la misma razon  $ABC$  valdrá ménos de  $90^\circ$ ; luego será  $CAB + ABC < 180^\circ$ ; luego las rectas  $AC, BC$  se encontrarán (287) en un punto tal como  $C$ . Y como los ángulos  $CAB, CBA$ , son iguales por ser mitades de los iguales  $FAB, ABD$ , el triángulo  $ACB$  será isósceles y dará  $AC = CB$ .

Del mismo modo se demostrará que la  $DC$  encontrará á la  $BC$ ; pero falta probar que la  $DC$  encontrará á la  $BC$  en el mismo punto en que la  $AC$  encuentra á la  $BC$ . Para esto, observaremos que los triángulos  $CAB, BCD$  tienen iguales los lados  $AB, BD$ , é iguales los ángulos adyacentes á estos lados, por ser mitades de los ángulos  $A, B, D$ , etc. del polígono; luego serán iguales, y se podrán superponer; luego podremos concebir que el triángulo  $DCB$  se doble por la  $BC$ , de modo que  $BD$  caiga sobre  $BA$ , en cuyo caso  $DC$  se confundirá con  $AC$ , é irán por consiguiente á encontrar á la  $BC$  en un mismo punto  $C$ .

Como lo mismo se demuestra de todas las demas, resulta que todas se encontrarán en  $C$ ; y que  $AC = BC = DC = \text{etc.}$  que es  $L. Q. D. D.$

*Cor. 1.º* Luego el punto  $C$  será el centro del polígono, y las rectas  $AC, BC, DC$ , etc. los radios oblicuos; de manera que en todo polígono regular son iguales los radios oblicuos.

*Cor. 2.º* Luego los triángulos  $CAB, CBD, CDE$ , etc. son isósceles é iguales entre sí; porque tienen sus tres lados respectivamente iguales.

*Cor. 3.º* Si desde el centro se tiran las perpendiculares  $CP, CQ$ , etc. á los lados de dicho polígono, serán los radios rectos; y como los triángulos  $ACQ, ACP$ , tienen el lado  $AC$  comun, el ángulo  $CAP = CAQ$  por mitades de  $FAB$ , y el  $P = Q$  por rectos, resulta (273 cor. 2.º) que son iguales, y dan  $CP = CQ$ ; luego en un polígono regular todos los radios rectos son iguales.

Cor. 4.º *El radio recto de un polígono regular divide al lado correspondiente en dos partes iguales; porque (265 esc.) los triángulos FCA, ACB, etc. son isósceles.*

Cor. 5.º *Si desde el centro de un polígono regular y con el radio oblicuo, se traza una circunferencia, esta pasará por todos los ángulos del polígono, y por consiguiente el círculo quedará circunscrito al polígono.*

Cor. 6.º *Si desde el centro del polígono se traza una circunferencia con un radio igual al radio recto (fig. 62), esta pasará por los extremos de todos ellos; y siendo cada lado perpendicular al radio recto, que se ha convertido en radio del círculo, este quedará inscrito en el polígono.*

*Esc. al cor. 5.º y 6.º Debe observarse, que radio oblicuo de un polígono inscrito en un círculo, y radio de un círculo circunscrito á un polígono, es una misma cosa; y que radio recto de un polígono circunscrito á un círculo, y radio de un círculo inscrito en un polígono, es tambien una misma cosa: ó mas general, el radio oblicuo de todos los polígonos que se pueden inscribir en un círculo, es el mismo que el del círculo en que lo están; y el radio recto de todos los polígonos que se pueden circunscribir á un círculo, es el mismo que el del círculo á que lo están.*

Cor. 7.º *Como todos los triángulos ACB, BCD, etc. (fig. 60) son iguales, los ángulos ACB, BCD, etc. formados en el centro, serán iguales; y como en virtud de lo espuesto (254 cor. 3.º) todos valen  $360^\circ$  ó  $2\pi$ , y hay tantos como lados, resulta que*

$$\text{áng. del centro de un políg. reg.} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Cor. 8.º *El lado del exágono es igual al radio del círculo circunscrito; porque los triángulos ACB, BCD, etc. (fig. 63) que, en todos los polígonos regulares, son isósceles, en el exágono son equiláteros, por ser equiángulos; pues siendo  $ABD=120^\circ$ , su mitad CBA valdrá  $60^\circ$ , y tambien  $CAB=60^\circ$ ; luego el  $ACB=60^\circ$ ; luego  $CA=AB$ .*

Cor. 9.º *Luego para inscribir un exágono en un círculo basta colocar el radio seis veces sobre la circunferencia, y tirar rectas por los puntos de division A, B, D, etc.*

*Si ahora se quiere inscribir un triángulo equilátero,*

se unirá de dos en dos los extremos de los lados, con las rectas  $AD$ ,  $DF$ ,  $FA$ .

Cor. 10.º Y si se quisiese un arco de  $30^\circ$ , se dividiría (294) en dos partes iguales el arco  $AB$  correspondiente á una cuerda igual al radio.

318 Para inscribir un cuadrado, se tirarán dos diámetros  $AB$ ,  $CD$  (fig. 64) que se crucen á ángulos rectos y se unirán sus extremos por las cuerdas  $AC$ ,  $AD$ ,  $DB$ ,  $BC$ .

Si se levantan en  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  perpendiculares á los radios  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ , se tendrá circunscrito el cuadrado  $MNPQ$ : en el cual por ser cada lado v. g.  $MN$  igual (313..2.º) al diámetro  $AB$ , se tendrá que el perímetro del cuadrado circunscrito vale cuatro diámetros.

Ahora, por ser el lado del exágono igual al radio del círculo circunscrito, su perímetro valdrá seis radios ó tres diámetros; pero la circunferencia es mayor (308) que el perímetro de cualquier figura inscrita y menor que el de la circunscrita; luego la circunferencia es menor que cuatro diámetros y mayor que tres, ó está entre tres y cuatro diámetros.

#### De las líneas proporcionales.

319 Teor. Si en una recta que con otra forma un ángulo cualquiera, se toma un número cualquiera de partes iguales, y por los puntos de division se tiran paralelas entre sí, hasta que encuentren á la otra, y por estos puntos de concurso se tiran paralelas á la primera: cada una de estas rectas quedará dividida en partes iguales entre sí.

Espl. Si en la  $AV$  (fig. 65) que con la  $AZ$  forma un ángulo cualquiera  $VAZ$ , se toma  $AB=BC=CD=$  etc., por los puntos de division  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , etc. se tiran las  $BF$ ,  $CG$ , etc. paralelas entre sí: y por los puntos  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , etc. donde estas encuentran á la  $AZ$ , se tiran las  $FS$ ,  $GT$ , etc. paralelas á la primera  $AV$ : digo que las partes  $AF$ ,  $FG$ ,  $GH$ , etc. de la  $AZ$ , serán iguales; y que tambien lo serán las de las rectas  $FS$ ,  $GT$ , etc., y las de  $CG$ ,  $DH$ , etc.

Dem. Por el supuesto se tiene  $AB=BC$ ; pero  $BC=FK$  por los lados opuestos del paralelogramo  $BCKF$ , luego  $AB=FK$ .

El ángulo  $\text{FKG} = \text{ABF}$  (§ 288); el  $\text{BAF} = \text{KFG}$ , por correspondientes entre las paralelas  $\text{AV}$ ,  $\text{FS}$ , siendo la secante  $\text{AZ}$ ; luego (261) los triángulos  $\text{BAF}$ ,  $\text{KFG}$ , serán iguales, y darán  $\text{AF} = \text{FG}$ .

Del mismo modo se demostrará que el triángulo  $\text{FKG} = \text{GNH} = \text{HPQ} = \text{etc.}$ ; luego  $\text{AF} = \text{FG} = \text{GH} = \text{HQ} = \text{etc.}$

Ahora,  $\text{FK} = \text{BC}$  por lados opuestos de paralelogramo; y por la misma razón  $\text{KL} = \text{CD}$ ,  $\text{LM} = \text{DE}$ , etc.; pero  $\text{BC} = \text{CD} = \text{DE} = \text{etc.}$  por el supuesto, luego  $\text{FK} = \text{KL} = \text{LM} = \text{etc.}$

Para demostrarlo respecto de las  $\text{CG}$ ,  $\text{DH}$ , etc., observaremos que  $\text{CK} = \text{BF}$  por lados opuestos de paralelogramo;  $\text{BF} = \text{KG}$  por la igualdad de los triángulos  $\text{ABF}$ ,  $\text{KFG}$ : luego  $\text{CK} = \text{KG}$ .

Ahora,  $\text{DL} = \text{CK}$  y  $\text{LN} = \text{KG}$ , por lados opuestos de paralelogramos; pero  $\text{CK} = \text{KG}$  por lo acabado de demostrar; luego  $\text{DL} = \text{LN}$ ; y como  $\text{KG} = \text{NH}$  por la igualdad de los triángulos  $\text{FKG}$ ,  $\text{GNH}$ , resulta también que  $\text{DL} = \text{LN} = \text{NH}$ , que era todo L. Q. D. D.

*Cor.* Puesto que  $\text{AB} = \text{BC} = \text{etc.}$  y  $\text{AF} = \text{FG} = \text{etc.}$ , resultará que la razón que tenga  $\text{AB}$  con  $\text{AF}$ , esa misma tendrá  $\text{BC}$  con  $\text{FG}$ , etc. luego

$$\text{AB} : \text{AF} :: \text{BC} : \text{FG} :: \text{CD} : \text{GH} :: \text{etc.} : \text{etc.}$$

y multiplicando los dos términos de la primera razón por una misma cantidad, se tendrá

$$\text{AB} : \text{AF} :: 2\text{AB} : 2\text{AF} :: 3\text{AB} : 3\text{AF} :: 4\text{AB} : 4\text{AF} ::$$

$$n \times \text{AB} : n \times \text{AF} :: m \times \text{AB} : m \times \text{AF} :: \text{etc.} : \text{etc.}$$

Esto quiere decir, que un número cualquiera  $n$  de partes de la primera es al mismo número de partes de la segunda, como otro número cualquiera  $m$  de partes de la primera es á este mismo número de partes de la segunda; ó alternada dirá: un número cualquiera  $n$  de partes de la primera es á otro número cualquiera  $m$  de partes de la misma, como el número  $n$  de partes de la segunda es al número  $m$  de partes de la misma; de manera que se tendrá esta serie de razones iguales

$$\text{AB} : \text{AF} :: \text{BC} : \text{FG} :: \text{CD} : \text{GH} :: \text{DE} : \text{HQ} :: \text{AC} : \text{AG} ::$$

$$\text{BD} : \text{FH} :: \text{CE} : \text{GQ} :: \text{AD} : \text{AH} :: \text{etc.} : \text{etc.}$$

320 Teor. Si por un punto cualquiera del lado de un triángulo se tira una paralela á la base; los lados de dicho triángulo quedan divididos en partes proporcionales.

*Espl.* Sea el triángulo  $\text{ABC}$  (fig. 66); digo que si desde un punto cualquiera  $\text{D}$  de uno de los lados, se

tira una recta  $DE$  paralela á la base, esta recta dividirá á los lados  $BA, BC$  en partes proporcionales, de modo que se tendrá  $BA:BD::BC:BE$ .

*Dem.* Aquí pueden ocurrir dos casos: 1.º que  $BA$  sea comensurable con  $BD$ , y 2.º que no lo sea.

En el primer caso, sea la comun medida de  $BA$  y  $BD$  la  $AP$ ; y representando por  $m$  el número de veces que está contenida en  $BA$ , y por  $n$  las que está contenida en  $BD$ , se tendrá  $AB=m \times AP, BD=n \times AP$ ; y formando proporcion y simplificando por  $AP$ , será  $AB:BD::m \times AP:n \times AP::m:n$ ; pero, si por los puntos de division  $P$  se tiran rectas paralelas á la  $AC$ , tales como la  $PQ$ , el lado  $BC$  quedará dividido (319) en  $m$  partes iguales con  $CQ$ , y la recta  $BE$ , en  $n$ , y se tendrá  $BC=m \times CQ; BE=n \times CQ$ ; de donde  $BC:BE::m \times CQ:n \times CQ::m:n$ ; luego esta proporcion y la anterior (§ 184..2.ª) darán  $AB:BD::BC:BE$ .

2.º Si  $BA$  y  $BD$  son inconmensurables, digo que la razon de  $BA:BD$  no puede ser mayor ni menor que la de  $BC:BE$ .

En efecto, no se puede suponer  $BA:BD::BC:BL$ , siendo  $BL < BE$ ; porque en este caso concibiendo la  $BA$  dividida en partes iguales, tan pequeñas que tirando paralelas á  $AC$ , por los puntos de division, caiga una de estas tal como  $de$ , entre  $E$  y  $L$ , á causa de la comensurabilidad de  $BA$  con  $Bd$ , se tendrá  $BA:Bd::BC:Be$ . Cuya proporcion y la anterior dará (§ 184..2.ª cor.)  $BD:Bd::BL:Be$ , resultado absurdo; porque la una razon es de mayor desigualdad, y la otra de menor.

Tampoco se puede suponer que  $BA:BD::BC:BL'$ , siendo  $BL' > BE$ ; porque concibiendo dividida la  $BA$  en partes tan pequeñas como se necesite, para que una de las paralelas tal como  $d'e'$ , tiradas á la base  $AC$  por los puntos de division, caiga entre  $E$  y  $L'$ , se tendrá  $BA:Bd'::BC:Be'$ ; y formando proporcion con los consecuentes de estas dos proporciones, será  $BD:Bd'::BL':Be'$ , resultado absurdo por la misma razon que ántes; luego no pudiendo ser la razon  $BA:BD > ni < BC:BE$ , será  $BA:BD::BC:BE$ , que es *L. Q. D. D.*

*Cor.* 1.º Dividiendo esta proporcion, tendrédmos  $BA-BD:BD::BC-BE:BE$ , ó  $DA:BD::CE:BE$ , la cual compuesta y alternada, se convierte en

$$DA+BD=BA:CE+BE=BC::BD:BE::DA:CE;$$

que nos manifiesta, que los lados del triángulo son proporcionales con las partes superiores é inferiores á la paralela, y estas proporcionales entre si.

*Cor. 2.º* De aquí se sigue también, que si tres paralelas  $AC$ ,  $DE$ , de, se cortan por dos secantes  $Ad$ ,  $Ce$ , estas y las partes en que quedan divididas por la paralela  $DE$ , serán proporcionales entre sí; de manera que se tendrá  $Ad:Ce::AD:CE::Dd:Ee$ , ó  $Ad:AD:Dd::Ce:CE:Ee$ .

Porque concibiendo prolongadas las secantes hasta que se encuentren en  $B$ , el triángulo  $BAC$  nos dará, considerando la *de* paralela con  $AC$ ,  $Bd:Be::Ad:Ce$ , y el  $BDE$  considerando la *de* paralela con  $DE$ , dará  $Bd:Be::Dd:Ee$ ; por lo que (184.2.<sup>a</sup>) será  $Ad:Ce::Dd:Ee$ ; y (184.4.<sup>a</sup>)

$Ad-Dd:Ce-Ee::Ad:Ce::Dd:Ee$ ; que reduciendo y permutando resulta  $Ad:Ce::AD:CE::Dd:Ee$  ó (§ 185)  $Ad:AD:Dd::Ce:CE:Ee$ .

321 Teor. Si una recta divide los lados de un triángulo en partes proporcionales, es paralela á la base.

*Espl.* Sea el triángulo  $BAC$  (fig. 67); digo que si la  $DE$  divide los lados  $BA$ ,  $BC$ , de modo que se tenga  $BA:BD::BC:BE$ , la recta  $DE$  será paralela á la base  $AC$ .

*Dem.* Si la  $DE$  no es paralela á la  $AC$ , se le podrá tirar por el punto  $D$  una recta que lo sea. Si esta fuese la  $De$ , se tendría (§ 320)  $BA:BD::BC:Be$ ; y como esta proporcion y la del supuesto tienen los tres primeros términos comunes, resulta  $BE=Be$ , que es absurdo, porque  $BE$  es todo y  $Be$  parte suya; luego la paralela á la base no puede caer por mas arriba de la  $DE$ . Tampoco puede caer por la parte inferior; porque si se supone que la  $De'$  es paralela á la  $AC$ , resultará  $BE=Be'$ , que también es absurdo; luego si la paralela tirada por el punto  $D$  á la base  $AC$ , no puede pasar ni por mas arriba ni por mas abajo de la  $DE$ , esta será la paralela. L. Q. D. D.

322 Teor. La  $DE$ , que es paralela á la base, es también proporcional con la misma base; de manera que se tiene  $BA:BD::AC:DE$ .

*Dem.* Tirando por  $D$  la  $DF$  paralela con  $BC$ , tendremos (320 cor. 1.º)  $BA:BD::AC:CF$ ; pero  $DE=FC$  por ser lados opuestos del paralelogramo  $DFCE$ ; luego  $BA:BD::AC:DE$ , que era L. Q. D. D.

*Esc.* Si por un punto  $E$ , dentro de un ángulo  $BAC$  (fig. 67), quisiéramos tirar una recta  $BEC$ , de modo que  $BE=EC$ ; tiraríamos  $ED$  paralela con  $CA$ , tomaríamos  $DB=DA$ , y tirando  $BEC$ , resultaría (320)  $BE=EC$ .

323 Probl. *Dividir una recta dada AG (fig. 68) en las partes iguales que se quiera, v. g. en ocho.*

*Res. y Dem.* Tírese por uno de sus extremos A una recta cualquiera AQ; tómense en esta ocho partes iguales á una magnitud arbitraria, tal como AP; únase el extremo P de la octava division con el G de la recta propuesta; y por todos los puntos de division tírense paralelas á la PG, las cuales dividirán á la AG, en las ocho partes iguales que se deseaba (319).

*Esc.* Si se quisiera dividir la recta en dos (ó mas) partes que tuviesen una razon dada, como de 3 á 5, se dividiría la recta AG en 8 partes por el método anterior; y la recta DE tirada por el punto que señale uno de los números dados, paralela con GF, dividirá la AG en las dos partes AE, EG; que serán como 3:5 (320 cor 1.º).

324 Probl. *Dadas tres rectas G, K, L (fig. 69), hallarles una cuarta proporcional geométrica.*

*Res. y Dem.* Fórmese un ángulo cualquiera VAZ con dos rectas indefinidas AV, AZ; en uno de los lados AV tómese una parte AB= con la 1.ª G; en el mismo lado tómese otra parte AC= con la 2.ª K; en el otro lado AZ tómese una parte AE= á la 3.ª L; únase el extremo B de la primera con el E de la tercera por medio de la BE, y por el extremo C de la segunda tírese la CF paralela con BE, la cual irá á encontrar al otro lado, de manera que la parte AF será la cuarta proporcional pedida. Porque el triángulo ACF (§ 320) da  $AB:AC::AE:AF$ , ó sustituyendo á estas líneas sus iguales,  $G:K::L:AF$ .

*Esc.* Si sólo se diesen las dos rectas G, K, y se pidiese una tercera proporcional geométrica, se emplearía la misma construccion sin mas diferencia que tomar

$$AE=AC=K.$$

325 Probl. *Formar la escala universal que se conoce con el nombre de escala de mil partes.*

*Res. y Dem.* Tómese una magnitud arbitraria K (fig. 70), y repítase diez veces sobre la AB, desde A hasta O; tómese toda la magnitud  $AO=10K$ , y repítase nueve veces desde O hácia la derecha; en los extremos levántense perpendiculares, en las cuales se toma-

rán tambien diez partes iguales con otra magnitud arbitraria, y se tirarán rectas por los puntos de division 1, 2, 3, etc. que serán paralelas é iguales (311) á la AB; y en la última CE fórmense las mismas partes que en la AB.

Desde D á C y desde O á A, póngase 10, 20, 30, etc. en las divisiones 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, etc.; únase el punto O con el 10 de la de arriba; el 10 de la AO con el 20 de la de arriba, y así sucesivamente hasta unir el punto 90 de la de abajo con el C de la de arriba; únase tambien el punto O con el D, y en los puntos de division de la derecha se pondrán, tanto arriba como abajo, 100, 200, 300, etc.; con lo cual quedará formada la escala.

En ella se podrán tomar hasta mil partes, de esta manera: considerando que la distancia Ago vale diez partes, la AO valdrá 100; y como  $AB=10AO$ , se sigue que la AB, que es la mayor magnitud que se puede tomar, valdrá mil partes.

*Esc. 1.º* Ahora, para tomar un número cualquiera de partes menor que mil, se procederá del modo siguiente. En primer lugar *esta distancia se debe tomar en la paralela á AB que pase por el punto que espresa el guarismo de las unidades del número propuesto; y la magnitud estará espresada por la parte de esta recta que hay interceptada entre la recta que espresa las centenas y la que va desde las decenas de abajo á una decena mas de la de arriba.* Así, si se quieren tomar 237 partes, se echará de ver que esta distancia se debe tomar en la recta 7F, y estará representada por la parte HN interceptada entre la recta 200 que espresa las centenas y la que desde el 30 de la de abajo que espresa las decenas, va al 40 de la de arriba.

Porque  $NH=Hm+mr+rN$ ; ahora, Hm es igual á 200, y por consiguiente vale 200 partes; la  $Nr=O30$ , tambien por lados opuestos del paralelogramo  $NrO30$ , y por consiguiente vale 30 de estas partes; y la  $rm$ , por lo que ahora probaremos, vale 7 de dichas partes; luego  $NH=200+30+7=237$  partes.

Para probar que  $rm$  vale 7 partes, se observará que el triángulo OD10, por ser la  $rm$  paralela á D10, da

$$rm:D10::Om:OD::7 \times Ot:10 \times Ot::7:10; \quad \text{luego } rm = \frac{D10 \times 7}{10}; \quad \text{y}$$

como la distancia D10 la suponemos compuesta de diez partes,

resulta que  $rm = \frac{10 \times 7}{10} = 7$ .

*Esc. 2.º* Es muy importante el conocimiento de la escala, pues es lo primero que se ha de hacer para delinear todo plano, y es la que en los mismos planos y mapas sirve para conocer la distancia de dos puntos.

*De la semejanza de las figuras.*

---

326 Se llaman figuras *semejantes* las que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales; y *desemejantes*, aquellas á que falta alguna de estas dos circunstancias. De modo que las dos figuras ABCDE, abcde (fig. 71) serán semejantes, siempre que sus ángulos sean  $A = a$ ,  $B = b$ ,  $C = c$ , etc., y además se tenga

$$AB:ab::BC:bc::CD:cd::etc.:etc.$$

327 Teor. *Todos los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes.*

*Dem.* Porque siendo en ambos uno mismo el número  $n$  de lados, la fórmula (§ 316 cor. 2.º)  $\frac{(n-2)\pi}{n}$  dará un mismo

valor para cada ángulo; luego los ángulos del uno serán iguales á los del otro; y como en cada uno han de ser iguales los lados entre sí, resulta que la razón que uno de ellos tenga con otro, esa será la que tengan otros dos cualesquiera. Luego serán semejantes. L. Q. D. D.

328 Teor. *Si por un punto cualquiera del lado de un triángulo se tira una paralela á uno de los otros lados, se originará un triángulo que será semejante al primitivo.*

*Espl.* Si por el punto  $b'$  del lado AB (fig. 72), se tira la  $b'e'$  paralela con BC, el triángulo  $Ab'e'$  será semejante al ABC.

*Dem.* Ambos triángulos tienen comun el ángulo en A; el ángulo en  $b' =$  al en B por correspondientes; el en  $e' =$  al en C, por la misma razón; luego tienen los tres ángulos del uno respectivamente iguales á los del otro. Ahora, el triángulo ABC nos da (§ 320 y 322)  $AB:Ab'::AC:Ae'::BC:b'e'$ .

Luego estos dos triángulos tienen los ángulos iguales, y proporcionales los lados; luego son semejantes. L. Q. D. D.

329 Teor. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen los tres lados del uno proporcionales con los tres del otro.*

*Espl.* Sean los dos triángulos  $ABC, abc$ , en que se supone  $AB:ab::AC:ac::BC:bc$ ; digo que se tendrá  $a=A, b=B, c=C$ , y por lo mismo los triángulos serán semejantes.

*Constr.* Tómese en el lado  $AB$  una parte  $Ab'=ab$ , y en  $AC$  una parte  $Ac'=ac$ , y únase el punto  $b'$  con el  $c'$ .

*Dem.* Por el supuesto tenemos  $AB:ab::AC:ac$ ; luego sustituyendo en vez de  $ab$  y  $ac$  sus iguales  $Ab', Ac'$ , será  $AB:Ab'::AC:Ac'$ ; luego (321) la  $b'c'$  será paralela á la base y proporcional (322) con la misma base: luego  $AB:Ab'::BC:b'c'$ ; y como  $ab=Ab'$ , esta proporción y la que forman la primera y la tercera razón del supuesto tienen los tres primeros términos iguales; luego el cuarto será igual en ambas, y se tendrá  $b'c'=bc$ ; luego los triángulos  $Ab'c', abc$  son iguales (259); y como  $Ab'c'$  es semejante (328) al  $ABC$ , resulta que su igual  $abc$  también será semejante con  $ABC$ , que era L. Q. D. D.

330 Teor. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, formado por dos lados proporcionales.*

*Espl.* Sean  $ABC, abc$  dos triángulos, en que se supone  $A=a$ , y  $AB:ab::AC:ac$ ; digo que son semejantes.

*Dem.* Hecha la construcción anterior, resulta que si en la proporción del supuesto sustituimos en vez de  $ab, ac$ , sus iguales  $Ab', Ac'$ , se tendrá  $AB:Ab'::AC:Ac'$ ; luego la  $b'c'$  divide en partes proporcionales los lados del triángulo  $ABC$ , y por lo mismo será paralela á la base; luego (328) el triángulo  $Ab'c'$  es semejante al  $ABC$ ; y como  $abc$  es igual (260) con  $Ab'c'$ , resulta que  $abc$  será semejante con  $ABC$ , que es L. Q. D. D.

331 Teor. *Dos triángulos son semejantes cuando los tres ángulos del uno son respectivamente iguales á los del otro.*

*Espl.* Sean dos triángulos  $ABC, abc$ , en que se supone  $A=a, B=b$  y  $C=c$ , digo que son semejantes.

*Constr.* Tómese en  $AB$  una parte  $Ab'$  igual con  $ab$ , y por  $b'$  tírese la  $b'e'$  paralela con  $BC$ .

*Dem.* El ángulo  $U=B$  por correspondientes; y como  $B=b$  por el supuesto, será  $U=b$ ; luego los dos triángulos  $AUc'$ ,  $abc$  son iguales (261); pero  $AUc'$  es semejante con  $ABC$ ; luego  $abc$  tambien lo será, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.º *Cuando dos ángulos de un triángulo son iguales respectivamente á dos de otro, los triángulos son semejantes; porque en este caso el tercer ángulo (289 cor. 2.º) es igual al tercero.*

Cor. 2.º *Dos triángulos rectángulos son semejantes, siempre que ademas del ángulo recto tengan otro igual ó comun.*

Cor. 3.º *Dos triángulos  $ABC$ ,  $DEF$  (figura 73) son semejantes cuando tienen sus lados paralelos; porque si  $AB$  es paralelo con  $DE$  y  $BC$  con  $EF$ , el ángulo  $B=E$  (§ 288); y ademas por ser  $AC$  paralelo con  $DF$  será igualmente el ángulo  $C=F$  y  $A=D$ .*

Cor. 4.º *Dos triángulos  $DEF$ ,  $ABC$  (fig. 74) son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente perpendiculares; porque dando á uno de ellos un cuarto de conversion (lo que no altera el triángulo) resultarían sus lados paralelos á los del otro.*

Esc. 1.º *Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen proporcionales un cateto y la hipotenusa.*

En efecto, si suponemos rectángulos en  $B$  y en  $b$  (fig. 72) los triángulos  $ABC$ ,  $abc$ , y que  $AB:AC::ab:ac$ , serán semejantes; porque tomando  $AU=ab$  y  $Ac'=ac$ , la proporcion se convertirá en  $AB:AC::AU:Ac'$ ; luego si unimos el punto  $U$  con  $c'$  por medio de la  $Uc'$ , esta será (321) paralela con  $BC$ ; y como el ángulo  $B$  es recto por el supuesto, tambien lo será (284. 3.º) el  $U$ ; luego (273 cor. 2.º) los triángulos  $AUc'$ ,  $abc$  serán iguales; pero  $AUc'$  es semejante (328) al  $ABC$ ; luego tambien lo será el  $abc$ , que era L. Q. D. D.

Esta proposicion se verifica aun con mas generalidad en esta forma.

*Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo opuesto al mayor de ellos.*

*Espl.* Sean los dos triángulos  $ABC$ ,  $abc$  (fig. 72) en que se supone  $AB:ab::AC:ac$ ,  $ABC=abc$ , sabiendo ademas que el lado  $AC$  es mayor que  $AB$ ; voy á demostrar que son semejantes.

*Dem.* Tómese en  $AB$  una parte  $Ab'=ab$ , y en  $AC$  una parte  $Ac'=ac$ , únase  $U$  con  $c'$  por medio de la  $Uc'$ , y tendremos que, sustituyendo en la proporción del supuesto en vez de  $ab$  y  $ac$ , sus valores  $Ab'$ ,  $Ac'$ , será  $AB:Ab':AC:Ac'$ ; luego la  $Uc'$  divide en partes proporcionales á los lados del triángulo  $ABC$ ; y por lo mismo será (321) paralela á la base; luego el triángulo  $Ab'c'$  es semejante (328) al  $ABC$ ; y como el triángulo  $abc$  es igual (273 cor. 4.<sup>o</sup>) con el  $Ab'c'$  (por tener  $ab=Ab'$ ,  $ac=Ac'$  por construcción y  $abc=Ab'c'$ , porque de ser la  $Uc'$  paralela con la base  $BC$ , se deduce que el ángulo  $Ab'c'=ABC=abc$  por el supuesto), resulta que el triángulo  $abc$  también será semejante al triángulo  $ABC$ .

*Esc. 2.<sup>o</sup>* Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo opuesto al lado menor de los dos dados y que sean de una misma especie los ángulos opuestos al lado mayor de los dos que se dan.

*Espl.* Sean  $ABC$ ,  $abc$  dos triángulos en que se tiene  $AC:ac::AB:ab$ ; el ángulo en  $C=$  al en  $c$ ; y en que se sabe además que  $AB < AC$  y que los ángulos en  $B$  y  $b$ , son de una misma especie, esto es, ó ambos agudos, ó ambos rectos, ó ambos obtusos; digo que los dos triángulos  $ABC$ ,  $abc$  son semejantes.

*Dem.* Tómese en  $AB$  una parte  $Ab'=ab$ , y en  $AC$  una parte  $Ac'=ac$ , y tírese la  $Uc'$ ; con lo cual la proporción del supuesto nos dará  $AC:Ac':AB:Ab'$ ; luego la  $b'c'$  será (321) paralela con la base  $BC$ ; luego el ángulo  $B=b'$  y el  $c'=C=c$ . Luego (328) el triángulo  $Ab'c'$  es semejante con el  $ABC$ ; pero el  $Ab'c'$  es igual (273 cor. 5.<sup>o</sup>) con el  $abc$ ; pues tienen dos lados iguales, á saber,  $Ab'=ab$ ,  $Ac'=ac$ ; el ángulo  $c$  opuesto al menor de los lados  $ab$ , igual al  $c'$  opuesto al menor en el  $Ab'c'$ , y los ángulos en  $b$  y  $b'$  son de una misma especie por suponerse que lo son los en  $b$  y  $B$  que es igual con  $b'$ ; luego el  $abc$  será semejante con  $ABC$ , que era L. Q. D. D.

*Esc. 3.<sup>o</sup>* Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, y proporcionales los lados que forman otro ángulo que sea de la misma especie en ambos triángulos.

*Espl.* Sean  $CAB$  y  $FDE$  (fig. 76\*) dos triángulos en los que se tenga el ángulo  $ABC=DEF$ , y proporcionales los lados que forman los ángulos  $ACB$ ,  $DFE$ ,

de modo que se tenga  $BC:AC::EF:DF$ ; voy á demostrar, que, con tal que se sepa que los espresados ángulos  $ACB$ ,  $DFE$  son ambos agudos ó ambos obtusos, los triángulos serán semejantes.

*Dem.* Si por los puntos  $E$  y  $F$  se tiran las rectas  $EG$ ,  $FG$  que formen los ángulos  $FEG$  y  $EFG$  iguales con  $ABC$  y  $BCA$ , tendremos que el triángulo  $ABC$  será semejante á  $GEF$  (corol. 1.<sup>o</sup>), y darán  $BC:CA::EF:FG$ ; y como esta proporcion y la del supuesto tienen la primera razon común, será  $EF:FG::EF:DF$ ; que da (184 1.<sup>a</sup>)  $FG=DF$ . Luego los triángulos  $EGF$  y  $EDF$  tienen el lado  $FG=FD$ , el lado  $EF$  común, y los ángulos  $FEG=ABC=FED$ , y los otros ángulos  $EFD$  y  $EFG$  de la misma especie, por serlo  $EFD$  de la misma que  $ACB$  por el supuesto, y  $EFG=ACB$  por construcción; luego dichos triángulos serán (273 cor. 6.<sup>o</sup>) iguales; por consiguiente el ángulo  $EFG$  ó  $ACB$  igual  $DFE$ , y por lo mismo (cor. 1.<sup>o</sup>) los triángulos  $ABC$  y  $DEF$  son semejantes; que era L. Q. D. D.

*Esc. 4.<sup>o</sup>* Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, y los lados opuestos á dicho ángulo son proporcionales con las perpendiculares que se les tiran desde dichos ángulos.

*Espl.* Sean  $ABC$ ,  $abc$  (fig. 75\*) dos triángulos en que el ángulo  $BAC=\hat{b}ac$ , y que además se tenga  $AD:BC::ad:bc$ ; voy á demostrar que dichos triángulos son semejantes.

*Dem.* Si los dos primeros términos de la proporcion del supuesto, los multiplicamos por  $AB$ , y los otros dos por  $ab$ , se nos convertirá en  $AD \times AB:BC \times AB::ad \times ab:bc \times ab$ . Esta proporcion compuesta, la podremos descomponer (190) en las dos proporciones simples siguientes  $AD:AB::ad:a\hat{b}$  y  $AB:BC::ab:bc$ . La primera nos dice que los triángulos  $ABD$ ,  $a\hat{b}d$  rectángulos en  $D$  y  $\hat{d}$  son semejantes (esc. 1.<sup>o</sup>); lo que da el ángulo  $DBA=\hat{d}ba$ , ó  $CBA=\hat{c}ba$ ; y como por el supuesto el ángulo  $BAC=\hat{b}ac$ , resulta en virtud de lo demostrado (cor. 1.<sup>o</sup>) que los triángulos  $ABC$ ,  $abc$  son semejantes, que era L. Q. D. D.

En el apéndice puesto al fin de la segunda parte de la Geometría, en la tercera edicion del tomo 1.<sup>o</sup> parte segunda, demuestro otros cinco casos de semejanza de triángulos.

*Esc. 5.<sup>o</sup>* Siempre que se hayan de sacar proporciones, de triángulos semejantes, se compararán los lados del uno con los homólogos del otro; esto es, los que estén

opuestos á ángulos iguales, ó sean paralelos ó perpendiculares.

332 Teor. *Si desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, se verificarán seis cosas: 1.<sup>a</sup> el triángulo quedará dividido en otros dos semejantes al total, y semejantes entre sí; 2.<sup>a</sup> la perpendicular bajada será media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa; 3.<sup>a</sup> cada cateto será medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente; 4.<sup>a</sup> el cuadrado de la hipotenusa será igual á la suma de los cuadrados de los catetos; 5.<sup>a</sup> los cuadrados de los catetos serán entre sí como los segmentos correspondientes; y 6.<sup>a</sup> la perpendicular será cuarta proporcional á la hipotenusa y á los catetos.*

Espl. Si desde el ángulo recto  $A$  (fig. 75) del triángulo rectángulo  $ABC$ , se baja una perpendicular  $AD$  á la hipotenusa  $BC$ , digo que se verificarán seis cosas: 1.<sup>a</sup> los dos triángulos  $ADB$ ,  $ADC$  serán semejantes al total  $BAC$ , y semejantes entre sí; 2.<sup>a</sup> la perpendicular  $AD$  será media proporcional entre los dos segmentos  $BD$  y  $DC$  de la hipotenusa  $BC$ ; 3.<sup>a</sup> cada cateto  $AB$  ó  $AC$  será medio proporcional entre la hipotenusa  $BC$  y el segmento  $BD$ , ó  $DC$  que á cada uno corresponde; 4.<sup>a</sup> el cuadrado  $BC^2$  de la hipotenusa será igual á la suma  $BA^2 + CA^2$  de los cuadrados de los catetos; 5.<sup>a</sup> los cuadrados  $BA^2$ ,  $CA^2$  de los catetos serán entre sí como los segmentos correspondientes  $BD$  y  $DC$ ; y 6.<sup>a</sup> la  $DA$  será cuarta proporcional á la hipotenusa  $BC$  y á los catetos  $CA$ ,  $AB$ .

Dem. 1.<sup>a</sup> Por tener los triángulos  $BAC$  y  $BAD$  un ángulo comun en  $B$ , y ademas el primero uno recto  $A$  por el supuesto, y el segundo el  $r$  tambien recto, dichos triángulos serán semejantes (331 cor. 2.<sup>o</sup>). Por tener los triángulos  $BAC$  y  $DAC$  comun el ángulo en  $C$ , y ademas tener un ángulo recto cada uno, á saber: el primero en  $A$ , y el segundo en  $m$ , tambien serán semejantes. Ahora, de ser semejantes  $BAC$  y  $BAD$ , se sigue que el ángulo en  $C = n$ ; luego los triángulos  $BAD$  y  $DAC$ , ademas del ángulo recto  $r$  y  $m$ , tienen otro ángulo igual; luego (331 cor. 2.<sup>o</sup>) son semejantes. L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

2.<sup>a</sup> Por ser los triángulos  $BAD$  y  $DAC$  semejantes, darán (§ 331 esc. 5.<sup>o</sup>)  $BD:AD::DA:DC$ , que es L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

3.<sup>a</sup> Los triángulos semejantes BAC y BAD darán (331 es-  
col. 5.<sup>o</sup>)  $BC:BA::BA:BD$  (m).

Los BAC, DAC, dan  $BC:AC::AC:DC$  (n); que junta con  
la (m) manifiesta L. 3.<sup>o</sup> Q. D. D.

4.<sup>a</sup> Las proporciones (m) y (n) dan  $BA^2=BC \times BD$  (p),  
 $AC^2=BC \times CD$  (q); y sumando, resolviendo en factores y re-  
duciendo, será

$BA^2+AC^2=BC \times BD+BC \times CD=BC \times (BD+CD)=BC \times BC=BC^2$ ,  
ó  $BC^2=BA^2+AC^2$ , que es L. 4.<sup>o</sup> Q. D. D.

5.<sup>a</sup> Si con las dos ecuaciones (p) y (q) formamos pro-  
porcion, y simplificamos por BC, será

$BA^2:AC^2::BC \times BD:BC \times CD::BD:CD$ , que es L. 5.<sup>o</sup> Q. D. D.

6.<sup>a</sup> Los triángulos BAC, BAD, dan  $BC:CA::BA:AD$ , que  
es L. 6.<sup>o</sup> Q. D. D.

Cor. Una vez que  $BC^2=BA^2+CA^2$ , si estraemos  
la raíz cuadrada de ambos miembros, será

$$BC=\sqrt{BA^2+CA^2};$$

luego en conociendo los dos catetos se conocerá la hipotenusa, *estrayendo la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos*. Y si en la misma ecuacion se despeja un cateto, tal como CA, se tendrá

$$CA^2=BC^2-BA^2, \text{ que da } CA=\sqrt{BC^2-BA^2};$$

la primera quiere decir, que *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto*; y la segunda, que en conociendo la hipotenusa y un cateto, se conocerá el otro cateto *estrayendo la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y del otro cateto*.

333 Teor. Si desde un punto cualquiera A de la circunferencia (fig. 76) se baja una perpendicular al diámetro BC, se verificarán cuatro cosas: 1.<sup>a</sup> la perpendicular AD será media proporcional entre los dos segmentos BD, DC del diámetro; 2.<sup>a</sup> si desde los extremos del diámetro se tiran las cuerdas BA, CA á dicho punto de la circunferencia, estas serán medias proporcionales entre el diámetro y el segmento correspondiente; 3.<sup>a</sup> los cuadrados  $BA^2$ ,  $CA^2$  de dichas cuerdas serán entre sí como los segmentos correspondientes; y 4.<sup>a</sup> el cuadrado  $BC^2$  del diámetro es igual á la suma de los

cuadrados  $BA^2$ ,  $CA^2$  de las cuerdas, que desde sus extremos se tiren á un punto cualquiera  $A$  de la circunferencia.

*Dem.* Es la misma que la del caso anterior, solo con sustituir las voces *diámetro* á *hipotenusa*, *cuerda* á *cateto*, *punto de la circunferencia* á *vértice de ángulo recto*; pues el triángulo  $BAC$  es rectángulo en  $A$  (§ 304 cor. 3.<sup>o</sup>).

*Cor.* 1.<sup>o</sup> Una vez que  $BA^2 = BC \times BD$ , y  $BA$  es una cuerda cualquiera, se sigue que el cuadrado de una cuerda es siempre igual al diámetro ó duplo del radio multiplicado por el segmento correspondiente á dicha cuerda.

*Cor.* 2.<sup>o</sup> Luego si se tienen dos cuerdas tiradas cada una desde su diámetro, el cuadrado de cada una será igual al diámetro multiplicado por el segmento que le corresponda; y formando proporcion con las dos ecuaciones, se tendrá despues de simplificar la última razon, que en general los cuadrados de las cuerdas son como los segmentos que causan en el diámetro que pasa por uno de sus extremos, las perpendiculares bajadas desde los otros extremos; y las cuerdas serán entre sí (190) como las raíces cuadradas de los segmentos.

334 Probl. Entre dos rectas dadas  $K, L$  (fig. 76), hallar una media proporcional.

*Res. y Dem.* Póngase una á continuacion de otra, de modo que  $BD = K, DC = L$ ; sobre toda la  $BC$  como diámetro, describáse la semicircunferencia  $BAC$ ; en el punto  $D$  donde se unieron, levántese la perpendicular  $DA$  hasta encontrar á la circunferencia, la cual será la media proporcional pedida (333 1.<sup>a</sup>).

335 Teor. En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del mayor lado es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados; y en todo triángulo acutángulo, el cuadrado del lado mayor es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

*Espl.* Sea primero el triángulo obtusángulo  $ABC$  (fig. 77); digo que el cuadrado de  $AB$  es mayor que la suma de los cuadrados de  $AC$  y  $CB$ , ó que  $AB^2 > AC^2 + CB^2$ ; y si el triángulo  $ABC$  (fig. 78) es acutángulo, se tendrá  $AB^2 < AC^2 + CB^2$ .

*Dem.* 1.<sup>o</sup> Bajando la perpendicular  $BD$  (fig. 77), el trián-

gulo  $ADB$  será rectángulo, y (332. 4.<sup>a</sup>) dará

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad (n);$$

pero  $AD^2 = (AC + CD)^2 = AC^2 + 2AC \times CD + CD^2$ ; y por ser rectángulo el triángulo  $CBD$ , será (§ 332 cor.)  $BD^2 = BC^2 - CD^2$ ; luego poniendo, en vez de estos cuadrados sus valores en la ecuación (n), se convertirá en

$AB^2 = AC^2 + 2AC \times CD + CD^2 + BC^2 - CD^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times CD$ ; luego el cuadrado de  $AB$ , que es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, mas la cantidad  $2AC \times CD$ , excederá á dicha suma en esta cantidad; luego será mayor. Lo primero Q. D. D

2.<sup>o</sup> Bajando la perpendicular  $BD$  (fig. 78), el triángulo rectángulo  $ABD$  dará  $AB^2 = AD^2 + BD^2$  (p);

pero  $AD^2 = (AC - CD)^2 = AC^2 - 2AC \times CD + CD^2$ ;

y el  $BDC$  dará  $BD^2 = BC^2 - CD^2$ ; y substituyendo estos valores en (p) resultará

$$AB^2 = AC^2 - 2AC \times CD + CD^2 + BC^2 - CD^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times CD;$$

luego al cuadrado de  $AB$ , que es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, ménos la cantidad  $2AC \times CD$ ; le faltará dicha cantidad para ser igual con ella; luego será menor. L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

*Esc. 1.<sup>o</sup>* Para cifrar en ecuaciones la relacion de los lados de los triángulos, y para la espedicion de los cálculos, se señalan en general los ángulos por las letras mayúsculas  $A, B, C$ , que se suponen en sus vértices, y por  $a, b, c$ , los lados opuestos respectivamente á dichos ángulos, como se ve (figs. 77 y 78); con lo cual las dos ecuaciones anteriores, reunidas en una, darán  $c^2 = b^2 + a^2 \pm 2b \times CD$ ; que quiere decir, que *en todo triángulo oblicuángulo el cuadrado del lado mayor (ó de un lado), es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, mas ó ménos el duplo del lado sobre que se tiró la perpendicular, multiplicado por el segmento interceptado por la perpendicular hasta el ángulo opuesto al lado que se considera.*

*Esc. 2.<sup>o</sup>* Si el segmento  $CD$  fuese nulo, se tendría  $c^2 = b^2 + a^2$ , y el triángulo sería rectángulo, pues la perpendicular caería por el mismo lado  $BC$ , ó sería el mismo lado.

*Cor.* Luego, en un triángulo *el cuadrado de un lado es menor, igual ó mayor que la suma de los cuadrados*

de los otros dos lados, segun el ángulo opuesto á dicho lado sea agudo, recto ú obtuso.

336 Teor. Si desde dos vértices cualesquiera de un triángulo se tiran dos rectas al punto medio de su respectivo lado opuesto, dichas rectas se encontrarán á las dos terceras partes de la distancia á su vértice respectivo.

Espl. Sea  $ABC$  (fig. 79) un triángulo cualquiera; digo que si desde dos ángulos cualesquiera  $A, C$ , se tiran las  $AL, CO$ , á los puntos  $L, O$ , medios de los lados opuestos  $BC, AB$ , el punto de interseccion  $G$  distará de  $A$  los dos tercios de  $AL$  ó será  $AG = \frac{2}{3}AL$ , y del mismo modo  $CG = \frac{2}{3}CO$ .

Dem. Porque tirando la  $OL$ , será (321) paralela con  $AC$ , pues divide en partes iguales á los lados  $AB, BC$ , y se tendrá (§ 322)  $AB:BO::AC:OL$ ; y como por el supuesto  $BO = \frac{1}{2}AB$ , resulta  $OL = \frac{1}{2}AC$ .

Ahora, los triángulos  $OGL, AGC$ , son semejantes por tener los ángulos en  $G$  iguales por opuestos al vértice, el ángulo  $OLG = GAC$  por alternos internos, luego (331 cor. 1.<sup>o</sup>) son semejantes, y darán  $AC:OL::AG:GL::CG:GO$ ; y como  $OL = \frac{1}{2}AC$ , será  $GL = \frac{1}{2}AG$ , y  $OG = \frac{1}{2}CG$ , ó se tendrá  $AG:GL::2:1$ ; que componiendo, comparando con el antecedente, será  $AG+GL=AL:AG::3:2$ , que da  $AG = \frac{2}{3}AL$ ; del mismo modo se tiene  $CG = \frac{2}{3}CO$ , y resulta L. Q. D. D.

337 Teor. Si dos rectas se encuentran dentro de un círculo, se cortan en partes recíprocamente proporcionales.

Espl. Se dice de dos rectas que están divididas en partes recíprocamente proporcionales, cuando las partes de la una, ó ella y una parte suya, forman los medios de una proporcion, y las partes de la otra, ó ella y una parte suya, forman los extremos; así, vamos á probar que las dos rectas  $BA, DC$  (fig. 80) que se encuentran dentro del círculo  $ADBC$ , se cortan de manera que  $AE:EC::ED:EB$ .

Dem. Únanse los puntos  $D$  y  $A$  por la  $DA$ , y los  $B$  y  $C$  por la  $BC$ ; los triángulos  $DAE, BEC$  tienen los ángulos en  $E$  iguales (257), y los en  $D$  y en  $B$  iguales (304 corol. 2.<sup>o</sup>) por insistir sobre un mismo arco  $AC$ ; luego son semejantes, y darán  $AE:EC::DE:EB$ , que es L. Q. D. D.

338 Teor. Si desde un punto fuera del círculo se ti-

ran dos secantes, que terminen en la parte cóncava de la circunferencia, las partes externas serán recíprocamente proporcionales con las secantes enteras.

*Espl.* Si desde el punto  $P$  (fig. 81) se tiran al círculo  $ABDC$  dos secantes  $PD, PC$ , digo que tendremos  $PA:PB::PD:PC$ .

*Dem.* Si tiramos las  $CB$  y  $DA$ , los triángulos  $PBC, PAD$ , ademas del ángulo comun  $P$ , tienen iguales (304 cor. 2.º) los  $C$  y  $D$ ; luego (331, cor. 1.º) serán semejantes, y nos darán  $PA:PB::PD:PC$ , que es L. Q. D. D

339 Teor. Si desde un ángulo de un triángulo se tira una perpendicular al lado opuesto, el lado sobre que cae la perpendicular es á la suma de los otros dos, como la diferencia de estos es á la diferencia de los segmentos.

*Espl.* Si desde el ángulo  $B$  del triángulo  $ABC$  (figura 82), se tira la perpendicular  $BD$  al lado opuesto  $AC$ , se verificará que  $AC:AB+BC::AB-BC:AD-CD$ .

*Dem.* Haciendo centro en  $B$  con un radio igual al lado menor  $BC$ , trácese la circunferencia  $CEGF$ , y prolonguese la  $AB$  hasta que encuentre á dicha circunferencia; con lo cual las dos secantes tiradas desde  $A$  darán (§ 338)

$$CA:AE::AG:AF; \quad \text{pero} \quad \begin{cases} AE=AB+BE=BA+BC, \\ AG=AB-BG=AB-BC, \\ AF=AD-DF=AD-DC; \end{cases}$$

luego substituyendo estos valores en la proporcion será

$$AC:AB+BC::AB-BC:AD-DC,$$

ó espresando por  $S, s$ , los segmentos  $AD, CD$ , se tendrá  $b:c+a::c-a:S-s$ , que es L. Q. D. D.

*Esc.* Esta proporcion da  $S-s = \frac{(c+a)(c-a)}{b}$ ;

y como  $S+s=AD+DC=AC=b$ , se tendrá (§ 154)

$$S = \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{(c+a)(c-a)}{b}, \quad \text{y} \quad s = \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{(c+a)(c-a)}{b}.$$

340 Teor. Si desde dos ángulos homólogos de dos figuras semejantes  $ABCDE, abcde$  (fig. 71), se tiran diagonales á los demas ángulos, los triángulos homólogos, ó del mismo modo colocados, serán semejantes.

*Dem.* Por ser las figuras semejantes, se tiene

$$AB:ab::BC:bc::CD:cd::DE:de::EA:ea::\text{etc.}; \text{etc.},$$

y  $A=a, B=b, C=c, D=d, E=e$ , etc. etc.

Luego los triángulos  $ABC, abc$ , tienen el ángulo  $B=b$ , formado por dos lados proporcionales; luego son semejantes (330) y dan  $BC:bc::CA:ca::CD:cd$  (por la serie de razones iguales del supuesto), y el ángulo  $ACB=acb$ .

Ahora, si de los ángulos totales en  $C$  y  $c$ , que son iguales, quitamos los iguales  $ACB$  y  $acb$ , los residuos  $ACD, acd$ , también serán iguales; luego los triángulos  $ACD, acd$ , se hallan en el mismo caso que los anteriores; luego son semejantes; y como lo mismo se demostraría de todos los demas, resulta L. Q. D. D.

341 Teor. *Recíprocamente, si dos figuras se componen de un mismo número de triángulos semejantes, y del mismo modo colocados en cada figura, serán semejantes.*

*Dem.* De la semejanza de los triángulos  $ABC, abc$ , se deduce que el ángulo  $B=b$ , y  $BCA=bca$ ; de la de los triángulos  $ACD, acd$ , se deduce que  $ACD=acd$ ; sumando estas dos ecuaciones será  $BCA+ACD=bca+acd$ , ó  $BCD=bcd$ ; y como lo mismo demostraríamos de los demas ángulos, resulta que las figuras  $ABCDE, abcde$ , tienen iguales sus ángulos.

Ahora, los triángulos semejantes  $ABC, abc$ , dan

$$AB:ab::BC:bc::AC:ac;$$

los  $ACD, acd$ , dan  $AC:ac::DC:dc::AD:ad$ ;

los  $ADE, ade$ , dan  $AD:ad::DE:de::EA:ea$ .

La segunda de estas series de razones iguales tiene comun con la primera, la razón  $AC:ac$ , y la tercera tiene comun con la segunda, la  $AD:ad$ ; luego podrémos enlazar las tres de este modo:

$$AB:ab::BC:bc::AC:ac::DC:dc::AD:ad::DE:de::EA:ea;$$

ó prescindiendo de las razones en que entran las diagonales, será  $AB:ab::BC:bc::DC:dc::DE:de::EA:ea$ .

Luego, además de tener los ángulos iguales, tienen proporcionales los lados, y por lo mismo son semejantes. L. Q. D. D.

*Esc.* Si representamos en general por  $L, L', L''$ , etc.,  $l, l', l''$ , etc. los lados de dos figuras semejantes; por  $P, p$ , sus perímetros; por  $D, d$ , dos diagonales homólogas; y por  $R, r$ , los radios rectos ú oblicuos de dos polígonos regulares de un mismo número de lados, que entónces son semejantes (327), se tendrá

$$L:l::L':l'::L'':l''::etc.:etc.:D:d,$$

que (185.1<sup>a</sup>) da  $L+L'+L''+etc.:l+l'+l''+etc.:L:l::D:d$ ; ó reduciendo será  $P:p::L:l::D:d$  (m), y si son regulares será  $P:p::L:l::R:r$  (n).

La (m) quiere decir, que los perímetros de dos figuras

*semejantes son entre sí como sus lados ó diagonales homólogas; y la (n) dice, que en los polígonos regulares semejantes, los perímetros son entre sí como los lados homólogos, ó como los radios rectos ú oblicuos.*

342 Si siendo  $AB$  (fig. 83) el lado de un polígono regular cualquiera inscrito en un círculo, *se quisiese otro de duplo número de lados*, no habría mas que tirar el radio recto  $OE$  prolongado hasta  $B'$ , y unir el punto  $B'$  con los  $A, B$ ; pues cada lado  $AB'$  subtendería un arco que sería la mitad del primero. Y si dado un polígono  $abcdef$  (fig. 85) inscrito, *se quisiese uno circunscrito*, se tirarían los radios oblicuos  $Oa, Ob$ ; etc., y tirando en sus extremos las tangentes  $FA, AB$ , etc. su conjunto formaría el polígono que se quería; pues todos los triángulos  $aAb, bBc$ , etc. son iguales (261) é isósceles (303); de donde se sacará la igualdad de los lados  $AB, BC$ , etc. y la de los ángulos  $A, B, C$ , etc.

Y si teniendo un polígono  $MRVO$  (fig. 86) circunscrito á un círculo, *se quisiese otro de duplo número de lados*, se tirarían los radios oblicuos  $CM, CR$ , etc. y en los puntos  $Q, D$ , etc. donde encontrasen á la circunferencia, se tirarían las tangentes  $PN, BT$ , etc. y se tendría el polígono  $PNBT$  etc. que se quería; porque tirando las  $AQ, AD$ , etc. todos los triángulos  $QNA, ABD$  serían iguales entre sí é isósceles.

343 Teor. *Si en un círculo se inscribe un polígono cualquiera, y despues otro de duplo número de lados, y así sucesivamente, la sajeta correspondiente á cada uno irá siendo mas de dos veces menor que la del anterior; y por lo mismo podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.*

*Espl.* Sea  $ABED$  (fig. 84) un cuadrado inscrito en el círculo; digo que si se le inscribe un octógono, y luego un polígono de 16 lados, y así sucesivamente, la sajeta  $Bk$  del cuadrado será mas de dos veces menor que el radio  $BC$ ; y la  $Br$  del octógono mas de dos veces menor que la  $Bk$  del cuadrado, y así sucesivamente; de manera que al cabo de cierto tiempo podrá ser menor que cualquier cantidad dada.

*Dem.* Si dividimos el arco  $BHA$  en dos partes iguales en  $H$ ;

y tiramos las AH y BH, estas serán lados del polígono de duplo número de lados; y por ser los cuadrados de las cuerdas tiradas desde los extremos de un diámetro (333 cor. 2.º) como sus segmentos correspondientes, tendremos  $BA^2: BH^2:: BC: Bk$ ; pero por ser obtusángulo el triángulo BHA se tiene (335 1.º) que  $AB^2 > BH^2 + AH^2$ ; pero  $AH = BH$ , luego  $AH^2 = BH^2$ ; y la desigualdad anterior se convertirá en  $AB^2 > 2BH^2$ ; luego la proporción anterior es tal que el antecedente de la primera razón es mas de dos veces mayor que el consecuente; luego el antecedente BC de la segunda será tambien mas de dos veces mayor que su consecuente Bk, ó  $BC > 2Bk$ , ó lo que es lo mismo  $Bk < \frac{1}{2}BC$ .

Y como lo mismo se demostraría de Br respecto de Bk, etc. resulta (229 cor. 1.º) L. Q. D. D.

344 Teor. Si á un círculo se le circunscribe un polígono regular cualquiera, y despues otro de duplo número de lados, y así sucesivamente, 1.º el lado de este último será mas de dos veces menor que el del anterior; y 2.º la sajita del segundo será mas de dos veces menor que la del primero; y por lo mismo dichas rectas podrán llegar á ser menores que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.

Espl. Sea MRVO (fig. 86) un cuadrado circunscrito al círculo, y TBNP etc. un octógono; digo 1.º que el lado del octógono NB es mas de dos veces menor que el del cuadrado MR, ó que  $NB < \frac{1}{2}MR$ ; y 2.º que la sajita Bc del octógono (siempre llamaremos sajita en un polígono regular la diferencia entre sus radios recto y oblicuo) es mas de dos veces menor que la RD del cuadrado, ó que  $Bc < \frac{1}{2}RD$ ; y si se continúa circunscribiendo polígonos de duplo número de lados, dichas rectas podrán llegar á ser menores que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.

Dem. 1.º El triángulo rectángulo BDR da  $BR > BD$ ; y como (§ 342)  $BD = AB$ , será  $BR > AB$ ; por la misma razón será  $MN > NA$ ; sumando ordenadamente se tendrá

$$BR + MN > AB + NA = NB;$$

y añadiendo NB, será  $BR + MN + NB > NB + NB$ , ó reduciendo será  $MR > 2NB$  ó  $NB < \frac{1}{2}MR$ , que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Para demostrar la segunda parte, hallaremos los valores de las sajitas, y comparándolos se deducirá lo que hemos dicho. En efecto, bajando la perpendicular DI, esta será semilado del

cuadrado inscrito, *al* será la sajeta del mismo cuadrado, y además la *DI* será paralela con *aR*; por lo que (320 cor. 1.º), el triángulo *CaR* dará

$$Ca:CR::la:DR = \frac{CR \times la}{Ca} = \frac{CR}{Ca} \times la \text{ (m).}$$

Bajando la perpendicular *cs*, esta será semilado del octógono inscrito, *Ds* será su sajeta, y además la *cs* será paralela con *BD*; por lo que el triángulo *CDB* dará

$$CD:CB::Ds:Bc = \frac{CB \times Ds}{CD} = \frac{CB}{CD} \times Ds \text{ (n).}$$

Comparando los valores (m), (n) de *DR* y *Bc*, se verá que el factor  $\frac{CR}{Ca}$  del primero es mayor que el  $\frac{CB}{CD}$  del segundo

do, pues teniendo igual denominador, el numerador *CR* del primero es mayor (273) que el *CB* del segundo; el factor *la* del primero es (343) mas de dos veces mayor que el *Ds* del segundo; luego el valor de *Bc* es, por razon del factor *CB*, menor que el de *DR*; y por razon del factor *Ds* mas de dos veces menor; luego con mas razon será mas de dos veces menor, ó se tendrá  $Bc < \frac{1}{2}DR$ , que es L. 2.º Q. D. D.

345 Teor. Si en un círculo se inscribe y circunscribe un polígono regular de un mismo número de lados; y después se inscriben y circunscriben otros de duplo número de lados, y así sucesivamente, la diferencia entre el perímetro del circunscrito y el del inscrito podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.

Dem. Sea *P* el perímetro del polígono circunscrito y *R* su radio recto, que es el mismo del círculo; y sean *p* y *r* el perímetro y radio recto del inscrito; y como estos polígonos son semejantes (327), sus perímetros serán proporcionales (341 esc.) con sus radios rectos, y se tendrá  $P:p::R:r$ ; que, dividiendo, da

$$P-p:P::R-r:R; \text{ de donde sale } P-p = \frac{P(R-r)}{R}.$$

Y como en el valor de *P—p* entra por factor *R—r*, que es la sajeta del polígono inscrito, y esta va siendo mas de dos veces menor al paso que se inscriben polígonos de duplo número de lados, resulta en virtud de lo espuesto (229 cor. 3.º) que la di-

ferencia  $P-p$  de los perímetros podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea. L. Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir un polígono al círculo, en que la diferencia entre el perímetro de uno ú otro y la circunferencia, sea menor que cualquier cantidad dada. Porque como la circunferencia (308) es mayor que el perímetro del polígono inscrito, y menor que el del circunscrito, al acercarse estos perímetros el uno al otro, se acercarán con mas razon á la circunferencia.

346 Teor. Las circunferencias de los círculos son entre sí como sus radios  $R, r$ , ó diámetros  $D, d$ ; y la misma relacion guardan las semicircunferencias, cuadrantes y arcos de un mismo número de grados.

*Dem.* Sean  $P, p$  los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, circunscritos á dos círculos cuyas circunferencias sean  $C, c$ , los diámetros  $D, d$ , y  $R, r$  los radios, que tambien son (317 esc.) los radios rectos de dichos polígonos; y (341 esc.) se tendrá  $P:p::R:r$ ; pero aumentando el número de lados de estos polígonos, se pueden acercar  $P$  á  $C$  y  $p$  á  $c$  al mismo tiempo tanto como se quiera (345 cor.); y siendo  $C, c$  constantes, resulta (231) que  $P:p::C:c$ ; y como esta proporcion y la anterior tienen una razon comun, nos darán (§ 184 . 2.<sup>a</sup>)

$C:c::R:r::2R:2r::D:d$ . Y dividiendo por 2, por 4, y en general por  $n$  los dos términos de la primera razon, resulta todo L. Q. D. D.

*Cor.* 1.<sup>o</sup> Luego si se conociese la relacion que un diámetro tenía con su circunferencia, en dando otro diámetro ó circunferencia se podría venir en conocimiento de la circunferencia ó diámetro respectivo; pues en cualquiera de estos dos casos serían conocidos tres términos de la proporcion anterior.

347 Pero Arquímedes halló que dicha relacion del diámetro á la circunferencia era la de 7 á 22; Pedro Meccio halló la de 113 á 355; y la que nosotros hemos calculado por procedimientos geométricos en nuestro Tratado elemental (tomo I, § 505) es la de 1 á

$3,14159265358979324$ ; y por las series (tomo II del mismo Tratado, haciendo uso de la fórmula del § 647), hemos hallado que la espresada relacion es la de 1 á

3,1415926535897932384626433832795028; (\*) luego haciendo uso de esta última, para hallar la circunferencia correspondiente al diámetro  $D$ , formaremos la siguiente proporción.

1:3,14159 etc.::D:C = 3,14159 etc.×D =  $\pi D = 2\pi R$ , llamando  $\pi$  al factor 3,14159 etc. Donde debe observarse, que cuando la letra  $\pi$  está en las expresiones de circunferencia, círculo, etc., expresa el valor 3,14159 etc. y cuando se trata de ángulos vale dos ángulos rectos.

348 Para rectificar un arco ó hallar su longitud estendido en línea recta, se dirá  $360^\circ$  que vale toda la circunferencia, es á su longitud  $3,14159D = \pi D$ ; como el número de grados  $G$  del arco es á su longitud respectiva

$$L; \text{ ó } 360^\circ : \pi D :: G : L = \frac{\pi DG}{360^\circ}.$$

349 Los cálculos que hay que hacer para hallar la relación anterior del diámetro á la circunferencia, son sumamente complicados bajo cualquier aspecto, y por cualquier método que se hagan, como puede verse en los párrafos ántes citados; por lo cual vamos á poner aquí un método gráfico muy sencillo, que podrá servir para casi todas las aplicaciones prácticas. Es el siguiente.

Sea  $AEBD$  (fig. 87) una circunferencia; tírese en el punto  $A$  una tangente indefinida  $FG$ ; tómese (317 cor. 10<sup>o</sup>) el arco  $Am$  de  $30^\circ$ , por el punto  $m$  tírese el radio  $Om$  hasta  $F$ ; tómese ahora sobre la misma tangente desde  $F$  á la derecha la magnitud  $FG$  igual á tres veces el radio; desde el punto  $G$ , tírese al extremo  $B$  del diámetro la  $BG$ , y esta será igual en longitud á la semicircunferencia  $ADB$ , aproximada hasta mas de diez milésimas.

(\*) En un manuscrito que se halla en la biblioteca de Ratclif en Oxford hay una relación del diámetro á la circunferencia con 155 guarismos decimales, y es la siguiente:

1: 3,141592653589	795258	462645	385279	502884..
..197169	599575	105820	974944	592507 816406..
..286208	998628	054825	542117	067982 148086..
..515282	506647	095844	609550	582371 725559..
..4081284802 etc.				

En efecto, tirando la  $mn$  perpendicular al radio  $AO$ , será semilado de exágono, y de consiguiente igual á la mitad del radio  $Om$ ; por lo que el triángulo  $AFO$  dará

$$On:OA::mn:FA=\frac{mn \times AO}{On};$$

pero suponiendo el radio  $AO=1$ , será  $mn=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}$ , y

$$On=\sqrt{Om^2-mn^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{4-1}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3};$$
 luego

$$\text{sustituyendo se tendrá } FA=\frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$
 mul-

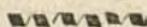
tiplicando arriba y abajo por  $\sqrt{3}$ ; de donde resulta que el cateto  $AG$  del triángulo rectángulo  $BAG$  será  $AG=3-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ; de consiguiente la hipotenusa

$$BG \text{ será } BG=\sqrt{AB^2+AG^2}=\sqrt{2^2+(3-\frac{1}{3}\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+9-2 \times 3 \times \frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{9} \times 3}=\sqrt{13-2\sqrt{3}+\frac{1}{3}}=$$

$$\sqrt{\frac{40}{3}-2\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{40}{3}-2 \times 1,7320508}=\sqrt{13,3333333-3,4641016}=\sqrt{9,8692317}=3,14153.$$

Pero la semicircunferencia, siendo el radio la unidad, está espresada por  $3,14159$  etc.; luego la recta  $BG$  es igual á la semicircunferencia  $BDA$  con ménos de una diezmilésima de diferencia. L. Q. D. D.

## SEGUNDA PARTE.



*De la estension en longitud y latitud, ó de las superficies.*

350 **H**ASTA aquí, solo hemos considerado en las figuras su perímetro; ahora pasamos á manifestar las propiedades del espacio que encierran, ó de las superficies.

*Teor. Los paralelogramos que tienen bases y alturas*

iguales, ó que tienen una misma base y altura, ó que tienen una misma base y están entre unas mismas paralelas, son equivalentes.

*Espl.* Sean  $ABCD$ ,  $ABEF$  (fig. 88) dos paralelogramos que tienen la misma base  $AB$ , y están comprendidos entre las paralelas  $AB$ ,  $DE$  (por consiguiente (286 esc. 1.º) tienen igual altura); digo que son iguales en superficie, ó que  $ABCD = ABEF$ .

*Dem.* En efecto, dichos paralelogramos nos dan  $AD = BC$ ,  $AF = BE$ ; además, de ser  $AB = EF$  y  $AB = CD$ , se saca  $CD = EF$ ; y añadiendo  $CF$ , será  $CD + CF = EF + CF$  ó  $DF = CE$ ; luego los triángulos  $DAF$ ,  $CBE$  son iguales (259). Ahora, si quitamos estos triángulos del cuadrilátero  $ABED$ , se tendrá  $ABED - DAF = ABED - CBE$ ; ó  $ABEF = ABCD$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Luego todo paralelogramo  $ABEF$  (fig. 89), equivale al rectángulo  $ABCD$  que tiene la misma base y altura.

351 Teor. Todo triángulo es la mitad de un paralelogramo de la misma base y altura.

*Dem.* Sea  $ABC$  (fig. 90) el triángulo dado; si por  $A$  se tira la  $AD$  paralela con  $BC$ , y por  $C$  la  $CD$  paralela con  $BA$ , se tendrá un paralelogramo  $BADC$ , del cual será diagonal el lado  $AC$ ; luego (313) el triángulo  $ABC = ACD$ , y la superficie de cada uno equivaldrá á la mitad de  $ABCD$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* 1.º Luego un triángulo  $ABC$  es la mitad del rectángulo  $BCEA$  que tiene la misma base  $BC$  y la misma altura  $AO$ ; porque el rectángulo  $BCEF$  es igual en superficie al paralelogramo  $ABCD$ .

*Cor.* 2.º Todos los triángulos que tienen bases y alturas iguales son equivalentes; por ser mitades de paralelogramos iguales en superficie.

352 Teor. Las superficies de dos rectángulos de una misma altura, son entre sí como sus bases.

*Espl.* Sean  $ABCD$ ,  $abcd$  (fig. 91) ó  $R$ ,  $r$ , dos rectángulos de iguales alturas  $AD = ad$ ; digo que serán entre sí como sus bases  $AB$ ,  $ab$ , ó que  $R:r::AB:ab$ .

Aquí puede ocurrir que las bases sean comensurables, ó que no lo sean.

*Dem.* 1.º Si las bases tienen la común medida  $AO = ao$ , y representamos por  $m$ ,  $n$ , las veces que está contenida en ca-

da una, se tendrá  $AB = m \times AO$ ,  $ab = n \times ao = n \times AO$ ; y formando proporción y simplificando por  $AO$ , será

$$AB:ab::m \times AO:n \times AO::m:n.$$

Ahora, si por los puntos de división  $O$ , etc.,  $o$ , etc., se conciben perpendiculares  $OP$ , etc.,  $op$ , etc., los rectángulos  $R$ ,  $r$ , quedarán divididos el primero en  $m$  rectángulos como  $\triangle OPD$  iguales entre sí por lo demostrado (350); y el segundo en  $n$  rectángulos como  $\triangle opd$  iguales entre sí y con  $\triangle OPD$  por la misma razón; luego se tendrá  $R = m \times \triangle OPD$ ;  $r = n \times \triangle OPD$ ; y formando proporción y simplificando por  $\triangle OPD$ , será

$$R:r::m \times \triangle OPD:n \times \triangle OPD::m:n;$$

esta proporción y la anterior (184..2.<sup>a</sup>) dan  $R:r::AB:ab$ , que es L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

2.<sup>o</sup> Si las bases son incommensurables, digo que no puede ser  $R:r >$  ni  $< AB:ab$ , y de consiguiente será  $R:r::AB:ab$ .

Sea  $R:r > AB:ab$ ; en este caso, menguando el conseqüente  $ab$ , crecerá la segunda razón; y suponiendo que se convierte en  $ax$ , para que la segunda razón resulte igual á la primera, se tendrá

$$R:r::AB:ax.$$

Hecho esto, concíbese dividida la  $AB$  en dos partes iguales, y luego en otras dos, etc. hasta que resulte una parte menor que  $bx$ , en cuyo caso colocada desde  $a$  hácia  $b$ , un punto de división caerá entre  $x$  y  $b$ , v. g. en  $t$ ; y tirando la perpendicular  $ut$ , los rectángulos  $R$  y  $atut$  que tienen commensurables sus bases  $AB$ ,  $at$  serán como estas; y darán  $R:atut::AB:at$ ; y como esta proporción y la anterior tienen los mismos antecedentes, los conseqüentes darán  $r = abcd:atut::ax:at$ ;

proporción absurda, por ser la primera razón de mayor desigualdad y la segunda de menor; luego no se puede suponer  $R:r > AB:ab$ .

Por un razonamiento análogo se demuestra que no puede ser menor; luego será igual. L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

353 Teor. *Dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

*Espl.* Sean  $ABCD$ ,  $AEGF$  ó  $R$ ,  $r$  (fig. 92) estos dos rectángulos; digo que  $R:r::AB \times AD:AE \times AF$ .

*Dem.* Habiendo dispuesto los rectángulos de manera que los ángulos en  $A$  estén opuestos al vértice, prolonguense los lados  $GE$ ,  $CD$  hasta que se encuentren en  $H$ , y tendremos que los dos rectángulos  $R$ ,  $R'$ , que tienen la misma altura  $AD$ , serán como sus bases  $AB$ ,  $AE$ , y darán  $R:R'::AB:AE$ ; del mismo modo los rectángulos  $R'$ ,  $r$ , que tienen la misma altura  $AE$ , darán  $R':r::AD:AF$ .

Multiplicando estas dos proporciones y omitiendo (191) el término  $R'$ , se tendrá  $R:r::AB \times AD:AE \times AF$ , que es L. Q. D. D.

*Esc.* Luego se puede tomar por medida de un rectángulo el producto de su base por su altura, con tal que se entienda por este producto el de dos números abstractos que espresen las unidades lineales contenidas en la base y las contenidas en su altura.

Así, eligiendo por unidad de medida el cuadrado  $a$  (fig 93) cuyo lado sea la unidad de longitud, esto es, 1 pie, 1 vara etc. y suponiendo que esté contenida dicha unidad de longitud 5 veces en la base del rectángulo  $A$ , y 3 en la altura, se tendrá  $A:a::5 \times 3:1 \times 1::15:1$ ; que da  $A=15a=15$ ; el rectángulo  $A$  equivaldrá á  $5 \times 3a=15a=15$ , porque el cuadrado de 1 es igual 1; esto es, el rectángulo  $A$  vale 15 veces el cuadrado  $a$ , como manifiesta la figura.

Si suponemos que el lado del cuadrado  $a$  represente un pie lineal, la  $mq$ , que se compone de tres veces el lado del cuadrado  $a$ , representará una vara lineal; y el cuadrado  $mnpq$  representará una vara cuadrada. Donde se vé que la vara cuadrada tiene 9 pies cuadrados; y del mismo modo resulta que el pie cuadrado tiene 144 pulgadas cuadradas, y la pulgada cuadrada 144 líneas cuadradas.

Son tantos los errores que se cometen de tomar las medidas longitudinales ó lineales por superficiales, aun por personas de muchos conocimientos, que para evitar los graves inconvenientes, que de esto sé que han resultado en hechos prácticos, verificados con enorme perjuicio de tercero, que me he visto precisado á poner los párrafos 237, 238 y 239 de mi Aritmética de Niños: en los cuales se aclara esto con tanta minuciosidad, que se halla á los alcances de todas las inteligencias (\*).

---

(\*) En el escolio del § 100 hemos prometido que por nota resolveríamos aquí ejemplos de cuestiones en que los factores y el producto espresen unidades de un mismo nombre, aunque de distinta naturaleza, y para cumplir nuestra promesa, propongámonos resolver la siguiente

*Cuestion.* Hallar la superficie de un rectángulo, cuya

354 Teor. *La superficie de un paralelogramo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

*Dem.* Porque el paralelogramo ABEF (fig. 89) es equivalente al rectángulo ABCD, que tiene la misma base

*base es 5 varas y 2 pies, y su altura 3 varas y 1 pie.*

En virtud de lo que se acaba de manifestar, deberémos multiplicar la base por la altura. Practicando las tres reglas del (§ 109), tendré que, por la primera, el multiplicando se reducirá á 17 pies, y el multiplicador á 10 pies; efectuando el producto se tiene  $17 \times 10 = 170$  pies, que serán pies cuadrados; y por la 3.<sup>a</sup> regla deberémos dividir este producto por 3, que espresa las veces que la unidad de especie inferior del multiplicador está contenida en la mayor; y resultará  $\frac{170}{3} = 56 + \frac{2}{3}$ ; volviendo á dividir por 3, por espresar las veces que la unidad de especie inferior del multiplicando está contenida en la de especie superior, se tiene

$$\frac{56 + \frac{2}{3}}{3} = 18 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = 18 + \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = 18 + \frac{8}{9}, \text{ que son varas cuadradas.}$$

Teniendo en consideracion, que el producto 170 son pies cuadrados, podríamos haber dividido desde luego por 9, que son los pies cuadrados que tiene la vara cuadrada, y se hubiera obtenido  $\frac{170}{9} = 18 + \frac{8}{9}$ , que es el mismo resultado de ántes. Si el quebrado  $\frac{8}{9}$  de vara cuadrada lo queremos valuar en pies cuadrados, deberémos multiplicar su numerador por 9, que son los pies cuadrados que tiene la vara cuadrada; y dividiendo despues por el denominador 9, obtendríamos que  $\frac{8}{9}$  de vara cuadrada es 8 pies cuadrados; y la superficie del espresado rectángulo sería 18 varas cuadradas y 8 pies cuadrados.

En casos de esta naturaleza, es mas breve y mas claro el reducir los factores á números fraccionarios, y hacer la operacion en abstracto. En efecto, las 5 varas y 2 pies es lo mismo que  $5\frac{2}{3}$  varas  $= \frac{17}{3}$  varas. El multiplicador 3 varas y 1 pie es lo mismo que  $3\frac{1}{3}$  varas  $= \frac{10}{3}$  varas. Haciendo la multiplicacion será  $\frac{17}{3} \times \frac{10}{3} = \frac{170}{9} = 18 + \frac{8}{9} = 18$  varas cuadradas y 8 pies cuadrados.

Puede ocurrir aquí el conocer la superficie de un rectángulo, y una de sus dimensiones, y que se quiera encontrar la otra dimension. Supongamos que se nos dé la superficie del rectángulo

AB, y la misma altura AD; pero este tiene por medida  $AB \times AD$ ; luego  $AB \times AD$  es igual á la superficie del paralelogramo ABEF, que es L. Q. D. D.

*Cor.* De donde resulta, que la superficie de un trián-

que sea de 18 varas cuadradas y 8 pies cuadrados, y la base de dicho rectángulo que sea de 5 varas y 2 pies lineales. En este caso tambien es mas adecuado el reducir á números fraccionarios el dividendo y divisor. El dividendo 18 varas cuadradas y 8 pies cuadrados es lo mismo que  $18\frac{8}{9}$  varas cuadradas, ó reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, tendremos convertido el dividendo en  $\frac{170}{9}$  varas cuadradas. El divisor 5 varas y 2 pies lineales es lo mismo que  $5\frac{2}{3}$  varas lineales ó  $\frac{17}{3}$  varas lineales. Hemos dicho que el dividendo espresa varas cuadradas y el divisor varas lineales para la claridad; pero, al practicar la division, se debe hacer en abstracto para no incurrir en la impropiedad de dividir cosas heterogéneas. Efectuando

la division, se tiene  $\frac{170}{9} : \frac{17}{3} = \frac{5 \cdot 170}{9 \cdot 17} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ , que son varas lineales, y es lo mismo que 3 varas y 1 pie lineales, como en efecto así debía resultar.

Si se nos pidiese hallar la superficie de un rectángulo que tuviese 6 varas y 1 pie de base y 2 pies de altura, deberíamos reducir los dos factores á una misma unidad, esto es, á que ambos estuviesen espresados en varas ó ambos en pies. En el primer caso

la cuestion está reducida á multiplicar  $6\frac{1}{3}$  varas  $= \frac{19}{3}$  varas, por 2 pies  $= \frac{2}{3}$  varas. Efectuando la multiplicacion se tiene

$\frac{19}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{58}{9} = 4\frac{2}{9}$  que son varas cuadradas, ó lo que es lo mismo

4 varas cuadradas y 2 pies cuadrados.

Si hubiéramos reducido el multiplicando 6 varas y 1 pie á pies, se nos convertiría en 19 pies; que multiplicados por 2 pies, dan  $19 \cdot 2 = 38$ , que son pies cuadrados; y dividiendo por 9 que son los pies cuadrados que tiene la vara cuadrada, resultarán 4 varas cuadradas y 2 pies cuadrados. Si, dada la superficie 4 varas cuadradas y 2 pies cuadrados, y la dimension 2 pies lineales, quisiéramos hallar la otra dimension 6 varas y 1 pie podríamos ejecu-

gulo es igual al producto de su base por la mitad de su altura, ó á la altura por la mitad de la base. Porque el triángulo ABC (fig. 90) es la mitad del paralelogramo ABCD; y como la superficie de este es  $BC \times AO$ , la del triángulo será la mitad, ó  $BC \times \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}BC \times AO$ .

*Esc.* Si llamamos  $P$  á un paralelogramo cualquiera (fig. 94),  $A$  á su altura, y  $B$  á su base, se tendrá  $P = B \times A$ ; llamando  $p$  á otro paralelogramo, cuya base sea  $b$ , y  $a$  su altura, se tendrá  $p = b \times a$ ; y formando proporcion, será  $P:p::B \times A:b \times a$ ; que espresa, que las superficies de dos paralelogramos cualesquiera son como los productos de sus bases por sus alturas, ó están en razon compuesta de sus bases y alturas.

Si  $A = a$ , será  $P:p::B \times A:b \times A::B:b$ ; que quiere decir, que los paralelogramos que tienen una misma altura, son como sus bases.

Si se supone  $B = b$ , será  $P:p::B \times A:B \times a::A:a$ ; que quiere decir, que los paralelogramos de iguales bases son como sus alturas.

Si  $P = p$ , serán tambien iguales sus espresiones, ó será  $B \times A = b \times a$ , de donde (§ 180)  $B:b::a:A$ ; es decir, que cuando los paralelogramos son iguales, las bases están en razon inversa de las alturas.

Si multiplicamos extremos y medios en la proporcion primitiva, será  $P \times b \times a = p \times B \times A$ ; de donde  $B:b::P \times a:p \times A$ , que quiere decir, que á desigualdad de todo, las bases están en razon compuesta, directa de los paralelogramos,

tarlo tambien de dos modos, ó reduciendo el dividendo á pies, ó el divisor á varas.

Por el primer procedimiento, el dividendo será 38 pies cuadrados, y el divisor 2 pies lineales; efectuando en abstracto la division, será  $\frac{58}{2} = 19$ , que serán pies longitudinales, que equivalen á 6 varas y 1 pie, como debía ser.

Reduciendo ambos términos á quebrado de su vara respectiva, se tendrá  $\frac{58}{9} : \frac{2}{3} = \frac{5.58}{2.9} = \frac{19}{5}$  varas lineales = 6 varas y 1 pie lineales.

é inversa de las alturas; y sacando de la misma ecuacion la razon de las alturas, se tendrá  $A:a::P \times b:p \times B$ ; que quiere decir, que á desigualdad de todo, las alturas están en razon compuesta, directa de los paralelogramos, é inversa de las bases.

355 Las superficies de dos paralelogramos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus bases, de sus alturas, y en general de sus líneas homólogas.

En efecto, sean  $P, p$  (fig. 94) dos paralelogramos, que por lo dicho ántes darán  $P:p::BC \times AE:bc \times ae$ ; y por ser semejantes, será  $AB:ab::BC:bc$ , y el ángulo  $B=b$ ; y como los en  $E$  y  $e$  son rectos, los triángulos  $ABE, abe$ , son semejantes (331 cor. 2.<sup>o</sup>), y darán  $AB:ab::AE:ae$ . Luego substituyendo en la razon compuesta de arriba, en vez de la  $AE:ae$ , su igual  $BC:bc$  ó  $AB:ab$ , se tendrá  $P:p::BC \times BC:bc \times bc::BC^2:bc^2::AB^2:ab^2::AE^2:ae^2$ .

Esc. Y como las mitades son entre sí como los todos, se deduce que los triángulos son como los productos de sus bases por sus alturas; que, á igualdad de bases, son como sus alturas etc. Sobre cuyas propiedades y modo de deducirlas, aconsejamos á los principiantes que se ejerciten todo lo que juzguen necesario, hasta que se lleguen á apropiarse ó familiarizar con este procedimiento; pues son innumerables las continuas aplicaciones que tiene.

356 Teor. La superficie de un trapecio  $ABCD$  (figura 95) es igual á su altura  $EF$  multiplicada por la semisuma de las bases paralelas  $AB, CD$ .

Dem. Si por el punto  $G$ , medio de  $CB$ , se tira  $KL$  paralela al lado opuesto  $AD$ , y se prolonga  $DC$  hasta que encuentre á esta en  $K$ , los triángulos  $GBL, GCK$  serán iguales (261); pues los ángulos en  $G$  son iguales, los  $B, C$  también, y  $CG=GB$  por construcción; luego añadiendo á ambos  $ALGD$ , resultará el trapecio  $ABCD$  equivalente al paralelogramo  $ADKL$ , y tendrá por medida la de este, que es  $EF \times AL$ .

Pero  $AL=DK=\frac{2AL}{2}=\frac{AL+DK}{2}=\frac{AE-BL+DC+CK}{2}=\frac{AB+CD}{2}$ , (porque  $-BL$  y  $+CK$  se destruyen por la igualdad

de los triángulos); luego substituyendo este valor de  $AL$  en la expresion  $EF \times AL$ , resultará la superficie del trapecio

$$ABCD=EF \times \frac{AB+CD}{2}, \text{ que era L. Q. D. D.}$$

*Esc.* Si por el punto G medio de BC, se tira GH paralela con la base AB, el punto H será tambien el medio de AD; porque AHGL es un paralelogramo, por ser paralelos los lados opuestos; luego

$$HG=AL=\frac{AB+CD}{2}; \text{ y substituyendo este nuevo valor,}$$

será  $ABCD=EF \times HG$ , esto es, *la superficie de un trapezio es igual á su altura multiplicada por una paralela equidistante de las bases paralelas.*

357 Teor. *La superficie de un polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad de su radio recto.*

*Espl.* Sea GHPK etc. (fig. 96) un polígono regular de  $n$  lados, que representaremos por  $P'$ ; sea P el perímetro GHP etc. y R su radio recto OT; digo que se tendrá  $P' = P \times \frac{1}{2}R$ .

*Dem.* Por ser regular el polígono, todos los  $n$  triángulos GOH, GOM, etc. son (317 cor. 2.º) iguales; luego será sup. de polígono GHPK etc.  $= n \times GOH = n \times HG \times \frac{1}{2}OT$ ; pero  $n \times HG$  compone el perímetro P del polígono; luego substituyendo será  $P' = P \times \frac{1}{2}R$ , que es L. Q. D. D.

*Cor. 1.º* Luego si llamamos  $p'$  otro polígono regular,  $p$  á su perímetro, y  $r$  á su radio recto, se tendrá  $p' = p \times \frac{1}{2}r$ ; y formando proporcion será

$$P':p'::\frac{P \times R}{2}:\frac{p \times r}{2}::P \times R:p \times r.$$

*Cor. 2.º* Si los polígonos fuesen de un mismo número de lados, serían semejantes (327), y se tendría (§ 341 esc.)  $P:p::R:r::L:l$ , representando por L, l, dos líneas homólogas; luego substituyendo en la razon compuesta anterior  $P \times R:p \times r$  en vez de una de las componentes su igual sacada de aquí, se tendrá

$$P':p'::P \times P:p \times p::R \times R:r \times r::P^2:p^2::R^2:r^2::L^2:l^2;$$

que quiere decir, *que las superficies de los polígonos regulares semejantes ó de un mismo número de lados, guardan la misma razon que los cuadrados de los perímetros, de los radios rectos, y en general son como los cuadrados de sus líneas homólogas.*

*Esc. 1.º* Aunque los polígonos no sean regulares, se verifica esta proposición, con tal que sean semejantes; porque en este caso los podremos dividir (340) en cierto número de triángulos  $A, B, C, etc.$   $a, b, c, etc.$  semejantes, y será  $P' = A + B + C + etc.$  y  $p' = a + b + c + etc.$ ; y como los triángulos tendrán la razón de los cuadrados de los lados homólogos, se sigue que si espresamos por  $L, l$  á estos lados, nos resultará  $A::B::C::etc::etc::L^2:l^2$ , de donde (185. 1.ª) sale

$$A + B + C + etc. : a + b + c + etc. :: L^2 : l^2;$$

ó lo que es lo mismo  $P' : p' :: L^2 : l^2$ .

*Esc. 2.º* Cuando el polígono no es regular, se divide en triángulos por medio de diagonales, etc.; se halla la superficie de cada uno, y sumando las de todos, se tendrá la de la figura.

358 Teor. Si en un círculo se circunscriben é inscriben polígonos regulares de un mismo número de lados; despues, de un duplo número de lados, y así sucesivamente, la diferencia entre el circunscrito y el inscrito se podrá hacer menor que cualquier cantidad dada.

*Dem.* Si espresamos por  $P'$  la superficie del polígono circunscrito, por  $p'$  la del inscrito, y por  $R, r$  sus radios rectos, se tendrá (357 cor. 2.º)  $P' : p' :: R^2 : r^2$ ; que dividiendo da

$$P' - p' : P' :: R^2 - r^2 : R^2; \text{ de donde sale } P' - p' = \frac{P'(R^2 - r^2)}{R^2}.$$

Pero, el radio recto del polígono circunscrito, que es el mismo que el del círculo, se compone del radio recto del polígono inscrito y de la sajita, á que llamaremos  $s$ ; luego  $R^2 = (r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$ ; cuyo valor sustituido en el numerador de la espresion anterior, y reduciendo, la convertirá en

$$P' - p' = \frac{P'(2rs + s^2)}{R^2} = \frac{P'(2r + s)}{R^2} \times s; \text{ y como en esta espresion en-}$$

tra por factor la sajita  $s$ , que (344) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, resulta (229 cor. 3.º) que tambien podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, la diferencia entre las superficies de dichos polígonos. L. Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá hacer, que la diferencia entre la superficie de uno de estos polígonos y la del círculo sea menor que cualquier cantidad dada.

Porque el círculo es menor que el polígono circunscrito del que es parte, y mayor que el inscrito, respecto del cual es todo.

359 Teor. *La superficie de un círculo es igual al producto de la circunferencia por la mitad del radio.*

*Espl.* Sea  $O$  un círculo cualquiera,  $C$  su circunferencia, y  $R$  el radio; digo que  $O = C \times \frac{1}{2}R$ .

*Dem.* Si espresamos por  $P'$  la superficie de un polígono regular circunscrito al círculo, por  $P$  su perímetro, y por  $R$  su radio recto, que es el mismo del círculo, tendremos (§ 357)  $P' = P \times \frac{1}{2}R$ ; pero  $P'$  se puede acercar (358 cor.) á  $O$  tanto como se quiera, y  $P \times \frac{1}{2}R$  se puede acercar al mismo tiempo á  $C \times \frac{1}{2}R$  tanto como se desée, por poderlo hacer (§ 345 cor.)  $P$  á  $C$  y ser  $\frac{1}{2}R$  común; luego tenemos aquí dos cantidades variables  $P'$  y  $P \times \frac{1}{2}R$ , que, al paso que menguan, se pueden acercar á las dos constantes  $O$  y  $C \times \frac{1}{2}R$  todo lo que se quiera, conservando siempre la razon de igualdad; luego las constantes tendrán (231 cor.) esta misma razon; y será  $O = C \times \frac{1}{2}R$ , que es L. Q. D. D.

*Cor. 1.º* Dividiendo por 2, por 4, por  $n$ , la ecuacion anterior, se tendrá

$$\frac{O}{2} = \frac{C}{2} \times \frac{1}{2}R, \quad \frac{O}{4} = \frac{C}{4} \times \frac{1}{2}R, \quad \frac{O}{n} = \frac{C}{n} \times \frac{1}{2}R;$$

que quieren decir, que *el semicírculo, el cuadrante, y en general el sector del círculo, es igual á su arco correspondiente multiplicado por la mitad del radio.*

*Cor. 2.º* Si en vez de  $C$  sustituimos su valor (347), se tendrá

$O = 3,14159 \times D \times \frac{1}{2}R = 3,14159 \times 2R \times \frac{1}{2}R = 3,14159 \times R^2 = \pi R^2$ ; cuya fórmula importa retener, por ser el fundamento para la resolucion de todas las cuestiones relativas al círculo.

*Esc.* Si representamos por  $o$  otro círculo, por  $c$ ,  $r$ , su circunferencia y radio, por  $d$  su diámetro, y en general por  $l$  una línea homóloga con  $L$  del otro, como cuerdas de arcos de un mismo número de grados, etc. se tendrá  $o = c \times \frac{1}{2}r$ ; y formando proporcion será

$$O : o :: C \times \frac{1}{2}R : c \times \frac{1}{2}r :: C \times R : c \times r;$$

y substituyendo (189) en la razon compuesta  $C \times R : c \times r$ ,

en vez de la razón  $C:c$ , su igual  $R:r$ , ó  $D:d$ , ó  $L:l$ , etc. ó al contrario, se tendrá

$O:o::C\times C:c\times c::R\times R:r\times r::D\times D:d\times d::C^2:c^2::R^2:r^2::D^2:d^2::L^2:l^2$ ;  
que manifiesta, que las superficies de los círculos están en razón duplicada de sus circunferencias, radios, diámetros, y en general de sus líneas homólogas.

*De la reduccion de las superficies.*

---

360 Cuando dada una superficie se encuentra otra que le sea igual, se dice que se *reduce* la primera á la segunda.

Ahora, como vamos á manifestar que toda superficie se puede reducir á cuadrado, se suele decir que *medir una superficie y cuadrar una superficie es una misma cosa*. En efecto, cuando se mide una superficie, no se hace otra cosa sinó encontrar la relación que tiene aquella con el cuadrado que sirve de unidad de medida; y luego buseando un cuadrado que tuviese con el propuesto esta relación, tendríamos un cuadrado cuya superficie sería igual con la propuesta.

361 Así, si nos propusiéramos *hallar un cuadrado equivalente á un paralelogramo* dado ABCD (fig. 97), buscaríamos una media proporcional (334) entre la base BC y la altura AE, que, llamándola X, será el lado del cuadrado que se pide. Porque la construcción da  $\frac{BC}{X} = \frac{X}{AE}$ , de donde  $X^2 = BC \times AE$ ; y como  $X^2$  es el cuadrado formado sobre X, y  $BC \times AE$  es la superficie del paralelogramo (354), resulta que son iguales en superficie.

*Cor.* Luego para cuadrar un triángulo se hallará una media proporcional entre la base y la mitad de la altura.

362 Como un polígono regular es igual al perímetro por la mitad del radio recto, para cuadrarle se hallará una media proporcional entre el perímetro y la mitad del radio recto.

363 Del mismo modo, para reducir un círculo á cuadrado, ó buscar un cuadrado equivalente á un círculo, se hallará una media proporcional entre la circunferencia y la mitad del radio.

*De los planos, de su posición, y de los ángulos sólidos.*

---

364 Hasta aquí solo hemos considerado las líneas

tiradas sobre un mismo plano; ahora vamos á manifestar las posiciones que pueden tener respecto de los planos donde no se hallan, y la posición de los diferentes planos entre sí.

Se dice que una recta es *perpendicular* á un plano, ó que un plano es *perpendicular* á una recta, cuando dicha recta es perpendicular á todas las rectas que en dicho plano pasan por el punto en que esta perpendicular encuentra al plano, cuyo punto se llama el *pie* de la perpendicular. Este pie de la perpendicular se llama también la *proyección* del punto del espacio sobre dicho plano.

Una recta es *paralela* á un plano, ó un plano es *paralelo* á una recta, cuando no se pueden encontrar aunque se prolonguen todo lo que se desée; y dos planos son *paralelos*, cuando no se pueden encontrar á cualquier distancia que se prolonguen.

365 Esto entendido, lo primero que se debe saber es, que, así como por un punto pueden pasar infinitas líneas (244), del mismo modo *por una recta pueden pasar infinitos planos*. En efecto, si concebimos que el libro (fig. 1) se abre, la tapa  $ABDC$  girará al rededor de la recta  $CD$ , y tantas posiciones como se den á dicha tapa, manifestarán la situación de otros tantos planos que pasen por la recta  $CD$ ; y como estas posiciones pueden ser infinitas, se sigue que son infinitos los planos que pueden pasar por una recta. Ahora, si además de la recta  $CD$ , ó de los puntos  $C, D$ , se señalase otro punto  $A$ , ya no habría mas que un plano que pasase por dichos tres puntos, ó por una recta y un punto dado fuera de ella.

De donde se deduce: 1.º que *por dos puntos pueden pasar infinitos planos*.

2.º Que *tres puntos no situados en línea recta, ó un triángulo  $ABC$  (fig. 98), determinan la posición de un plano*.

3.º *Dos rectas  $AB, AC$  que se cortan, están en un mismo plano*; porque concibiendo un plano que pase por la  $AB$ , y que va girando hasta que pase por  $C$ , quedará determinada la posición del plano, que pasa por los

tres puntos  $A, B, C$ , ó por las dos rectas dadas.

4º *Dos paralelas  $AB, CD$  (fig. 99) determinan la posición de un plano; porque en la definición de las paralelas va incluida (§ 278) la idea de que se han de hallar en un mismo plano. De lo cual, y de lo espuesto (244 cor.), se deduce, que, de cualquier modo que se tiren ó conciban tiradas líneas rectas desde un punto de una paralela á cualquier punto de otra, como las  $EF, GH$ , se hallarán en el mismo plano que las paralelas  $AB, CD$ .*

366 Teor. *La intersección comun de dos planos que se cortan es una línea recta.*

*Dem.* Porque si en los puntos comunes á los dos planos se encontrasen tres, que no estuviesen en línea recta, los dos planos de que se trata, que pasan cada uno por estos tres puntos, no formarían (365) sino un solo y mismo plano, lo que es contra el supuesto.

367 Teor. *Si una recta  $AP$  (fig. 100) es perpendicular á otras dos  $PB, PC$ , que pasan por su pie, en el plano  $MN$ , será perpendicular al plano  $MN$ .*

*Dem.* Porque como las dos rectas  $PB, PC$  determinan la posición del plano  $MN$ , lo que suceda á las rectas debe suceder al plano; pero la recta  $AP$  es perpendicular á las dos  $PB, PC$ , (º); luego es perpendicular al plano. L. Q. D. D.

(º) Los principiantes hallarán dificultad en concebir que la  $AP$  sea perpendicular á las  $PB$  y  $PC$ ; pues á sus sentidos se presenta el ángulo  $APC$ , que está á la derecha de  $AP$ , como agudo, y el  $APB$ , que está á la izquierda de  $AP$ , como obtuso; y el ángulo  $APB$ , que está á la derecha de  $AP$  obtuso, y el  $APC$  que está á la izquierda de  $AP$  como agudo. Esta dificultad desaparece desde el momento en que un baston ó palo cualquiera se ponga, bien derecho, sobre la unión de los ladrillos de una sala cualquiera; y entonces se verá que el baston ó palo forma ángulos rectos con las líneas rectas que forman las juntas de los ladrillos.

Cuando se consideran planos, y líneas que están fuera de ellos, ó planos diferentes entre sí, ó los volúmenes en que entran ya las tres dimensiones, hay precisión de colocar estas figuras puestas en perspectiva para que se vean sus diferentes partes; pero las figuras en perspectiva, que representan los cuerpos, como se verían si fuesen transparentes, hacen aparecer los ángulos de distinta magnitud de lo que son. Por lo cual, suele ser penoso y difícil el concebir la forma de los cuerpos por las figuras que los representan en perspectiva. Para disminuir estas dificultades, los buenos Profesores procuran hacer sensibles las ideas, usando de cartones, agujas, alambres &c. Y me cabe la mayor

Cor. 1.º *La perpendicular AP es mas corta que una*

satisfaccion de que en España se ha dado ya un paso muy adelantado en esta parte de la enseñanza.

En efecto, tres Jóvenes Profesores, todos de la escuela de mi adorado Catedrático el señor *D. Antonio de Varas y Portilla*, casi á un mismo tiempo y sin que ninguno tuviese noticias de los trabajos de los otros, al tratar de enseñar á sus discipulos esta doctrina, les han presentado modelos de estas figuras sumamente adecuados, con los cuales han cortado el mal de raiz, y han logrado que sus discipulos adquieran ideas exactas sobre tan importante materia, y sin pérdida de tiempo.

Estos Jóvenes, sumamente apreciables, son *D. Eugenio de la Cámara*, Profesor que explica las Matemáticas en la Academia de San Fernando; *D. Agustin Pascual*, que las enseña en el Colegio de Don Sebastian de Fábregas y en el de *D. Miguel Martinez*; y *D. Fernando Boccherini*, que desempeña igual cargo en el instituto de Santander.

*D. Eugenio de la Cámara* ha presentado en el curso, que ha explicado en este año de 1840, todas las que corresponden al curso de Geometría; pero no son estas solamente las que ha construido por si mismo y con una singular exactitud, sinó que ha hecho las mas importantes de la Geometría Analítica, y se propone hacer las más necesarias para la inteligencia de la Mecánica.

Es tal el tino y sagacidad con que ha desempeñado este objeto, que me parece oportuno entrar en algunos detalles, para que, circulando estas ideas, puedan generalizarse por todas partes, y se eviten los grandes entorpecimientos que resultan de presentar, para adquirir las ideas de las formas que tienen los cuerpos, solamente figuras, que, aunque los representan del modo que los veríamos si fuesen transparentes, no guardan sus partes la posicion que representan dichas figuras.

Los modelos, que hasta el presente tiene construidos, para facilitar la inteligencia de varios puntos de las Matemáticas, y que me ha manifestado el Señor Cámara, representan las figuras 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 114, 115, 116 y 119, de este tomo, que corresponden á las que, en el T. 1.º p. II del Tratado Elemental, que contiene la Geometría, están allí señaladas con los números 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 230, 231, 232 y 235.

Por otra parte, como su objeto ha sido el mas grandioso, ha tomado por tipo las figuras de la Geometría del Tratado Elemental. Y así, ademas de las dichas, ha construido las 203, 204, 215, 216, 217, 220, 222, 223 y 224.

Todo esto es sin perjuicio de presentar á sus discipulos una coleccion muy completa de los cuerpos que considera la Geometría Elemental, como *prismas*, *pirámides*, *cilindros*, *conos* y *esferas*, y las partes que en estas se consideran. Esta coleccion ya se conocía, y se solia hacer uso de ella en algunos establecimientos de dentro y fuera de España; pero los modelos de las figuras espresadas no solo no son tan comunes en los Establecimientos de España y del Extranjero, sinó que hay algunos que no los he visto en ninguna parte; y entre los que he visto, no se hallan ejecutados con tanta exactitud. Y para dar,

*oblicua cualquiera* AQ; porque es cateto, y la oblicua, hipotenusa de un triángulo rectángulo.

en cuanto sea posible, las luces convenientes, á fin de promover su ejecucion y mejorar la enseñanza, haré algunas indicaciones acerca de su construccion.

Los planos los ha representado el Señor Cámara por tablitas delgadas de nogal, de forma rectangular y dimensiones arbitrarias en las cuales están trazadas las líneas correspondientes; y todas las rectas que se deben hallar en el espacio, las ha representado por sedas ó alambres, empleando de esta segunda clase los ménos posibles, para que de este modo se aproximen á la exactitud matemática, y ha puesto alambres cuando han de sostener las sedas, ó las tablas, como sucede á los modelos de las figuras 207, 208, 214 &c. En algunos ha sido necesario poner alguna tablita mas, que solo sirve para unir las otras, ó para recibir alguna seda, como sucede en la figura 209 para recibir la línea PE; en la 212 para recibir las AO y BO, y en la 215 para sostener los tres planos paralelos.

En la figura 223 se ha introducido tambien un plano que represente la interseccion ABCDE; y como de este modo resultaba cerrada la figura, se ha hecho movable uno de los ángulos planos laterales, para que se puedan ver las rectas OA, OB, OC, &c. &c.

Ademas del modelo que representa la figura 220, ha hecho otro para aclarar mas la importante doctrina de las proyecciones.

Entre los modelos que el Señor Cámara ha construido, y sobre que nada he visto dentro ni fuera de España, y que ni á mí me había ocurrido siquiera, es el que representa la figura 253 del Tomo de la Geometría Elemental; y que en ella se quiere representar un cono, con una pirámide inscrita en él, y otra circunscrita. De esta solo se representa en la figura uno de los lados para no complicarla; pero en el modelo, construido por el Señor Cámara, están señaladas todas las aristas de ambas pirámides, inscrita y circunscrita, usando de sedas de un color distinto para cada una: están ademas representadas las apotemas de una y otra; y como las aristas de la inscrita terminan en el círculo que sirve de base al cono, dichas aristas vienen á ser otros tantos lados del mismo cono: lo que contribuye mucho á que se pueda ver con claridad el cono y ambas pirámides.

Pero en lo que se advierte la gran sagacidad y espíritu de invencion del Señor Cámara es en haber hecho otro modelo de este mismo caso. En el de la fig. 253 los lados de la base de la pirámide inscrita y de la circunscrita son paralelos; y en el otro modelo, que ha hecho de un cono con una pirámide inscrita en él y otra circunscrita, las bases de estas pirámides no tenían sus lados paralelos, sino que los de la base de la pirámide circunscrita son tangentes del círculo de la base del cono en los vértices de los ángulos de la base de la pirámide inscrita; es decir, que las bases ocupan la posicion de la fig. 163 del Tomo de Geometría del T. E.; esto es, que la base de la pirámide inscrita es el polígono *abcdef*; la base del cono es el círculo *abcdef*; y la base de la pirámide circunscrita es el polígono ABCDEF; y en su ejecucion ha tenido el Señor Cámara tal destreza, que presenta no so-

Cor. 2.º *Por un punto P dado sobre un plano, no se puede levantar sinó una perpendicular á este plano.*

---

lo un objeto muy perfecto y adecuado para la instrucción, sinó un aspecto muy agradable á la vista.

Ha hecho tambien el Señor Cámara otro servicio sumamente importante á la enseñanza; y es el haber formado cuadros en que por un lado están los sólidos dibujados en perspectiva con todo rigor y exactitud, y por el otro están los dibujos geométricos de los mismos sólidos, esto es, en que se presentan dichos sólidos por *planta* y *alzado*; y de este modo se consigue el que los principiantes adquieran á un mismo tiempo la idea de los cuerpos como son en sí, las figuras que los representan en perspectiva, y las en que se manifiestan geométricamente ó por planta y alzado.

No se han reducido á esto sus útiles investigaciones, sinó que se propone hacerlo en todos los ramos de las Matemáticas en que se necesitan para facilitar la inteligencia de las teorías. A mi me ha enseñado, y yo he tenido un placer muy extraordinario en ver las que tiene hechas para aclarar la doctrina de la parte de la Geometría analítica en que se determinan los puntos y rectas en el espacio. Y son las 58, 59, 60, 61, 62, y 63 del tomo 2.º parte 1.ª de mi Tratado Elemental.

Ademas, si se observa la fig. D de la lámina que va al fin del volumen, acabado de citar, se notará que de los ocho ángulos sólidos que forman los tres planos coordenados, suficientemente prolongados, solo se ve con claridad uno de ellos; y tambien se llega á percibir, aunque con algun trabajo, si no se presenta el modelo correspondiente á la figura 58, las coordenadas de un punto situado en el espresado ángulo. Mas, si quisiéramos presentar en la figura las coordenadas de un punto situado en cada uno de los otros siete ángulos sólidos que forman los tres planos coordenados, cualesquiera que fuesen las disposiciones intelectuales de los individuos, seria punto ménos que imposible el que por dicha figura, se formase idea de la situacion de los puntos, de las coordenadas que les corresponden, y de los signos que pueden tener. Mas el Señor Cámara ha tenido la feliz ocurrencia de construir un modelito en que se manifiesten estas ideas, de un solo golpe de vista y del modo mas exacto.

Este modelito descansa sobre una peana de madera torneada; y se presentan en el aire los tres planos coordenados y dispuestos en forma paralelográmica por medio de sus ejes coordenados, prolongados en ambos sentidos, y representados por alambres; en términos, que, dentro de cada uno de los ocho ángulos sólidos, se presenta un punto con sus tres coordenadas respectivas, usando de sedas de diferentes colores; y se percibe con la mayor claridad en cual de los ocho ángulos sólidos se halla cada punto, y la magnitud y signo de las tres coordenadas, que á cada uno corresponden.

Por último, he tenido la satisfaccion de ver el modelo que ha hecho para facilitar la inteligencia de la Transformacion de las coordenadas en el espacio, y hacer perceptible lo que representa la figura 68 del espresado volumen. Este modelo llena cuantas circunstancias se pueden apetecer; pues con una simple mirada se advierte el valor que cada nueva coordenada tiene en valores de las antiguas. El Señor Cá-

Cor. 3.<sup>o</sup> También es imposible bajar desde un punto fuera de un plano dos perpendiculares á este plano.

para se propone continuar ejecutando algunos otros modelitos, entre los cuales se comprenden los correspondientes á la figura 123 de este tomo del Compendio, que es la 239 del tomo de Geometría; y además la 63 del tomo 3.<sup>o</sup> parte 1.<sup>a</sup> del Tratado Elemental, que contiene la *Mecánica*. En virtud de lo cual, todos los amantes de los progresos de la enseñanza, y de que se facilite y simplifique el estudio de las ciencias, que mas cooperan á fomentar la prosperidad de las Naciones, deben estar muy agradecidos al Señor Cámara; porque facilitando la adquisición de las ideas exactas en los ramos de mayor trascendencia, y disipando los escollos que hasta el presente han encontrado los discípulos al aprender, ha hecho un servicio real é importante á la humanidad.

D. Agustín Pascual, que ha seguido con brillantez la carrera filológica, ha adquirido tal habilidad en hacer sensibles las ideas con la enseñanza de los Sordo-mudos á que se ha dedicado en especialidad, y en la cual ha conseguido resultados sumamente maravillosos, que cuando principió á enseñar las Matemáticas en algunos Colegios de esta Corte, al llegar á la Teoría de los planos, no pudo ménos de presentar á sus discípulos modelos de muchas figuras para llenar el hueco, que se notaba en esta parte de la enseñanza. Con lo cual ha conseguido que sus discípulos adquirieran unas nociones muy exactas con gran facilidad; de lo que han dado públicas pruebas en los Exámenes generales del curso próximo pasado.

Los modelos, que yo he visto, se refieren á dar á conocer lo que representan las figuras 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216 y 217 de la lámina 9.<sup>a</sup> del Tom. 1. P. 2. de mi T. E., y las 58, 59, 60, 61, 62, 63 y 68 de la lámina 3.<sup>a</sup> del T. 2. P. 1. de dicho *Tratado Elemental*. Y en todas ellas está muy bien desempeñado el objeto que cada una representa. Para la formación de los espesados modelos, el Señor Pascual se ha fijado en que sus dimensiones sean cuádruplas de las que tienen las figuras de las láminas: lo cual permite que las puedan ver al mismo tiempo muchos discípulos.

Entre todos estos modelos, hay dos muy dignos de una consideración especial; y son los que representan las figuras 58 y 68 del espesado Tomo 2.<sup>o</sup> parte 1.<sup>a</sup>. La 58 se presenta, teniendo prolongados los planos coordenados, á la manera que se indican en la figura D, que se halla en la lámina última del espesado volumen. La espesada figura, y por consiguiente su modelo, sirve para deducir las expresiones de las coordenadas de todos los puntos del espacio, cualquiera que sea su situación respecto de los planos coordenados. La feliz idea de haber hecho los planos de cristal, permite que se vean á un mismo tiempo los ocho ángulos sólidos, que se forman en un punto por tres planos que se cruzan; y se perciben muy clara y distintamente los diferentes valores que van tomando las coordenadas segun varía de posición el punto.

La figura 68 del mismo volumen, y el modelo que la representa, tiene por objeto el deducir las fórmulas para transformar las coordenadas en el espacio; y en el modelo que el Señor Pascual ha hecho

*Cor. 4.º* Luego la verdadera distancia de un punto á un plano, se debe medir por la perpendicular, tirada al plano desde dicho punto; por ser la única que se puede tirar de su especie.

368 Teor. Las oblicuas AB, AC, AD (fig. 101), que distan igualmente de la perpendicular son iguales; y de dos oblicuas AE, AD que distan desigualmente de la perpendicular, la que mas se aleja es la mas larga.

*Dem.* Porque siendo rectos los ángulos APB, APC, APD, si se suponen las distancias PB, PC, PD iguales entre sí, los triángulos APB, APC, APD tendrán dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, luego serán iguales; luego las hipotenusas ó las oblicuas AB, AC, AD serán iguales entre sí. Ahora, si la distancia PE es mayor que PD ó su igual PB, tendremos, que siendo recto el ángulo APB, el ABE será obtuso (266); luego será mayor que el AEB, y por lo mismo  $AE > AB = AD$ , que es L. Q. D. D.

para hacer sensibles cuantos planos y líneas conviene considerar, se halla todo tan bien desempeñado, que no hay nada que no se presente intuitivamente, y que no se perciba sin violencia y con una facilidad extraordinaria.

D. Fernando Boccherini, Profesor de Matemáticas en el Instituto de Santander, me escribió con fecha de 3 de Junio del presente año de 1840 lo que sigue: «Como sé lo agradable que le es cuanto tiene relacion con la instruccion pública, no me es posible dejar de comunicarle, que persuadido de que el método, que se sigue en la esplicacion de la Teoría de los planos, y volúmenes, sin manifestar mas modelos que de los sólidos, no era suficiente para hacer adquirir á los jóvenes ideas exactas de las demas figuras delineadas en perspectiva, verifiqué las diligencias necesarias para proporcionármelos de estas; pero, no habiendo sido posible obtenerlos en este curso, construidos como corresponde, he presentado ya, hechos con cartones, y sedas, los mas principales de la teoría de los planos, y ángulos sólidos, como son los de las figuras 208, 209, y 224 del Tratado Elemental de V. ó las 101, 102 y 110 del Compendio, con lo cual he logrado un resultado satisfactorio; y en su consecuencia pienso continuar del mismo modo, interin se construyen los modelos necesarios.»

Despues he sabido con satisfaccion, que esto ha producido en los discípulos tal gusto y aficion á la exactitud y claridad de las ideas, que uno de ellos, á saber, D. Marcelino Menendez habia presentado al Señor Boccherini varios modelitos, valiéndose tambien de cartones y sedas, y hechos con bastante perfeccion.

¡Loor eterno á estos tres jóvenes Profesores, que simultáneamente, y sin noticias unos de otros han introducido tan importante mejora en la enseñanza!

369 Teor. Sea  $AP$  (fig. 102) una perpendicular al plano  $MN$ , y  $BC$  una recta situada en este plano; si desde el pie de la perpendicular, se tira la  $PD$  perpendicular á  $BC$ , y se une el punto  $A$  con el  $D$  por medio de la  $DA$ , digo que  $DA$  será perpendicular á  $BC$ , en el plano que pasa por las dos rectas  $AD$ ,  $CB$ .

*Dem.* Porque si se toma  $DB=DC$ , y se tiran las  $PB$ ,  $PC$ ,  $AB$ ,  $AC$ , será (273) la oblicua  $PB=PC$ ; luego las  $AB$ ,  $AC$  tambien lo serán (368); luego la  $AD$  tiene dos de sus puntos  $A$  y  $D$  equidistantes de los extremos  $B$  y  $C$  de la  $BC$ ; luego (274) le es perpendicular. L. Q. D. D.

*Esc.* Se ve al mismo tiempo, que la  $BC$  es perpendicular al plano  $APD$ , pues es perpendicular á las dos rectas  $AD$ ,  $PD$ , que se hallan en él.

370 Teor. Si una recta  $AP$  (fig. 103) es perpendicular á un plano  $MN$ , toda recta  $DE$  paralela á  $AP$  será perpendicular al mismo plano.

*Dem.* Porque concibiendo un plano que pase por las paralelas  $AP$ ,  $DE$ , su interseccion con el  $MN$  será  $PD$ ; y tirando en el plano  $MN$  la  $BC$  perpendicular á  $PD$ , y uniendo el punto  $A$  con el  $D$ , tendremos que  $BC$  será perpendicular (369 esc.) al plano  $APDE$ ; luego el ángulo  $BDE$  será recto; pero el  $EDP$  es tambien recto, pues  $AP$  es perpendicular á  $PD$ , y  $DE$  paralela con  $AP$ ; luego la recta  $DE$  es perpendicular á las dos rectas  $DP$ ,  $DB$ ; luego es perpendicular á su plano  $MN$ , que es L. Q. D. D.

*Cór.* Recíprocamente, si las rectas  $AP$ ,  $DE$  son perpendiculares al mismo plano  $MN$ , serán paralelas.

371 Teor. Si una recta  $AB$  (fig. 104) es paralela á una recta  $CD$ , tirada en el plano  $MN$ , será paralela á este plano,

*Dem.* Porque concibiendo un plano por las dos paralelas  $AB$ ,  $CD$ , si la recta  $AB$  encontrase al plano  $MN$ , debería hacerlo en un punto de la  $CD$ , lo que es imposible; luego la  $AB$  no puede encontrar al plano  $MN$ , y le será paralela. L. Q. D. D.

372 Teor. Dos planos  $MN$ ,  $PQ$  (fig. 105) perpendiculares á una misma recta  $AB$ , son paralelos entre sí.

*Dem.* Porque si se encontrasen, tirando de un punto cualquiera  $O$  de la interseccion dos rectas  $OA$ ,  $OB$  una en cada plano, la recta  $AB$  sería perpendicular á las dos rectas  $OA$ ,  $OB$  (§ 364), y en el triángulo  $AOB$  habría dos ángulos rec-

tos, lo que (266 cor. 1.º) es imposible; luego los planos son paralelos. L. Q. D. D.

373 Teor. *Las intersecciones EF, GH (fig. 106) de dos planos paralelos MN, PQ, con un tercer plano FG, son líneas paralelas.*

*Dem.* Porque si las rectas EF, GH, situadas en un mismo plano, que aquí es el EFHG, no son paralelas, prolongadas se encontrarán; luego los planos MN, PQ, en que se hallan, también se encontrarán, y por lo mismo no serían paralelos, que es contra el supuesto. Luego etc.

374 Teor. *La recta AB (fig. 105) perpendicular al plano MN, es perpendicular al plano PQ paralelo al MN.*

*Dem.* Porque si tiramos á arbitrio la recta BC en el plano PQ, y por ella y por la AB concebimos un plano, este cortará al MN en una recta AD, que será paralela (373) con la BC; y por ser AB perpendicular al plano MN, lo es también (364) á la recta AD; luego también lo será (280) á su paralela BC; y como demostraríamos del mismo modo que AB es perpendicular á BC, resulta (367) que AB es perpendicular al plano PQ, que es L. Q. D. D.

375 Teor. *Las partes EG, FH (fig. 106) de paralelas comprendidas por dos planos paralelos MN, PQ, son iguales.*

*Dem.* Porque, concibiendo un plano EGHF que pase por las paralelas EG, FH, encontrará á los planos paralelos en las rectas EF y GH; estas intersecciones son también paralelas (373), así como por el supuesto lo son las EG, FH; luego la figura EGHF es un paralelogramo, y por lo mismo (§ 313)  $EG = FH$ , que era L. Q. D. D.

*Cor.* Luego dos planos paralelos tienen todos sus puntos equidistantes los unos de los otros; porque si EG y FH son perpendiculares á los dos planos MN, PQ, serán paralelas é iguales entre sí.

376 Teor. *Si dos ángulos CAE, DBF (fig. 107), no situados en el mismo plano, tienen sus lados paralelos y dirigidos en un mismo sentido, serán iguales; y los planos donde se hallan serán paralelos.*

*Dem.* Tómese  $AC = BD$ ,  $AE = BF$ , y tirense las CE, DF, AB, CD, EF. Pues que AC es igual y paralela con BD, la fig. ABDC es un paralelogramo (311); luego CD es igual y

paralela con  $AB$ . Por una razon semejante  $EF$  será igual y paralela con  $AB$ ; luego tambien  $CD$  es igual y paralela con  $EF$ ; luego la figura  $CEFD$  es un paralelogramo, y el lado  $CE$  igual y paralelo á  $DF$ ; luego los triángulos  $CAE$ ,  $DBF$  tienen sus tres lados iguales entre sí; luego son iguales (259) y darán  $CAE = DBF$ , que es L. 1.º Q. D. D.

En segundo lugar digo, que el plano  $ACE$  es paralelo al plano  $BDF$ ; porque si el plano paralelo á  $BDF$ , tirado por el punto  $A$ , encontrase á las rectas  $CD$ ,  $EF$  en otros puntos que en  $C$  y  $E$ , v. g. en  $G$  y  $H$ , entónces las tres rectas  $AB$ ,  $GD$ ,  $FH$  serían iguales (375); pero las tres  $AB$ ,  $EF$ ,  $DC$ , lo eran ya; luego se tendrá  $CD = GD$  y  $FH = EF$ , lo que es absurdo, pues las unas son partes, y las otras todos; luego el plano  $ACE$  es paralelo al  $BDF$ , que era L. 2.º Q. D. D.

Cor. Si dos planos paralelos  $MN$ ,  $PQ$ , son cortados por otros dos planos  $CABD$ ,  $EABF$ , los ángulos  $CAE$ ,  $DBF$ , formados por las intersecciones de los planos paralelos, serán iguales; porque la interseccion  $AC$  es paralela á  $BD$ , y  $AE$  lo es á  $BF$ ; luego el ángulo  $CAE = DBF$ .

377 Teor. El ángulo formado por dos planos  $MAN$ ,  $M'AP$  (fig. 108), se puede medir, y se mide en efecto, por el ángulo  $NAP$  que forman entre sí dos perpendiculares  $AN$ ,  $AP$ , tiradas en cada uno de ellos á un mismo punto  $A$  de la interseccion comun  $AM$ .

Dem. Porque si se supone que el un plano está sobre el otro, como dos hojas de un libro, y se tiran las perpendiculares  $AN$ ,  $AP$  estas tambien estarán confundidas. Ahora, concibiendo que el plano  $PAMB$  se empieza á separar del  $NAMC$ , la perpendicular  $AP$  estará tan inclinada respecto de  $AN$ , como el plano  $APB$  que contiene á la primera, lo está respecto del  $ANC$  en que se halla la segunda. Luego el ángulo rectilíneo  $NAP$  mide la inclinacion de los planos  $PAMB$ ,  $NAMC$ , que es L. Q. D. D. (\*)

---

(\*) En el § 557 del Tomo I parte II T. E. demuestro esta proposicion, fundándome en otros principios, y comprende todos los casos; ahora, voy á poner aquí algunas investigaciones que corroboran lo manifestado en el testo.

Principiarémos observando, que así como la magnitud de los ángulos

*Esc. 1.º* Esta inclinacion PAMC se suele llamar *ángulo diedro*; y cuando el ángulo que la mide es recto, se dice, que *el un plano es perpendicular al otro*.

*Esc. 2.º* Cuando dos planos se atraviesan mutuamente, los ángulos opuestos al vértice son iguales, y los ángulos adyacentes valen juntos dos rectos; luego *si un plano es perpendicular á otro, este es perpendicular al primero*.

Igualmente, en el concurso de dos planos paralelos

que forman las líneas es la misma (250), ya sean estas largas ó cortas, y ya sean iguales ó desiguales entre sí, del mismo modo se verifica, que los ángulos que forman los planos son los mismos, ya sean los planos grandes, ya sean pequeños, y ya sean iguales ó desiguales entre sí. Por manera, que aunque los planos ABNM, ABQP (fig. 98<sup>a</sup>) son desiguales, el ángulo, que forman entre sí, es el mismo que si estos planos fuesen iguales, y que fuesen tan grandes ó tan pequeños como se quisiera.

Entendido esto, lo primero que nos dirijimos á probar es que *en cualquier parte de la comun seccion MA, que se tiren las perpendiculares, el ángulo que formen entre sí será igual al que formen las perpendiculares tiradas por cualquiera otro punto*; lo cual no se verifica con las oblicuas. En efecto, supongamos que en el punto L (fig. 108<sup>a</sup>) se tiren la QL perpendicular á MA en el plano MP, y la LH perpendicular al mismo punto L de la comun interseccion, pero en el plano MN; el ángulo QLH será igual con el PAN; porque, por ser LQ y AP perpendiculares á MA, y estar ambas en el plano MP serán paralelas, y siéndolo las MA, BP, se tendrá que LAPQ será un paralelogramo, y dará AL=QP; y LQ=AP. Por la misma razon deduciremos que HN es tambien igual y paralela con LA; luego PQ es igual y paralela con HN; de donde resulta (511) que PN=QH. Luego los triángulos PAN, QLH tienen los tres lados del uno iguales con los tres lados del otro, luego (259) serán iguales, y darán el ángulo PAN=QLH.

No sucedería lo mismo si las líneas se tirasen en cada plano oblicuas á la comun seccion AM en un mismo punto; pues aunque estuviesen igualmente inclinadas respecto de la misma comun seccion, cada una en su plano respectivo, en este caso, si se fuese acercando el un plano al otro, es verdad que coincidirían cuando los planos coincidiesen (251); pero no se verificaría la circunstancia de ser constante el ángulo de estas, por cualquier punto por donde se tirasen, aun si se tiran por un mismo punto con diversas inclinaciones. En efecto, siendo oblicuas á la comun seccion, formaban ángulos desiguales con las dos partes de esta de uno y otro lado del punto donde la encontrase la oblicua; además, el ángulo de estas oblicuas variaría con el grado de oblicuidad de ella, es decir, que mientras menor sea el ángulo que formen con la comun seccion, formarán menor ángulo entre sí.

Porque, si concibiéramos en el punto L de la comun seccion dos líneas LQ, LH, la LQ estaría en el plano MP, y la LH en el MN, pero de modo que el ángulo QLM fuese igual con el HLM, entónces girando los planos MP, MN al rededor de la comun seccion, acercándose el uno al otro, disminuiría el ángulo QLH hasta reducirse á

con un tercer plano se verifican las mismas igualdades de ángulos, y las mismas propiedades que en el concurso de dos rectas paralelas con otra tercera.

378 Teor. Si una recta  $AP$  (fig. 100), es perpendicular á un plano  $MN$ , todo plano  $APB$  que pase por la  $AP$  será perpendicular al  $MN$ .

Dem. Porque si concebimos la  $PC$  perpendicular á la interseccion  $PB$ , la  $AP$  que también lo es (364) nos dará el ángulo  $APC$  recto; y como este mide (377) la inclinacion de los planos  $APB, MN$ , resulta que el pla-

cero cuando los planos  $MP, MN$  coincidiesen; pero no por esto se podrá tomar el ángulo  $QIH$  por la medida del de los planos; pues que este ángulo  $QIH$  no es constante para todas las inclinaciones de las  $QI$ , y  $IH$  respecto de la comun seccion  $MA$ , como vamos á manifestar.

Si ademas suponemos, para mayor sencillez, que el plano  $AMBP$  sea igual con el  $MCNA$ , se tendrá que  $LQ=LH$ ; y resultará (260) que  $IQ=IH$ ; por la misma razon, tirando las  $IQ$  y  $IH$ , una en cada plano, se tendrá también  $IQ=IH$ ; y en virtud de lo espuesto (289 cor. 4.º) los dos triángulos isósceles  $QIH, QIH$ , que tienen una base comun  $QH$ , darán  $\text{áng. } QIH > \text{áng. } QIH$ . Si desde  $I$  tirásemos en el plano  $MP$  la línea  $li$ , y en el plano  $MN$  la  $lh$  que formasen con la  $MA$  ángulos iguales, esto es,  $Mli=Mlh$ , se demostraria del mismo modo que el triángulo  $ilh$  sería isósceles, y que su base  $ih$  era igual con  $QH$ ; y como de las  $IQ, li$ , la  $IQ$ , que mas se separa de la perpendicular  $Im$ , es la mas larga, resulta que los dos triángulos isósceles  $IQH, ilh$  que tienen sus bases iguales  $QH, ih$ , tienen el ángulo  $QIH < ilh$ .

La razon que hay para que el ángulo  $QIH$  sea menor que el  $ilh$  es que como los planos entre si van distando ménos de la comun seccion, estando las oblicuas  $IQ, IH$  mas aproximadas á la comun seccion, que las  $li, lh$  se irán acercando mas la una á la otra, á proporcion que su inclinacion con la seccion comun sea menor. De todo lo cual resulta, que como toda unidad de medida debe ser invariable, no puede servir para medir la inclinacion de dos planos, el ángulo que formen dos líneas oblicuas á un mismo punto de la comun seccion, aunque tengan respecto de ella la misma inclinacion; y como el ángulo que forman las perpendiculares á un mismo punto de la comun seccion, crece y mengua con el ángulo de los planos, es invariable, y forma los mismos ángulos por ambos lados de la comun seccion, se infiere que este tiene todas las circunstancias que se requieren para servir de unidad de medida, que son: 1.º el crecer y menguar con el ángulo de los planos hasta convertirse en cero, cuando el de los planos se aniquile; 2.º el de ser invariable la medida, en cualquier punto que se elija; y 3.º el que estas líneas se inclinan igualmente respecto de los dos lados de la comun seccion; luego el ángulo que forman los dos planos se debe medir por el ángulo que forman dos perpendiculares tiradas á un mismo punto de la seccion, tirada una en cada plano: es decir, que el ángulo que forman los dos planos  $MP, MN$  se debe medir ó es igual al  $PAN$ , ó al  $QLH$  ó  $BMC$ , ó en general al que forman dos perpendiculares tiradas á un mismo punto  $A, L$ , ó  $M$  de la comun seccion, una en el plano  $MP$ , y otra en el  $MN$ .

no APB es perpendicular al MN, que es L. Q. D. D.

*Cor.* De aquí se deduce que la comun interseccion de dos planos APB, APQ perpendiculares á un tercero MN, es perpendicular al mismo plano MN. Porque podemos considerar que el plano APQ es uno de los muchos que pueden pasar por la recta AP, y que todos son perpendiculares al MN; luego la interseccion de ellos, que es la AP, tambien es perpendicular al plano MN.

379 Se llama *ángulo sólido* al espacio angular comprendido entre muchos planos que se reunen en un mismo punto; así, el ángulo sólido S (fig. 109), está formado por la reunion de los ángulos planos ASB, BSC, CSD, DSA.

380 *Teor.* Si dos ángulos sólidos se componen de tres ángulos planos iguales cada uno al suyo, los planos en que se hallan los ángulos iguales estarán igualmente inclinados.

*Espl.* Sea el ángulo  $ASC = DGF$  (fig. 110), el  $ASB = DGE$ , y el  $BSC = EGF$ ; digo que los dos planos ASC, ASB tendrán entre sí una inclinacion igual á la de los planos DGF, DGE.

*Constr.* Habiendo tomado SB á arbitrio, tírese BO, perpendicular al plano ASC; desde el punto O donde esta perpendicular encuentra al plano, tírense las OA, OC, perpendiculares á SA, SC, y tírense las AB, BC. Tómese despues  $GE = SB$ ; tírese la EP perpendicular al plano DGF; desde el punto P tírense las PD, PF, perpendiculares á GD, GF, y por último tírense la DE, EF.

*Dem.* El triángulo SAB es (369) rectángulo en A, y el GDE en D; y pues que el ángulo  $ASB = DGE$ , se tiene tambien  $SBA = GED$ . Por otra parte  $SB = GE$ , luego el triángulo SAB es igual al GDE; luego  $SA = GD$ , y  $AB = DE$ ; del mismo modo se demostrará que  $SC = GF$  y  $BC = EF$ .

Esto supuesto, el cuadrilátero SAOC es igual al GDPE; porque poniendo el ángulo ASC sobre su igual DGF, á causa de  $SA = GD$  y  $SC = GF$ , el punto A caerá en D, y el C en F. Al mismo tiempo la AO perpendicular á SA caerá sobre la DP perpendicular á GD,

é igualmente OC sobre PF; luego el punto O caerá sobre P, y se tendrá  $AO=DP$ . Pero los triángulos AOB, DPE, son rectángulos en O y en P, la hipotenusa  $AB=DE$ , y el lado  $AO=DP$ ; luego estos triángulos son iguales (273 cor. 2.<sup>o</sup>), y por lo mismo el ángulo  $OAB=PDE$ . Pero el ángulo OAB es la inclinación de los dos planos SAC, SAB, y el PDE es la inclinación de los dos planos DGF, DGE; luego estas dos inclinaciones son iguales. L. Q. D. D.

*Cor.* De donde resulta, que dos ángulos sólidos formados como los anteriores se pueden superponer de modo que se confundan.

---

## PARTE TERCERA.



*De los prismas, y medicion de sus superficies y volúmenes.*

381 **P**ASAMOS ya á considerar la estension con sus tres dimensiones de longitud, latitud y profundidad ó grueso. Cuando la estension se halla terminada por planos, se llama en general *sólido*, ó mas bien *cuerpo poliedro*.

Cuando el cuerpo consta de cuatro caras, se llama en particular *tetraedro*; cuando de seis, *hexaedro*; cuando de ocho, *octaedro*; cuando de doce, *dodecaedro*; y cuando de veinte, *icosaedro*, etc.

La interseccion comun de dos caras adyacentes de un poliedro, se llama *lado* ó *arista* del poliedro.

Cuando el poliedro tiene dos caras opuestas iguales y paralelas, y las demas caras son paralelogramos, se llama *prisma*; los dos planos paralelos é iguales, se llaman *bases* del prisma; y los paralelogramos, *caras* del prisma; de donde resulta (375) que *todas las aristas de un prisma son iguales*.

382 Para concebir formado un cuerpo de esta especie, supongamos que  $ABCDE$  (fig. 111) sea un polígono cualquiera, y que en un plano paralelo al  $ABC$  etc. se tiren las rectas  $FG, GH, HL$ , etc. iguales y paralelas á los lados  $AB, BC, CD$ , etc.; con esto se formará un polígono  $FGHLK$  igual al  $ABCDE$ ; y si despues se unen los vértices de los ángulos homólogos por medio de las rectas  $AF, BG, CH$ , etc. las caras  $ABGF, BCHG$ , etc. serán paralelogramos; y el cuerpo  $ABCDEKFGHL$  formado de este modo será un prisma, cuyas bases son  $ABCDE, FGHLK$ .

Se llama *altura* del prisma la perpendicular tirada desde una de las bases á la opuesta ó á su prolongacion; cuando las aristas del prisma son perpendiculares á la base, el prisma se llama *recto*, como el  $ABCDHFEG$  (fig. 112); y cuando esto no se verifica, es *oblicuo*, como el  $ABCDEKFGHL$  (fig. 111).

383 El prisma se llama *triangular, cuadrangular, pentagonal, exagonal, etc.* segun sea la base triángulo, cuadrilátero, pentágono, exágono, etc.

Como hay diferentes especies de cuadriláteros, resulta que el prisma cuadrangular recibe diferentes nombres; así, cuando la base es un paralelogramo, se llama *paralelepípedo*; cuando es romboide, *prisma romboidal*; cuando rombo, *prisma rombale*; cuando la base es un rectángulo, *prisma rectangular*; y cuando la base es un cuadrado y la altura es el mismo lado del cuadrado se le llama *cubo*.

384 Teor. *Dos poliedros no pueden tener los mismos vértices, y en el mismo número, sin coincidir el uno con el otro.*

*Dem.* Porque si suponemos construido uno de ellos, y se quiere construir otro que tenga los mismos vértices y en el mismo número, cada plano de los que formen el segundo tendrá con su correspondiente en el primero, tantos puntos comunes como ángulos haya en la cara del poliedro; y como en cada cara ha de haber lo ménos tres ángulos, resulta que todas las caras coincidirán; y por consiguiente los poliedros quedarán confundidos en uno sólo. L. Q. D. D.

385 Teor. *Dos prismas son iguales, cuando tienen un ángulo sólido igual comprendido por tres planos, iguales cada uno al suyo y semejantemente colocados.*

*Espl.* Sean  $ABCL$ ,  $abcl$  (fig. 111) dos prismas que tengan el ángulo sólido  $B = al\ b$ ; y además los planos que le forman respectivamente  $ABCDE = abcde$ ,  $ABGF = abgf$ , y  $BCHG = bchg$ ; digo que estos prismas son iguales.

*Dem.* Concibiendo el ángulo sólido  $B$  superpuesto al  $b$ , se confundirán (380 cor.) por ser iguales; y por ser iguales los planos que los forman, se confundirán exactamente  $ABCDE$  con  $abcde$ ,  $ABGF$  con  $abgf$ , y  $BCHG$  con  $bchg$ ; luego el lado  $GF$  caerá sobre su igual  $gf$ ,  $GH$  sobre  $gh$ , y toda la base superior  $FGHLK$  sobre su igual  $fghlk$ ; luego los dos prismas  $ABCL$ ,  $abcl$ , tienen los mismos vértices; luego (384) se confundirán; luego son iguales. L. Q. D. D.

386 Teor. *En todo paralelepípedo los planos opuestos son iguales y paralelos; y recíprocamente, si un poliedro está terminado por seis planos paralelos de dos en dos, es un paralelepípedo.*

*Dem.* Por ser paralelepípedo, las bases  $ABCD$ ,  $EFGH$  (fig. 113) son paralelogramos iguales y paralelos. Pero  $AD$  es igual y paralela con  $BC$ , y  $AE$  igual y paralela con  $BF$ ; luego (376) el ángulo  $DAE = CBF$ , y el plano  $DAE$  paralelo á  $CBF$ ; luego (313) el paralelogramo  $DAEH =$  con  $CBFG$ ; y como demostraríamos lo mismo de los paralelogramos  $ABFE$ ,  $DCGH$ , resulta L. 1.º Q. D. D.

Ahora, si suponemos que los seis planos sean paralelos, esto es, que  $AF$  paralelo á  $DG$ ,  $AH$  á  $BG$ , y  $AC$  á  $EG$ , se tendrá que las comunes intersecciones de los planos  $AF$ ,  $DG$ , con el  $AC$ , serán dos rectas  $AB$ ,  $DC$  paralelas (373). Las  $AD$ ,  $BC$ , comunes secciones de los planos paralelos  $AH$ ,  $BG$  con el  $AC$ , serán paralelas; luego la figura  $AC$  es paralelogramo.

Del mismo modo demostraríamos que todas las demás caras lo son; pero el  $AF$  da (§ 313)  $AB$  igual y paralela con  $EF$ ; el  $BG$  da  $BC$  igual y paralela con  $FG$ ; de donde se deduce (376) que el ángulo  $EFG = ABC$ , y el paralelogramo  $ABCD = EFGH$ ; luego dicho cuerpo es un paralelepípedo. L. 2.º Q. D. D.

387 Teor. *Si los ángulos homólogos opuestos de las bases de un paralelepípedo recto, se unen por medio de las diagonales  $DB$ ,  $HF$ , el plano  $DBFH$  que pase por ellas, dividirá al paralelepípedo  $ABCDHEFG$  en dos prismas  $ABDHEF$ ,  $DBCGHF$  iguales.*

*Dem.* La naturaleza del paralelepípedo da  $ABCD = EFGH$ , y por lo mismo sus mitades también serán iguales, y se tendrá  $ABD = DBC = EFH = HFG$ ; luego el ángulo sólido en C será igual al en E, pues el ángulo  $BCG = AEH$  por rectos, el  $GCD = AEF$  por la misma razón, y el  $BCD = HEF$  por la igualdad de dichos triángulos.

Por otra parte (386) las caras  $BCGF, DCGH$  son respectivamente iguales á las  $AEHD, AEFB$ ; luego (385) los dos prismas triangulares espresados son iguales. L. Q. D. D.

*Cor.* Luego el prisma triangular  $ABDHEF$  es la mitad del paralelepípedo  $ABCDHEFG$  que tiene la misma altura, y cuya base  $ABCD$  es dupla de la  $ABD$  del primero.

388 Teor. Si dos paralelepípedos tienen una base común, y sus bases opuestas en un mismo plano y entre unas mismas paralelas, estos paralelepípedos serán equivalentes, ó iguales en volúmen.

*Espl.* Sean  $AG, AL$  (fig. 114) dos paralelepípedos que tienen la base común  $ABCD$ , y las opuestas  $EFGH, NKLM$  en un mismo plano  $HK$  y entre las paralelas  $EK, HL$ ; voy á demostrar que el paralelepípedo  $AG =$  con  $AL$ .

*Dem.* El paralelepípedo  $AG$  da  $ABCD = EFGH$ , el  $AL$  da  $ABCD = NKLM$ , luego  $EFGH = NKLM$ ; y añadiendo á ambos miembros la parte  $FNMG$ , resultará  $EFGH + FNMG = NKLM + FNMG$ ; ó reduciendo se tendrá  $ENMH = FKLK$ ; además el primero da  $AEHD = BFGC$ ; y por lo dicho (350) se deduce que el triángulo  $AEN = BFK$ . Luego los prismas triangulares  $AENMHD, BFKLGC$  tienen los ángulos sólidos E, F formados por tres planos iguales; luego (385) dichos prismas son iguales.

Ahora, si del poliedro total  $AEL$  se quitan dichos prismas, los residuos serán iguales, y se tendrá  $AEL - AEM = AEL - BFL$ , ó paralelepípedo  $AL =$  con  $AG$ , que es L. Q. D. D.

389 Teor. Dos paralelepípedos de la misma base y altura son iguales en volúmen, ó son equivalentes.

*Dem.* Porque si suponemos que  $ABCD$  (fig. 115) sea la base común de los dos paralelepípedos  $AG, AL$ , resulta que por tener una misma altura, sus bases superiores  $EFGH, RKLM$  se hallarán sobre un mismo plano. Ahora, si se conciben prolongados los planos  $ABFE, DCGH$ , y los  $ADMR, BCLK$

hasta que se encuentren, formarán por su común intersección un tercer paralelepípedo que tendrá la misma base  $ABCD$ , y cuya base opuesta estará representada por el paralelogramo  $NO PQ$ . Pero este tercer paralelepípedo es igual (388) en volúmen al  $AG$ ; pues teniendo la misma base inferior, las superiores están en un mismo plano y entre las paralelas  $GQ$  y  $FN$ ; y por una razón semejante este tercer paralelepípedo será igual con el  $AL$ ; luego  $AG=AL$ , que es L. Q. D. D.

390 Teor. *Todo paralelepípedo se puede convertir en uno recto y rectángulo de igual volúmen, que tenga la misma altura y una base equivalente.*

*Dem.* Porque si  $AG$  es el paralelepípedo propuesto, y desde los puntos  $A, B, C, D$ , se tiran las  $AR, BK, CL, DM$ , perpendiculares al plano de la base y prolongadas hasta que encuentren al plano  $EFGH$ , tendremos formado el paralelepípedo recto  $AL$ , igual en volúmen con  $AG$ . Luego si la base  $ABCD$ , es un rectángulo,  $AL$  será el paralelepípedo recto y rectángulo equivalente al propuesto  $AG$ . Pero si  $ABCD$  (fig. 116) no es un rectángulo, se tirarán la  $AO, BN$  perpendiculares á  $CD$ ; después las perpendiculares  $OQ$  y  $NP$  á la base  $ABCD$ , con lo cual se tendrá el poliedro  $ABNOQPKE$  que será un paralelepípedo recto y rectángulo. Y como los dos paralelepípedos  $AP, AL$ , se puede reputar que tienen la misma base  $ABKE$  y la misma altura  $AO$ , resulta que son iguales en volúmen; luego el paralelepípedo oblicuo  $AG$  (fig. 115) que se había reducido á un paralelepípedo recto equivalente  $AL$ , se encuentra de nuevo convertido en un paralelepípedo rectángulo  $AP$ , que tiene la misma altura  $AE$ , y cuya base  $ABNO$  es equivalente á la  $ABCD$ , que es L. Q. D. D.

391 Teor. *Toda sección  $NOPQR$  (fig. 111) hecha en un prisma por un plano paralelo á la base  $ABCDE$ , es igual á esta base.*

*Dem.* Porque las partes  $AQ, BP, CO$ , etc., de paralelas comprendidas entre los planos paralelos  $ABC$  etc.,  $QPO$  etc., son iguales (375); y así, todas las figuras  $ABPQ, BCOP$ , etc. son paralelogramos.

De aquí se sigue que el lado  $PQ$  es igual y paralelo con  $AB$ ,  $OP$  con  $BC$ ,  $ON$  con  $CD$ , etc.; luego (376) el ángulo  $ABC=QPO$ , el  $BCD=PON$ , etc.; luego los dos polígonos  $ABCDE, QPONR$  tienen los lados y los ángulos iguales respectivamente; luego son iguales. L. Q. D. D.

392 Teor. *La superficie lateral de un prisma es igual*

*al producto de una de sus aristas por el perímetro de una seccion perpendicular á dicha arista.*

*Dem.* Si el prisma fuese el *abck* (fig. 111), su superficie lateral sería igual á la de todas las caras *ag, bh, cl, dk, ef*; pero si por un punto cualquiera de una de las aristas se hace pasar un plano *nopqr* perpendicular á dicha arista, será perpendicular á todas las demas (370); luego el paralelogramo *ag=gb×qp*, el *bh=ch×op*, el *cl=dl×no*, el *dk=ke×nr*, el *ef=ek×qr*; y como todas las aristas *af, bg, ch, dl, ek*, son iguales, se tendrá que sup. lat. de prisma *abcdk=* á la de los paralelogramos *ag+bh+cl+dk+ef=bg×pq+ch×op+dl×no+ke×nr+ek×qr*; sustituyendo *bg* á las demas aristas, y sacándola fuera de un paréntesis como factor común, resultará sup. lat. de prisma *abck=bg(pq+op+no+nr+rq)=bg×perím. de sec. nopqr*, que es L. Q. D. D.

*Cor.* Si el prisma es recto, la seccion será paralela é igual á la base, y por lo mismo *la superficie lateral de un prisma recto es igual al perímetro de la base multiplicado por su arista ó altura, que es lo mismo.*

393 Teor. *Dos paralelepípedos rectos AG, ag (figura 112), de iguales bases ABCD, abcd, son entre sí como sus alturas AF, af, ó se tendrá AG:ag::AF:af.*

*Dem.* Aquí pueden ocurrir dos casos; ó que las alturas sean comensurables, ó que no lo sean.

1.º Si tienen la comun medida  $AX=ax$ , y espresamos por *m, n*, las veces que está contenida en cada una de ellas, se tendrá  $AF=m \times AX$ , y  $af=n \times ax$ ; y formando proporcion y simplificando por  $AX=ax$ , será  $AF:af::m \times AX:n \times ax::m:n$ .

Si por los puntos de division *X, Z, etc, x, z, etc.*, se tiran planos paralelos á las bases, el paralelepípedo *AG* quedará dividido en *m* paralelepípedos iguales con *AU*, y el *ag* en *n* iguales con *au=AU*, y todos iguales entre sí (389); y se tendrá  $AG=m \times AU$ ,  $ag=n \times au=n \times AU$ ; y formando proporcion será  $AG:ag::m \times AU:n \times au::m:n$ .

Esta proporcion y la anterior dará (§ 184.2.ª)  $AG:ag::AF:af$ , que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Si las alturas son inconmensurables, se demuestra por un procedimiento semejante al que hemos seguido (352), que la razon de  $AG:ag$  no puede ser mayor ni menor que  $AF:af$ ; luego será igual. L. 2.º Q. D. D.

394 Aunque hemos dicho en el teorema anterior, que los paralelepípedos han de ser rectos, y en los dos siguien-

tes añadimos y rectángulos, es por la mayor facilidad en las construcciones; pues las proposiciones se verifican en cualesquiera paralelepípedos. Porque según hemos visto (390), todo paralelepípedo se puede convertir en uno recto y rectángulo igual en volúmen; luego lo que se demuestre de éstos, quedará demostrado de aquellos.

395 Teor. *Dos paralelepípedos rectos y rectángulos*  $AG, AK$  (fig. 117) *de una misma altura*  $AE$ , *son entre sí como sus bases*  $ABCD, AMNO$ ; *y se tendrá*

$$AG:AK::ABCD:AMNO.$$

*Dem.* Habiéndolos colocado el uno al lado del otro como representa la figura, prolongúese el plano  $ONKL$  hasta que encuentre al  $DCGH$ , cuya comun seccion sea  $PQ$ ; y tendremos un tercer paralelepípedo  $AQ$ , que se podrá comparar con cada uno de los  $AG, AK$ . Los  $AG, AQ$ , que tienen la misma base  $AEHD$ , dan  $AG:AQ::AB:AO$ ; igualmente los paralelepípedos  $AQ, AK$ , que tienen la misma base  $AOLE$ , dan  $AQ:AK::AD:AM$ ; multiplicando ordenadamente y omitiendo (191) el factor comun  $AQ$ , será  $AG:AK::AB \times AD:AO \times AM$ ; pero  $AB \times AD$  representa (353 esc.) la base  $ABCD$ , y  $AO \times AM$  representa la  $AMNO$ ; luego  $AG:AK::ABCD:AMNO$ , que es L. Q. D. D.

396 Teor. *Dos paralelepípedos rectos y rectángulos cualesquiera, son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas, ó como los productos de sus tres dimensiones.*

*Dem.* Porque habiendo colocado los dos paralelepípedos  $AG, AZ$  (fig. 117), de manera que sus superficies tengan el ángulo comun  $BAE$ , prolongúense los planos necesarios para formar el tercer paralelepípedo  $AK$ , de la misma altura que el  $AG$ , y (395) se tendrá  $AG:AK::ABCD:AMNO$ ; pero (393) los dos paralelepípedos  $AK, AZ$ , que tienen la misma base  $AMNO$ , dan  $AK:AZ::AE:AX$ ; luego multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y omitiendo el factor comun  $AK$ , se tendrá  $AG:AZ::ABCD \times AE:AMNO \times AX$ ; y substituyendo en vez de las bases  $ABCD, AMNO$ , sus valores  $AB \times AD$  y  $AO \times AM$ , será  $AG:AZ::AB \times AD \times AE:AO \times AM \times AX$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* De aquí se deduce, que se puede tomar por medida de un paralelepípedo recto y rectángulo el producto de su base por su altura, ó el producto de sus tres dimensio-

nes; con tal que por esta espresion se entienda el *producto en abstracto de los tres números que espresan las veces que la unidad de medida lineal está contenida en cada una de las tres dimensiones.*

397 Para medir los volúmenes se ha elejido por unidad el cubo, cuyo lado sea tambien la unidad, esto es, 1 vara, 1 pie, etc. Así, si el cubo *a* (fig. 118) es el de una vara, y suponemos que está contenida la vara en BC siete veces, en CD dos, y en CG cuatro, el paralelepípedo rectángulo CF será  $vol. CF = 7 \times 2 \times 4$  varas cúbicas = 56 varas cúbicas, ó 56 cubos iguales con el *a*, que se tomó por unidad, como lo manifiesta la figura.

Si suponemos que el lado del cubo *a* sea de 1 pie, y que cada uno de los lados del cubo (fig. 118\*) se componga de tres veces el lado del cubo *a*, resulta que dicha figura representará una vara cúbica, ó será el cubo de una vara; y segun se ve, este cubo contiene 27 cubos iguales al cubo *a*; por lo que una vara cúbica tiene 27 pies cúbicos; y del mismo modo resulta que un pie cúbico tiene 1728 pulgadas cúbicas; y una pulgada cúbica tiene 1728 líneas cúbicas (\*).

(\*) Para cumplir lo que hemos ofrecido en los escolios de los párrafos 100 y 101, nos propondrémos ante todas cosas, hallar el volumen de un paralelepípedo rectángulo, cuyas tres dimensiones sean: una de 5 varas y 2 pies, otra de 3 varas y 1 pie, y la otra de 7 varas y 1 pie. Suponiendo que las dos primeras dimensiones constituyan la base del paralelepípedo, tendremos que en virtud de la nota del (§ 353), la superficie de la base será 18 varas cuadradas, y 8 pies cuadrados, y la altura será la otra dimension, á saber: 7 varas y 1 pie longitudinales.

Aplicando la primera regla (§ 100) de la multiplicacion de números denominados, la superficie de la base, que es el multiplicando, se nos convierte en 170 pies cuadrados, y la altura del paralelepípedo, que es el multiplicador, en 22 pies longitudinales. Efectuando la multiplicacion, se tiene  $170 \times 22 = 3740$ . Dividiendo esto por 3, que es el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior del multiplicador está con-

398 Teor. *El volúmen de un paralelepípedo, y en general el volúmen de un prisma cualquiera, es igual al producto de la superficie de su base por su altura.*

tenida en la superior, se tiene  $\frac{3740}{3} = 1246\frac{2}{3}$ .

Dividiendo esto por 9, que es el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior del multiplicando está contenida en la de especie superior, resulta

$$\frac{1246 + \frac{2}{3}}{9} = 138 + \frac{4 + \frac{2}{3}}{9} = 138\frac{14}{27}$$

Luego, el producto es 138 varas cúbicas y  $\frac{14}{27}$  de vara cúbica; que como la vara cúbica tiene 27 pies cúbicos, resulta que el producto, que espresa el volúmen del citado paralelepípedo, es 138 varas cúbicas y 14 pies cúbicos.

Tambien aquí resulta mas claridad y sencillez reduciendo los factores á números fraccionarios, pues obtendríamos

$$\frac{170}{9} \cdot \frac{22}{3} = \frac{3740}{27} = 138 + \frac{14}{27} = 138 \text{ varas cúbicas y } 14 \text{ pies cúbicos.}$$

Si las tres dimensiones las hubiéramos reducido á números fraccionarios, y hecho su multiplicacion, hubiéramos obtenido

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{17}{3} \cdot \frac{22}{3} = \frac{3740}{27} = 138 \text{ varas cúbicas y } \frac{14}{27} \text{ de vara cúbica,}$$

que hacen 14 pies cúbicos.

Conocido el volúmen del paralelepípedo y la superficie de la base, podríamos determinar la altura, del modo siguiente.

Supongamos que se nos diese el volúmen 138 varas cúbicas y 14 pies cúbicos, y la superficie de la base 18 varas cuadradas y 8 pies cuadrados. Si queremos encontrar la altura, deberémos dividir la primera cantidad por la segunda. Para esto, reducirémos el dividendo y divisor á números fraccionarios de su respectiva unidad. Y como la vara cúbica tiene 27 pies cúbicos, el dividendo equivale á 3740 pies cúbicos, ó poniéndole por denominador

el 27, el mismo dividendo equivaldrá á  $\frac{3740}{27}$  varas cúbicas.

El divisor 18 varas cuadradas y 8 pies cuadrados es lo mismo

*Dem.* Porque 1.º un paralelepípedo cualquiera equivale (390) á uno recto y rectángulo de la misma altura y de una base equivalente. Pero el volúmen de este se halla multiplicando la superficie de su base por su altura; luego el volúmen del primero es del mismo modo igual al producto de su base por su altura.

2.º Todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de la misma altura y de dupla base; y como el volúmen de este es igual á su base multiplicada por su altura, resulta que la del prisma triangular es igual al producto de su base, mitad de la del paralelepípedo, multiplicado por su altura.

3.º Un prisma cualquiera se puede dividir en tantos prismas triangulares de la misma altura, como triángulos se pueden formar en el polígono que le sirve de base. Pero el volúmen de cada prisma triangular es igual á su base multiplicada por su altura; y como la altura es la misma para todos, se sigue que la suma de todos los prismas

que 170 pies cuadrados; y poniéndole por denominador el 9, que espresa los pies cuadrados de que se compone la vara cuadrada,

será lo mismo que  $\frac{170}{9}$  varas cuadradas.

Haciendo la división, considerando estos números como abstractos, tendremos  $\frac{3740}{27} : \frac{170}{9} = \frac{3740.9}{27.170} = \frac{374}{3.17} = \frac{374}{51} = 7\frac{1}{3}$ , que

se deben considerar *varas lineales*, y equivalen á 7 varas y 1 pie, como en efecto así debía verificarse.

Si se nos diese el mismo volúmen 138 varas cúbicas y 14 pies cúbicos, y la altura 7 varas y 1 pie lineales, y quisiésemos hallar la superficie de la base, reduciríamos el dividendo y divisor á números fraccionarios, y procederíamos como aquí se ve

$$\frac{3740}{27} : \frac{22}{3} = \frac{3740.3}{27.22} = \frac{3740}{9.22} = \frac{1870}{9.11} = \frac{1870}{99} = 18\frac{88}{99} = 18\frac{8}{9}.$$

Este resultado debe considerarse como *varas cuadradas*, y equivale á 18 *varas cuadradas* y 8 *pies cuadrados*, que es lo que correspondía.

parciales será igual á la suma de todos los triángulos que les sirven de bases, multiplicada por la altura comun.

Luego el volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura. L. Q. D. D.

*Cor.* Luego los prismas que tengan bases y alturas iguales serán equivalentes ó iguales en volúmen.

*De la pirámide y medicion de su superficie y volúmen.*

---

399 Se llama *pirámide* un poliedro que tiene por base una figura cualquiera, y cuyas caras son triángulos que tienen un ángulo en un mismo punto, llamado *cúspide* ó *vértice* de la pirámide; tal es el SABCDE (fig. 119) en que el polígono ABCDE es la base de la pirámide, S su cúspide ó vértice, y los triángulos ASB, BSC, CSD, etc. las caras. Toda línea SO (figs. 119 y 120) que desde el vértice se tire perpendicularmente á la base ó á su prolongacion, se llama *altura* de la pirámide.

Una pirámide es *triangular*, *cuadrangular*, etc. segun la base es un triángulo, cuadrilátero, etc.

Cuando el polígono de la base es regular, y ademas la línea que desde el cúspide va al centro del polígono es perpendicular á la base, la pirámide se llama *regular*; y cuando le falta alguna de estas dos circunstancias, se llama *irregular*. En la regular se llama *apotema* la perpendicular SK (fig. 119), que desde el cúspide S se tira en una de las caras al lado AB de la base.

400 Teor. En toda pirámide regular los triángulos laterales ASB, BSC, CSD, etc. (fig. 119) son isósceles é iguales entre sí.

*Dem.* Por suponerse la pirámide regular, la SO será perpendicular al plano ABCDE, y los radios oblicuos AO, OB, etc. serán iguales; luego (368) las oblicuas SA, SB, SC, etc. son iguales; luego los triángulos SAB, SBC, etc. son isósceles; y como tienen tambien iguales los lados AB, BC, etc. de la base, se infiere que ademas de ser isósceles son (259) iguales. L. Q. D. D.

*Cor.* Si se conciben planos por la altura SO y por cada una de las aristas, quedará dividida la pirámide en

*tantas pirámides triangulares iguales (384) como lados tiene la base; y como aunque la pirámide sea irregular, se puede dividir su base desde un punto cualquiera de ella, en tantos triángulos como lados tiene, concibiendo planos por cada arista y por la línea que une dicho punto con el vértice, quedará dividida la pirámide en tantas triangulares como lados tiene.*

401 Teor. *La superficie lateral S de toda pirámide regular es igual al perímetro P de la base por la mitad de la apotema, que llamaremos Ap., ó se tendrá  $S = P \times \frac{1}{2} Ap.$*

*Dem.* Por ser regular la pirámide, todos los triángulos laterales serán iguales, y por lo mismo la superficie lateral equivaldrá á tantas veces uno de ellos como caras tiene la pirámide; y como esta tiene tantas caras como lados la base, resulta, que llamando  $n$  al número de lados de la base, será  $S = n \times$  triángulos; pero la superficie de un triángulo tal como el ASB, se halla multiplicando la mitad de la apotema SK ó Ap. por el lado AB, que llamaremos L; luego la superficie de uno de los triángulos laterales será  $L \times \frac{1}{2} Ap.$ , lo que dará  $S = n \times L \times \frac{1}{2} Ap. = n \times L \times \frac{1}{2} Ap.$ ; y como  $L n = P$ , se tendrá  $S = P \times \frac{1}{2} Ap.$ , que es L. Q. D. D.

*Esc.* Si á la espresion de la superficie lateral añadimos la de la base, se tendrá la superficie total de la pirámide. Cuando la pirámide ó cualquier otro poliedro es irregular, se halla separadamente la superficie de cada cara, y su suma será la superficie del poliedro.

402 Teor. *Si una pirámide S ABCD (fig. 121) se corta con un plano paralelo á la base ABCD, se verificarán tres cosas: 1.<sup>a</sup> Este plano cortará á todas las aristas SA, SB, SC, etc. en partes proporcionales, que tendrán unas con otras la misma razon que las de otra recta SE, tirada desde el vértice de la pirámide al plano de la base; y la misma razon tambien que dos lados homólogos cualesquiera AB, ab de la base y de la seccion. 2.<sup>a</sup> La seccion abcd será semejante á la base ABCD. 3.<sup>a</sup> La superficie de la base ABCD tendrá con la abcd de la seccion, la misma razon que los cuadrados de las líneas SE, Se.*

*Dem.* 1.<sup>a</sup> Si por la recta SE y por las aristas de la pirámide, se conciben los planos SEA, SEB, SEC, etc. estos cortarán á la seccion abcd en las rectas ea, eb, etc. que serán

paralelas (373) á las EA, EB, etc.; luego (328) los triángulos ASE, BSE, ASB, BSC, etc., serán semejantes á sus correspondientes  $aSe$ ,  $bSe$ ,  $aSb$ ,  $bSc$ , etc. y darán

$$SE:Se::SA:Sa::SB:Sb::SC:Sc::etc.:etc.:AB:ab::BC:bc.$$

2.<sup>a</sup> Una vez que los triángulos AEB, BEC, CED, etc. en que está dividida la base ABCD, tienen sus lados respectivamente proporcionales á los de los triángulos  $aeb$ ,  $bec$ ,  $ced$ , etc. en que está dividida la seccion  $abcd$ , resulta que todos estos triángulos son semejantes unos á otros (329); luego las dos figuras ABCD,  $abcd$ , tambien lo serán (341).

3.<sup>a</sup> Y por ser semejantes las figuras ABCD,  $abcd$ , serán entre sí como los cuadrados de sus líneas homólogas (357 esc. 1.<sup>o</sup>); y por lo mismo  $ABCD:abcd::AB^2:ab^2::SE^2:Se^2$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Luego si se cortan dos pirámides SABCD, SFGH (fig. 122) de iguales alturas SE, SE', con un plano paralelo al de sus bases, las secciones  $abcd$ ,  $fgb$ , tendrán una con otra la razon de las bases ABCD, FGH; y si estas son iguales, tambien lo serán las secciones.

Porque por lo demostrado últimamente, será

$$ABCD:abcd::AB^2:ab^2::SE^2:Se^2;$$

por la misma razon  $FGH:fgb::SE'^2:Se'^2$ ; pero  $SE=SE'$  por el supuesto, y como el plano es paralelo á las bases, cortará partes iguales de las alturas; luego siendo  $Ee$ ,  $E'e'$  iguales, los residuos  $Se$ ,  $Se'$  serán iguales, y por lo mismo las dos proporciones de arriba tendrán igual la última razon; y formando proporcion con las otras dos será

$$ABCD:abcd::FGH:fgb \text{ ó } ABCD:FGH::abcd:fgb;$$

luego si  $ABCD=FGH$ , resultará  $abcd=fgb$ , que es L. Q. D. D.

*Esc.* Se dice de dos pirámides que son semejantes cuando sus bases son semejantes, y tienen todas la líneas homólogas proporcionales; y como todas las de la pirámide SABCD son proporcionales con las de la  $Sabcd$ , y ABCD es semejante á  $abcd$ , resulta que la pirámide quitada ó deficiente  $Sabcd$ , es semejante á la SAECD.

403 La parte ABCDabcd que queda, se llama tronco ó trozo de pirámide ó pirámide truncada; y cuando la pirámide de que resulta el trozo es regular, su superficie lateral se halla multiplicando la parte de la apotema comprendida entre las dos bases opuestas, por la semisuma de los perímetros de las bases paralelas, ó por el perímetro de una seccion hecha á distancias iguales de las bases paralelas.

*Dem.* Porque observando que todos los trapecios tendrán una misma altura  $Kk$  (fig. 121) será

$$\text{Sup. lat. de trozo } ABCDdabc = Ab + Bc + Cd + Da =$$

$$(\S 356) kK \times \frac{AB+ab}{2} + kK \times \frac{BC+bc}{2} + kK \times \frac{CD+cd}{2} + kK \times \frac{DA+da}{2} =$$

$$kK \times \frac{AB+ab+BC+bc+CD+cd+DA+da}{2} =$$

$$kK \times \frac{\text{perím. } ABCD + \text{perím. } abcd}{2}; \quad \text{y como } (\S 356 \text{ esc.})$$

$$\frac{AB+ab}{2} = mn, \quad \frac{BC+bc}{2} = no, \quad \frac{CD+cd}{2} = op, \quad \text{y} \quad \frac{DA+da}{2} = pm,$$

resulta: Sup. lat. de trozo =  $kK \times mn + kK \times no + kK \times op + kK \times pm = kK \times (mn + no + op + pm) = kK \times \text{perím. de seccion equidistante de las bases paralelas. L. Q. D. D.}$

404 Teor. *A toda pirámide se le puede inscribir y circunscribir un número de prismas, de manera que la diferencia entre la suma de los circunscritos y la de los inscritos sea menor que cualquier cantidad dada.*

*Dem.* Sea  $SABC$  (fig. 123) la pirámide propuesta; si se divide la altura en un número cualquiera de partes iguales, v. g. en 4, y por los puntos de division se conciben planos paralelos á su base, se tendrá dividida la pirámide en otra  $SQRT$ , y en tantos trozos  $QRTNMX$ ,  $XMNHGF$ ,  $FGHCBA$ , como partes tenía la altura ménos una. Concibiendo ahora un prisma  $ZVSTRQ$ , que tenga la misma base y altura que la pirámide, y en cada trozo dos prismas de la misma altura que él, que el uno tenga por base la mayor del trozo y el otro la menor, se tendrá el número de prismas circunscritos  $ZVSTRQ$ ,  $OPTNMX$ ,  $LKNHGF$ ,  $DEHCBA$ , y el de los inscritos  $QRTNml$ ,  $XMNHgf$ ,  $FGHCba$ ; pero el primer prisma circunscrito  $ZVSTRQ$  es igual (398 cor.) con el primer inscrito  $QRTNml$ ; el segundo circunscrito con el segundo inscrito, y el tercero con el tercero; luego la diferencia entre la suma de los circunscritos é inscritos estará representada por el último circunscrito  $DEHCBA$ ; y si inscribiéramos y circunscribiéramos duplo número de prismas, el último circunscrito que espresaría la diferencia, sería dos veces menor que el  $DEHCBA$ ; y como continuando del mismo modo, el último prisma circunscrito que espresa la diferencia, va haciéndose dos veces menor, al

cabo de cierto tiempo llegará (229) á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea. L. Q. D. D.

*Cor.* Siendo el volúmen de la pirámide mayor que la suma de los prismas inscritos, y menor que la de los circunscritos, *con mas razon se le podrá inscribir ó circunscribir un número de prismas, de modo que la diferencia entre la suma de cualesquiera de estos y el volúmen de la pirámide, sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

405 Teor. *Dos pirámides de igual base y altura son iguales en volúmen.*

*Dem.* Sean  $SABC, S'A'B'C'$  las dos pirámides; si se concibe dividida su altura en un mismo número de partes iguales, y por los puntos de division se hacen pasar planos, las secciones que causen estos planos serán iguales (402 cor.); concibiendo ahora un prisma circunscrito á cada una de las partes en que quedan divididas las pirámides, y llamando  $S$  la suma de los prismas circunscritos á  $SABC$ , y  $S'$  á la de los circunscritos á  $S'A'B'C'$ , se tendrá  $S=S'$ ; pues cada prisma de la  $SABC$  es igual (398 cor.) con el correspondiente de la  $S'A'B'C'$ ; pero  $S$  se puede acercar (404 cor.) á  $SABC$ , y  $S'$  á  $S'A'B'C'$  tanto como se quiera; luego tenemos aquí dos cantidades  $S, S'$ , variables, pero siempre iguales, que se pueden acercar á las dos constantes  $SABC, S'A'B'C'$  tanto como se quiera; luego (231 cor.) estas constantes son iguales, y se tiene  $SABC=S'A'B'C'$ , que es L. Q. D. D.

406 Teor. *Todoprisma triangular  $ABCFDE$  (fig. 124) se puede dividir en tres pirámides equivalentes.*

*Dem.* Si por las diagonales  $AD, AF$  de dos caras contiguas del prisma se concibe un plano, quedará dividido el prisma en dos pirámides, una triangular  $ADEF$  (fig. 125), cuya base  $DEF$  y la altura  $AE$  serán las mismas que las del prisma; y la otra cuadrangular (fig. 126) que tendrá por base á la otra cara del prisma, y por altura la del triángulo  $BAC$  c<sup>o</sup> la base. Si por las aristas  $DA, AC$  de esta, se concibe un plano  $DAC$ , su comun seccion con el  $BCFD$ , será la diagonal  $DC$ ; por lo que dicha pirámide quedará dividida en otras dos triangulares  $ABCD, ACDF$ , que tendrán bases iguales (313, 1.<sup>o</sup>), y una misma altura por tener su vértice comun en  $A$ ; por lo cual estas dos pirámides serán (405) iguales en volúmen. Ahora, la pirámide  $DBAC$  se puede considerar que tiene por base el triángulo  $BAC$ , que es una de las bases del prisma, y por altura

la misma que la del prisma; y como las dos bases opuestas de un prisma son iguales, resulta que las dos pirámides DBAC y ADEF (fig. 125) son iguales tambien en volúmen; luego las tres pirámides son iguales en volúmen.

Cor. 1.º *Toda pirámide triangular es el tercio de un prisma triangular de igual base y altura, porque equivaliendo el prisma BACFED (fig. 124) á tres pirámides iguales con la ADEF, cada una de estas será el tercio del prisma; y como podemos concebir á toda pirámide dividida en tantas pirámides triangulares (400 cor.), como lados tiene su base, y cada una será el tercio del prisma de igual base y altura, resulta que en general toda pirámide, de cualquier clase que sea, es igual á la tercera parte de un prisma de igual base y altura.*

Cor. 2.º *Luego siendo el volúmen del prisma (398) igual á la superficie de su base multiplicada por su altura, el de la pirámide será igual á la superficie de la base multiplicada por el tercio de la altura.*

*De los poliedros regulares, ó de los cinco cuerpos regulares.*

407 Se llaman *poliedros regulares* aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales, y cuyos ángulos sólidos son todos iguales entre sí.

De estos solo hay los cinco siguientes, á saber: el *tetraedro* (fig. 127) que es un cuerpo terminado por cuatro triángulos equiláteros iguales; el *octaedro* (fig. 128) que está terminado por ocho triángulos equiláteros iguales; el *icosaedro* (fig. 129) que está terminado por veinte triángulos iguales; el *exaedro* ó cubo (fig. 130) que está terminado por seis cuadrados iguales; y el *dodecaedro* (fig. 131) que está terminado por doce pentágonos iguales.

Para encontrar su superficie, se halla la de una cara, y se multiplica por el número de ellas.

Para encontrar su volúmen, observaremos que siendo el tetraedro una pirámide, le hallaremos conforme lo hemos dicho (406 cor. 2.º); el octaedro no viene á ser otra cosa que dos pirámides cuadrangulares reunidas por su base, y la regla que acabamos de citar nos dará su

volúmen; y siendo el exaedro un cubo, nos servirá la regla dada (398).

Ahora, para encontrar el volúmen del dodecaedro y del icosaedro, los consideraremos como compuestos de tantas pirámides como caras tienen, cuya base sea cada cara, y la altura la mitad de la distancia que hay entre dos caras opuestas.

*De los tres cuerpos redondos.*

---

408 Se llama *cuerpo redondo* ó de revolucion, el que está terminado por una superficie que no presenta esquinas ó ángulos sólidos.

Se llama *cilindro* un cuerpo, cuyas dos bases opuestas son dos círculos iguales y paralelos, cuya superficie lateral es convexa, y se le puede aplicar una regla ó un plano, de modo que coincida con dicha superficie lateral en una línea recta: tal es el EFCD (fig. 132); la línea AB que une los dos centros, se llama su *eje*; cuando el eje es perpendicular á las bases, el cilindro es *recto*; cuando no, es *oblicuo*, tal como el EFCD (fig. 133); en cuyo caso la *altura* es la perpendicular DO tirada desde un punto cualquiera de la base superior á la inferior ó á su prolongacion.

El cilindro recto se puede concebir oriinado de la revolucion de un rectángulo ABCD (fig. 132) al rededor del lado inmóvil AB; con este movimiento los lados AD, BC describen los círculos iguales DHP, CGQ, que son las bases del cilindro; el lado CD describe su superficie lateral, y la línea AB es el eje del cilindro.

El cilindro oblicuo se puede considerar formado del movimiento de un círculo FGCQ (figura 133) paralelamente á sí mismo en la direccion de la recta CD.

409 Se dice que un poliedro cualquiera está *inscrita* en un cuerpo redondo, cuando todos los vértices de sus ángulos sólidos se hallan en la superficie del cuerpo; y que está *circunscrito*, cuando todas sus caras son tangentes del mismo cuerpo, ó solo tiene de comun con él una recta, estando todo lo demás de la cara fuera.

410 Teor. *Toda seccion MLKN (figs. 132 y 133) hecha en un cilindro paralela á las bases, es un círculo igual á las bases.*

*Dem.* Por ser el plano MLK paralelo á la base FGC, se tiene (§ 375)  $FM=BS=KC=etc.$ ; luego si se concibe un número cualquiera de planos EABF, HABG, etc. que pasen por el eje AB, todas las figuras FBSM, GBSL, etc. serán paralelogramos (311), que darán  $FB=MS$ ,  $GB=LS$ , etc.; pero  $FB=GB=etc.$ ; luego  $MS=LS=etc.$ ; luego todos los puntos de la seccion distan igualmente de S, y por lo mismo es un círculo; y como su radio es igual al de la base, resulta que el círculo seccion será igual al de la base. L. Q. D. D.

411 Teor. *Si en el cilindro recto se inscriben y circunscriben dos prismas, la superficie del cilindro es mayor que la del inscrito, y menor que la del circunscrito; y la diferencia entre la superficie del circunscrito y la del inscrito podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

*Dem.* 1.º Sea  $p$  el perímetro de la base del prisma inscrito, cuya superficie lateral espresarémos por  $\pi$ ; y como su arista será el mismo lado L del cilindro, tendrémos (§ 392 cor.)

$$\pi = p \times L \text{ (m).}$$

Ahora, si aumentase el número de lados, crecería (308) el perímetro  $p$ , y por consiguiente tambien crecería la superficie  $\pi$ ; y como el prisma que tenga mas lados, tendrá mas aristas comunes con la superficie del cilindro, y ademas la superficie de dicho prisma se hallará entre la del cilindro y la del prisma que tenga ménos, resulta que  $\pi$  es una cantidad variable, que al paso que crece se acerca á la superficie convexa del cilindro, que es constante; luego (227) esta es mayor que aquella. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si espresamos por  $P$  el perímetro de la base del prisma circunscrito, y por  $\Pi$  su superficie lateral, se tendrá

$$\Pi = P \times L \text{ (n).}$$

Ahora, si el número de lados de la base aumenta,  $P$  disminuye (308), y por consiguiente tambien disminuirá la superficie  $\Pi$ ; pero el prisma que tiene mas lados se acerca mas á la superficie del cilindro, por tener mas aristas comunes con ella, y estar la superficie de dicho prisma entre la del cilindro y la del prisma que tiene ménos lados; luego  $\Pi$  es una cantidad variable, que al paso que mengua se acerca á una constante, que es la superficie del cilindro; luego (228) esta es menor que aquella. L. 2.º Q. D. D.

3.º Si restamos las (ecs. m, n), se tendrá

$$\Pi - \pi = P \times L - p \times L = (P - p)L.$$

Y como  $P - p$  puede llegar (345) á ser menor que cualquier cantidad dada, se sigue (229 cor. 3.º) que tambien podrá llegarlo á ser la diferencia  $\Pi - \pi$  entre las superficies de dichos prismas. L. 3.º Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir un prisma ú un cilindro, de manera que la diferencia entre sus superficies sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

412 Teor. La superficie convexa de un cilindro recto, que llamaremos  $G$ , es igual al producto de la circunferencia  $C$  de su base por su lado, ó  $G = C \times L$ .

*Dem.* Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá  $\Pi = P \times L$ ; pero al paso que aumenta el número de lados, disminuye dicha superficie  $\Pi$  y se va acercando á  $G$ , de modo que su diferencia puede llegar (411 cor.) á ser menor que cualquier cantidad dada; y como al mismo tiempo, el producto  $P \times L$  se acerca á  $C \times L$ , pues  $P$  se puede acercar (345 cor.) á  $C$  tanto como se quiera, y el factor  $L$  es comun, resulta que las dos cantidades variables  $\Pi$  y  $P \times L$ , siendo siempre iguales, se pueden acercar respectivamente á las dos constantes  $G$  y  $C \times L$ ; luego (231 cor.) estas son iguales, ó se tiene  $G = C \times L$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Si en vez de  $C$  se sustituye su valor (347), se tendrá  $G = 3,14159 \times D \times L = \pi DL = 2\pi RL$ ; que es la fórmula general de donde se deduce la superficie del semicilindro, cuadrante de cilindro, etc.

413 Teor. A un cilindro recto se puede inscribir y circunscribir un prisma tal, que la diferencia entre el volúmen del circunscrito y del inscrito sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

*Dem.* Sean ahora  $\Pi'$  y  $\pi'$  los volúmenes de dos prismas, circunscrito é inscrito á un cilindro, que tambien llamaremos  $G$ ;  $P'$ ,  $p'$  las superficies de sus bases, y  $A$  su altura comun, que es la misma que la del cilindro, y (398) tendríamos  $\Pi' = P' \times A$ ;  $\pi' = p' \times A$ ; que restando la una de la otra, resultará  $\Pi' - \pi' = P' \times A - p' \times A = (P' - p') \times A$ ; y como en este valor entra por factor  $P' - p'$  que (358) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, se sigue (229 corol. 3.º) que lo mismo sucederá á  $\Pi' - \pi'$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Como el prisma inscrito es parte del cilindro, será menor que él; y como el circunscrito es todo respecto del mismo cilindro, será mayor que él. Luego *con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir un prisma en el cilindro, de modo que la diferencia entre cualquiera de sus volúmenes y el del cilindro, sea menor que cualquier cantidad dada.*

414 Teor. *El volúmen de un cilindro  $G$  es igual á la superficie  $C$  del círculo de su base multiplicada por su altura  $A$ , ó se tendrá  $G=C \times A$ .*

*Dem.* Conservando las mismas denominaciones de ántes, tendrémós respecto del prisma circunscrito  $II' = P' \times A$ ; pero si crece el número de lados,  $II'$  se va acercando á  $G$ , de modo que su diferencia (413 cor.) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; y como al mismo tiempo la espresion de  $II'$ , esto es,  $P' \times A$ , se puede acercar á  $C \times A$  todo lo que se quiera, por hacerlo (358 cor.)  $P'$  á  $C$  y ser  $A$  comun, resulta que las dos cantidades variables é iguales  $II'$  y  $P' \times A$ , se pueden acercar todo lo que se quiera á las dos constantes  $G$  y  $C \times A$ ; luego (231 cor.) estas son iguales, y se tiene  $G = C \times A$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Si en vez de  $C$  (359 cor. 2.º) sustituimos su valor, se tendrá  $G = \pi R^2 A$ ; de esta fórmula se deducen todas las que tienen relacion con el volúmen del cilindro, semicilindro, sector cilíndrico, etc.; y si se tuviese  $A = R$ , sería  $G = \pi R^3$ .

*Esc.* La demostracion anterior sirve tambien para el cilindro oblicuo.

415 Se llama *cono* un cuerpo (figs. 134 y 135) que tiene por base un círculo, y está terminado por una superficie curva que acaba en un punto  $S$  llamado cúspide ó vértice del cono, tal es  $SCDBE$ ; la línea que desde el cúspide va al centro de la *base* se llama *eje* del cono; cuando el eje es perpendicular á la base, el cono es *recto* (fig. 134); y cuando no, *oblicuo* (fig. 135); en este se llama *altura* la perpendicular bajada desde el cúspide á la base ó á su prolongacion; en el recto la altura es el mismo eje.

El cono recto se origina de un triángulo rectángulo  $SAB$ , que gira al rededor de un cateto inmóvil  $SA$ ; pues en este movimiento el cateto  $AB$  describe la base

BDCE, y la hipotenusa SB, que se llama *lado* del cono, traza la superficie del cono.

416 Teor. *Toda seccion FKHL (figs. 134 y 135) hecha en un cono, paralela á su base, es un círculo.*

*Dem.* Concíbanse por el eje SA los planos SAD, SAB etc., cuyas intersecciones con los planos paralelos CDB, FKH, serán (375) líneas paralelas; por lo que los triángulos SAD, SAB, SAE, etc. darán

$$SA:SG::AD:GK, SA:SG::AB:GH, SA:SG::AE:GL, \text{ etc. ;}$$

y como estas proporciones tienen comun la razón SA:SG, las otras serán iguales y darán AD:GK::AB:GH::AE:GL::etc.:etc.; pero los antecedentes son iguales por radios de la base; luego los consecuentes tambien lo serán, y se tendrá GK=GH=GL=etc. que manifiesta, que distando todos los puntos de la seccion igualmente del G, dicha seccion será un círculo. L. Q. D. D.

417 La parte FCDBH comprendida entre la base y la seccion, se llama *tronco*, ó *trozo de cono*, ó *cono truncado*.

418 Teor. *Si en un cono recto se inscriben y circunscriben dos pirámides regulares; la superficie lateral del cono es mayor que la de la inscrita, y menor que la de la circunscrita; y la diferencia entre la superficie de la inscrita y la de la circunscrita podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada.*

*Dem.* 1.º Sea  $p$  el perímetro de la base de la pirámide inscrita, cuya superficie lateral espresarémos por  $\pi$ , y sea  $l$  su apotema, y (401) tendrémos  $\pi = p \times \frac{1}{2}l$  (m).

Ahora, si aumentase el número de lados, crecería (308) el perímetro  $p$ , y tambien crecería (368) la apotema  $l$ ; luego tambien crecerá la superficie  $\pi$ ; y como la pirámide que tenga mas lados, tendrá mas aristas comunes con la superficie del cono, y la superficie de dicha pirámide se hallará entre la del cono y la de la pirámide de menor número de lados, resulta que la cantidad variable  $\pi$ , al paso que crece, se acerca á la superficie convexa del cono, que es constante; luego (227) esta es mayor que aquella. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si espresamos por  $P$  el perímetro de la base de la pirámide circunscrita, por  $L$  su apotema, que será el mismo lado del cono, y por  $\Pi$  su superficie lateral, se tendrá  $\Pi = P \times \frac{1}{2}L$  (n).

Ahora, si aumenta el número de lados de la base, la  $L$  permanecerá la misma,  $P$  disminuirá (308), y por consiguien-

te tambien disminuirá  $\Pi$ ; pero la pirámide que tiene mas lados, se acerca mas á la superficie del cono, por tener mas aristas comunes con ella, y estar su superficie entre la del cono y la de la pirámide que tiene ménos lados; luego  $\Pi$  es una variable que al paso que mengua, se acerca á una constante que es la superficie del cono; luego (228) esta es menor que aquella. L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

3.<sup>o</sup> Si restamos las (ecs. m, n) se tendrá  $\Pi - \pi = P \times \frac{1}{2}L - p \times \frac{1}{2}l$ ; pero  $p$  se puede acercar (345) á  $P$  y  $l$  á  $L$  todo lo que se quiera; porque  $l$  es una oblicua que se va separando cada vez mas de la perpendicular, que es el eje del cono, y  $L$  no varía; luego si la diferencia de los factores  $P, L$  y  $p, l$ , puede ser menor que cualquier cantidad dada (esc. 3.<sup>o</sup> § 231), la de la mitad de sus productos, y de consiguiente la diferencia  $\Pi - \pi$  tambien lo podrá llegar á ser. L. 3.<sup>o</sup> Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir una pirámide á un cono, tal que la diferencia entre sus superficies sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

419 Teor. La superficie lateral  $G$  de un cono recto es igual á la circunferencia  $C$  de su base por la mitad de su lado  $L$ , ó  $G = C \times \frac{1}{2}L$ .

*Dem.* Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá  $\Pi = P \times \frac{1}{2}L$ ; pero al paso que aumenta el número de lados, disminuye dicha superficie  $\Pi$ , y se va acercando á  $G$ , de modo que su diferencia puede (418 cor.) llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; y como al mismo tiempo el producto  $P \times \frac{1}{2}L$  se acerca á  $C \times \frac{1}{2}L$ , pues  $P$  se acerca (345 cor.) á  $C$ , y el factor  $\frac{1}{2}L$  es comun, resulta que las dos cantidades variables  $\Pi$  y  $P \times \frac{1}{2}L$ , siendo siempre iguales, se pueden acercar respectivamente á las dos constantes  $G$  y  $C \times \frac{1}{2}L$ ; luego (231 cor.) estas son iguales, ó se tiene  $G = C \times \frac{1}{2}L$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Sustituyendo en vez de  $C$  su valor (347), será  $G = \pi D \times \frac{1}{2}L = \pi \times 2R \times \frac{1}{2}L = \pi RL$ ; que es la fórmula general que da todas las que tienen relacion con la superficie del cono.

420 Como  $C \times \frac{1}{2}L = \frac{1}{2}C \times L$ , y si por el punto  $F$  medio del lado del cono se da una seccion paralela á la base, la circunferencia  $FKHL$  será la mitad de la  $CDBE$ , por ser su radio la mitad (322), se tendrá  $G = FKHL \times L$ ; que quiere decir, que la superficie lateral de todo cono

recto es igual á su lado multiplicado por la circunferencia de un círculo paralelo á la base, y tirado por el punto medio del lado.

421 Lo dicho respecto del cono y las pirámides inscritas y circunscritas en él, se aplica del mismo modo al trozo de cono recto, y los trozos de pirámides inscritos y circunscritos á él; y se deduce, que la superficie lateral de todo trozo de cono recto es igual á su lado multiplicado por la semisuma de las circunferencias de las bases paralelas, ó á su lado multiplicado por la circunferencia de un círculo trazado equidistante de las bases paralelas; ó lo que es lo mismo (fig. 134)

$$\text{superficie de trozo } CDBELHKF = FC \times \frac{CDBE + FKHL}{2} = FC \times \text{circunferencia } MN;$$

y si en vez de las circunferencias sustituimos (347) sus valores  $2\pi \times CA$ ,  $2\pi \times FG$ , y sacamos el factor comun  $2\pi$ , se tendrá

$$\text{sup. de trozo} = 2\pi \times \frac{CA + FG}{2} \times FC = 2\pi \cdot MN \cdot FC.$$

422 Teor. *A todo cono se puede inscribir y circunscribir una pirámide, de modo que la diferencia entre su volúmen sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Sean ahora  $\Pi'$  y  $\pi'$  los volúmenes de dos pirámides, circunscrita é inscrita al cono;  $P'$ ,  $p'$  las superficies de sus bases, y  $A$  su altura comun, que tambien es la del cono; y (406 cor. 2.º) tendremos  $\Pi' = P' \times \frac{1}{3}A$ ,  $\pi' = p' \times \frac{1}{3}A$ ; que, restando la una de la otra, resultará

$$\Pi' - \pi' = P' \times \frac{1}{3}A - p' \times \frac{1}{3}A = (P' - p') \times \frac{1}{3}A;$$

y como en este valor entra por factor  $P' - p'$ , que (358) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, se sigue (229 cor. 3.º) que lo mismo sucederá á la diferencia  $\Pi' - \pi'$ , que es L. Q. D. D.

Cor. *Luego con mas razon se podrá inscribir y circunscribir al cono una pirámide tal que la diferencia entre su volúmen y el del cono sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

423 Teor. *El volúmen de todo cono recto G es igual*

á la superficie  $C$  de la base multiplicada por el tércio de la altura  $A$ , ó  $G=C \times \frac{1}{3}A$ .

*Dem.* Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá respecto de la pirámide circunscrita  $II' = P' \times \frac{1}{3}A$ ; pero si crece el número de lados,  $II'$  se va acercando á  $G$ , de modo (422 cor.) que su diferencia puede ser tan pequeña como se quiera; y como al mismo tiempo la espresion de  $II'$ , ó  $P' \times \frac{1}{3}A$  se puede acercar todo lo que se quiera á  $C \times \frac{1}{3}A$ , por hacerlo (358 cor.)  $P'$  á  $C$  y ser  $\frac{1}{3}A$  comun, resulta que las dos cantidades variables é iguales  $II'$  y  $P' \times \frac{1}{3}A$ , se pueden acercar todo lo que se quiera á las dos constantes  $G$  y  $C \times \frac{1}{3}A$ ; luego (231 cor.) estas son iguales, y se tiene  $G = C \times \frac{1}{3}A$ , que es L. Q. D. D.

*Cor. 1.º* Sustituyendo en vez de  $C$  su valor, será  $G = \pi R^2 \times \frac{1}{3}A$ ; de esta fórmula general salen todas las que tienen relacion con el volúmen del cono.

*Cor. 2.º* Y como el volúmen de un cilindro, de igual base y altura que el cono, sería  $C \times A$ , se sigue que todo cono es la tercera parte de un cilindro de igual base y altura.

*Esc.* El volúmen del trozo de cono  $CDBF$  se hallará restando del cono total el volúmen del deficiente  $SFKH$ ; pero como cuando se da el trozo, no se conoce la altura total del cono, ni la del deficiente, será necesario de antemano determinar esta. Para conseguirlo, sea  $A$  la altura del trozo,  $x$  la del deficiente,  $R$  el radio de la base inferior,  $r$  el de la superior, y los triángulos semejantes  $SAC$ ,  $SGF$  darán  $AC:FG::SA:SG$ , ó  $R:r::A+x:x$ ;

de donde sale  $x = \frac{Ar}{R-r}$ ,

y  $SA = A+x = A + \frac{Ar}{R-r} = \frac{AR - Ar + Ar}{R-r} = \frac{AR}{R-r}$ ;

luego tendremos

vol. de trozo  $CDBF = \text{cono } SCDB - \text{cono } SFKH =$

$$\pi R^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{AR}{R-r} - \pi r^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{Ar}{R-r} = \pi \times \frac{1}{3} A \times \frac{R^3 - r^3}{R-r} =$$

$$\pi \times \frac{1}{3} A (R^2 + Rr + r^2).$$

424 Teor. Si un triángulo  $ABC$  (fig. 136) gira al rededor del lado mayor  $AC$ , describirá un cuerpo, cu-

yo volúmen será igual á la superficie que describe uno de los otros lados  $AB$ , multiplicada por el tercio de la perpendicular  $Cq$  tirada á dicho lado, ó á su prolongacion, desde el otro extremo  $C$  del lado que sirve de eje; ó lo que es lo mismo

$$\text{vol. orig. por triáng. } ABC = \text{sup. } AB \times \frac{1}{3} Cq.$$

*Dem.* Si desde el punto  $B$  se concibe la perpendicular  $Bb$  al eje, el cuerpo descrito por el triángulo  $ABC$ , se compondrá de dos conos, cuya base comun será el círculo descrito por el radio  $Bb$ ; luego (423) el volúmen de este cuerpo, ó volúmen  $ABC = \text{cono } CBb + \text{cono } ABb = \text{cerc.}^\circ Bb \times \frac{1}{3} Cb + \text{cerc.}^\circ Bb \times \frac{1}{3} Ab = \text{cerc.}^\circ Bb \times (\frac{1}{3} Cb + \frac{1}{3} Ab) = \text{cerc.}^\circ Bb \times \frac{1}{3} CA.$

Esto supuesto (§. 359 cor. 2.º)  $\text{cerc.}^\circ Bb = \pi Bb^2$ , y (§ 419 cor.)  $\text{sup. cono } AB = \pi \times Bb \times AB$ ; y formando proporcion y simplificando la segunda razon por  $\pi \times Bb$ , será

$$\text{cerc.}^\circ Bb : \text{sup. cono } AB :: \pi \times Bb^2 : \pi \times Bb \times AB :: Bb : AB.$$

Ahora, los triángulos rectángulos  $ABb$ ,  $CqA$ , tienen ademas el ángulo en  $A$  comun; luego son semejantes y dan  $Cq : AC :: Bb : AB$ ; y como esta proporcion y la anterior tienen comun la razon  $Bb : AB$ , darán

$$\text{cerc.}^\circ Bb : \text{sup. cono } AB :: Cq : AC = Cq \times \frac{\text{sup. cono } AB}{\text{cerc.}^\circ Bb}.$$

Sustituyendo este valor de  $AC$  en el anterior del volúmen, y simplificando por  $\text{cerc.}^\circ Bb$ , se tendrá

$$\text{vol. } ABC = \text{cerc.}^\circ Bb \times \frac{1}{3} Cq \times \frac{\text{sup. } AB}{\text{cerc.}^\circ Bb} = \frac{1}{3} Cq \times \text{sup. } AB =$$

$\text{sup. } AB \times \frac{1}{3} Cq$ , que es L. Q. D. D.

*Esc.* Si el triángulo que girase fuese el  $AB'C$ , en cuyo caso la perpendicular al lado  $AB$  cae fuera, en vez de los triángulos  $ABb$ ,  $ACq$ , se compararían los  $AB'b'$ ,  $ACq$ , y se deduciría lo mismo.

425 Si el triángulo fuese rectángulo como  $DUO$  (figura 137), y girase al rededor del punto  $O$ , permaneciendo la  $UO$  perpendicular á  $MN$ , se verifica tambien la proposicion, esto es, que

$$\text{vol. orig. por } DUO = \text{sup. } DU \times \frac{1}{3} OU.$$

En efecto, concibiendo la  $DM$  perpendicular á  $MN$ , el volúmen del cuerpo engendrado por  $DUO$  será igual al del cilindro engendrado por  $DUOM$ , ménos el volúmen del cono engendrado por  $DMO$ , ó  $\text{vol. } DUO = \text{vol. } DUOM - \text{vol. } DMO =$

$$\begin{aligned} & \text{cír.}^\circ \text{ DM} \times \text{DU} = \text{cír.}^\circ \text{ DM} \times \frac{1}{3} \text{OM} = \\ & \text{cír.}^\circ \text{ DM} \times (\text{DU} - \frac{1}{3} \text{OM}) = \text{cír.}^\circ \text{ DM} \times (\text{DU} - \frac{1}{3} \text{DU}) = \\ & \text{cír.}^\circ \text{ DM} \times \frac{2}{3} \text{DU} = \pi \times \text{DM}^2 \times \frac{2}{3} \text{DU}; \end{aligned}$$

pero la superficie cilíndrica engendrada por DU (§ 412)  
ó sup. cilind. DU = circunf. DM × DU = 2π × DM × DU,

que da  $\text{DU} = \frac{\text{sup. cil. DU}}{2\pi \times \text{DM}}$ ; luego substituyendo este valor de DU en

la espresion anterior del volúmen, se tendrá

$$\text{vol. DUO} = \pi \times \text{DM}^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\text{sup. cil. DU}}{2\pi \times \text{DM}} = \frac{1}{3} \text{DM. Sup. DU} = \text{Sup. DU.} \frac{1}{3} \text{OU.}$$

*Esc.* Obsérvese que siendo los dos triángulos DUO, DOM iguales, el primero engendra un volúmen duplo del segundo; pues vol. DOM = cír.° DM ×  $\frac{1}{3}$  OM; y como entre los dos cuerpos valen el cilindro engendrado por DUOM ó cír.° DM × OM, resulta que el del engendrado por DUO, será vol. DUO = cír.° OU ×  $\frac{2}{3}$  OM.

426 Teor. Si un polígono regular de un número par de lados, se hace girar al rededor de un diámetro del círculo circunscrito á dicho polígono, trazará un cuerpo, cuya superficie será igual á la circunferencia de uno de los radios rectos, multiplicada por el diámetro que sirve de eje: y su volúmen será igual á la superficie de dicho cuerpo, multiplicada por la tercera parte del radio recto de dicho polígono.

*Espl.* Sea el polígono ABCDE etc. (fig. 138); digo que si gira al rededor del diámetro AF del círculo circunscrito, describirá un cuerpo, cuya superficie *s* será igual á la circunferencia de un radio recto *Op* multiplicada por dicho diámetro AF, ó se tendrá  $s = \text{circunf. Op} \times \text{AF}$ ; y su volúmen *v* será igual á la superficie del cuerpo, multiplicada por la tercera parte del radio recto *Op*, ó se tendrá  $v = \text{circunf. Op} \times \text{AF} \times \frac{1}{3} \text{Op}$ .

*Constr.* Concíbanse desde los extremos de cada lado y desde su punto medio, las perpendiculares *pp'*, *Bb*, *mn*, *Cc*, *Dd*, etc. á la AF, y ademas los radios rectos *Op*, *Om*, *Oq*, etc.; con lo cual el cuerpo descrito por el polígono al girar, se compondrá del cono engendrado por AB, y de los trozos de cono engendrados por los lados BC, CD (este será cilindro) etc., y de otros tantos igua-

les respectivamente por la parte de abajo de  $Oq$ ; por lo que, hallando la superficie de cada uno de estos cuerpos y sumando, se tendrá la superficie pedida.

Lo mismo sucede con el volúmen; pero como la fórmula para hallar el del trozo del cono es muy complicada, para hacer aplicacion de ella, consideraremos el volúmen del cuerpo como compuesto del que engendra el triángulo  $OBA$ , el  $OCB$ , el  $OCq$ , etc. y sus iguales por la parte inferior; y sumándolos todos, se tendrá el volúmen total.

*Dem.* 1.<sup>o</sup> La superficie del cono (420) engendrado por  $AB$  es igual á  $AB \times \text{circunf. } pp'$ .

La del trozo engendrado por  $BC$  es igual (421) á  $BC \times \text{circunf. } mn$ .

Y la del cilindro trazado por  $Cq$  es igual (412) á  $Cq \times \text{circunf. } Oq$ .

Del mismo modo se procedería si el polígono tuviese mas lados.

Ahora, los triángulos  $ABb$ ,  $pOp'$  son rectángulos, el uno en  $b$ , y el otro en  $p'$ ; además tienen el ángulo  $ABb$  del primero igual al  $pOp'$  del segundo, porque tienen iguales medidas, á saber: el  $ABb$  la (304) mitad del arco  $Ab'$  que es igual con la mitad de  $AB$ , y la mitad de este es la medida del  $pOp'$ ; luego (331 cor. 2.<sup>o</sup>) son semejantes, y darán

$AB:Ab::Op:pp'::$  (§ 346)  $\text{circunf. } Op: \text{circunf. } pp'$ ; de donde sale  $AB \times \text{circunf. } pp' = Ab \times \text{circunf. } Op$ .

Los triángulos  $BCx$ ,  $Omn$ , que tienen sus tres lados respectivamente perpendiculares, serán (331 cor. 4.<sup>o</sup>) semejantes, y darán  $BC:Bx::Om:mn:: \text{circunf. } Om: \text{circunf. } mn$ ; que da

$$BC \times \text{circunf. } mn = Bx \times \text{circunf. } Om.$$

Observando ahora que  $Op = Om = Oq = \text{etc.}$  por radios rectos, y que  $Bx = bc$ ,  $Cq = Oc$ , etc. substituyendo en vez de los valores que teníamos ántes de las superficies, los que acabamos de sacar, y sumando, se tendrá

sup. engendrada por  $ABCq =$

$$Ab \times \text{circunf. } Op + bc \times \text{circunf. } Op + cO \times \text{circunf. } Op = \\ \text{circunf. } Op \times (Ab + bc + cO) = \text{circunf. } Op \times AO;$$

y como esta es la mitad de la superficie del cuerpo, duplicando el factor  $AO$ , se tendrá la del total, que será  $= \text{circunf. } Op \times AF$ , que es L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

2.<sup>o</sup> Por lo demostrado (424), se tendrá  $\text{vol. } ABO = \text{sup. } AB \times \frac{1}{3} Op$ ; el del triángulo  $BCO$  será igual al

engendrado por OCU, ménos el engendrado por OBU, ó lo que es lo mismo,  $\text{vol. BCO} = \text{vol. UCO} - \text{vol. UBO} =$

$$\text{sup. UC} \times \frac{1}{3} \text{Om} - \text{sup. BU} \times \frac{1}{3} \text{Om} = \\ \frac{1}{3} \text{Om} \times (\text{sup. UC} - \text{sup. BU}) = \frac{1}{3} \text{Om} \times \text{sup. BC}.$$

Del mismo modo se continuaría prolongando lados, si hubiese mas, hasta llegar al cuerpo engendrado por OCq, cuyo volúmen (425) es,  $\text{vol. OCq} = \text{sup. Cq} \times \frac{1}{3} \text{Op}.$

Sumando todos estos volúmenes parciales, y observando que  $\text{Op} = \text{Om} = \text{Oq} = \text{etc.}$  se tendrá volúmen engendrado por ABCq =

$$\text{sup. AB} \times \frac{1}{3} \text{Op} + \text{sup. BC} \times \frac{1}{3} \text{Op} + \text{sup. Cq} \times \frac{1}{3} \text{Op} = \\ (\text{sup. AB} + \text{sup. BC} + \text{sup. Cq}) \times \frac{1}{3} \text{Op} = \text{sup. ABCq} \times \frac{1}{3} \text{Op}$$

Este es el volúmen del semicuerpo engendrado por ABCD etc.; por lo que, duplicando el factor  $\text{sup. ABCq}$ , se tendrá el volúmen engendrado por todo el polígono, que será

$\text{vol. ABCDEF} = 2 \text{sup. ABCq} \times \frac{1}{3} \text{Op} = \text{sup. ABCDEF} \times \frac{1}{3} \text{Op}$ ,  
que es L. 2.º Q. D. D.

427 Si el polígono estuviese circunscrito al círculo, *su volúmen sería igual á la superficie del cuerpo multiplicado por la tercera parte del radio de dicho círculo.*

428 Se llama *esfera* un cuerpo terminado por una superficie curva, cuyos puntos están todos á igual distancia de uno que se llama *centro*.

La esfera se puede concebir engendrada por el movimiento de un semicírculo DAEK (fig. 139) al girar al rededor del diámetro DK; pues cada punto de la superficie de este cuerpo se habrá originado de uno del semicírculo generador, que dista del centro una magnitud igual al radio de dicho semicírculo.

El diámetro DK, al rededor del cual ha girado el semicírculo generador, se llama *eje* de la esfera; los extremos D y K del eje, se llaman *polos*; y *radio* de la esfera es una recta que desde el centro va á terminar á su superficie.

429 El cuerpo DABC, que se origina de la revolución del sector de círculo DCA, se llama *sector esférico*, el cual se compone de la parte DAMFBM', que se llama *casquete esférico*; y del cono CAMFBM': se llama *zona* una parte de la superficie de la esfera comprendida por dos planos paralelos, que se llaman *bases de la zona*.

430 Teor. *Toda seccion de la esfera por un plano es un círculo.*

*Dem.* Sea AMFBM' la seccion causada por un plano en la esfera: desde el centro C concibase la perpendicular CO al plano AMB, y diferentes rectas CM, CM', etc. á diferentes puntos de la curva AMB en que termina la seccion, y se tendrá que las oblicuas CM, CM', CB, son iguales por radios de la esfera; y por lo mismo la curva AMFBM' tiene todos sus puntos equidistantes del O, luego es un círculo.

Cor. 1.º *Si la seccion pasa por el centro de la esfera, su radio será el de la esfera; y por lo mismo todos los círculos que resulten de planos que pasen por el centro serán iguales.*

Estos se llaman *círculos máximos*, y los que no pasan por el centro se llaman *círculos menores*.

Cor. 2.º *Dos círculos máximos se dividen siempre en dos partes iguales; porque su comun interseccion es un diámetro.*

Cor. 3.º *Todo círculo máximo divide á la esfera y á su superficie en dos partes iguales, que se llaman hemisferios; porque si despues de haber separado dichas dos partes, se las aplica sobre la base comun, las dos superficies coincidirán la una con la otra, por consiguiente serán iguales.*

Cor. 4.º *Toda seccion que no pase por el centro será un círculo menor.*

Cor. 5.º *Los círculos menores van siendo mas pequeños á medida que se alejan del centro.*

Cor. 6.º *Por dos puntos de la superficie de la esfera se puede hacer pasar un arco de círculo máximo; porque los dos puntos dados y el centro determinan la posicion de un plano.*

Sin embargo, si los dos puntos fuesen los extremos de un diámetro, entónces estos dos puntos y el centro estarían en línea recta, y habría tantos círculos máximos como se quisiesen (365).

431 Teor. *Si en el semicírculo de que se origina la esfera, se inscribe un semipolígono regular, se le circunscribe otro, y se concibe que giren estos semipolígonos al mismo tiempo que el semicírculo, se tendrá un cuerpo inscri-*

to, y otro circunscrito; y la superficie de la esfera será mayor que la del cuerpo inscrito; y menor que la del circunscrito; y la diferencia entre la superficie del circunscrito y del inscrito podrá ser menor que cualquier cantidad dada.

*Espl.* Sea *s. c.* la superficie del cuerpo descrito por el polígono inscrito ABCD etc. (fig. 138), *r* su radio Op, *D* el diámetro AF de la esfera ó del círculo generador; sea *S. C.* la superficie del cuerpo descrito por el polígono circunscrito, cuyo lado es GL, su radio recto ó del círculo generador *R*; al eje GK le llamaremos *H*; y sea *S. E.* la superficie de la esfera descrita por el semicírculo ABCDEF; digo que se tendrá *S.E.* > *s.c.*, *S.E.* < *S.C.*, y *S.C.* — *s.c.* podrá ser menor que cualquier cantidad dada.

*Dem.* 1.º Por lo dicho (426, 1.º) se tiene *s.c.* = *circunf. r × D* (m); ahora, si aumenta el número de lados crecerá el (343) factor *circunf. r*, pues que crecerá el radio *r*; el factor *D* permanecerá el mismo; luego deberá crecer (61, 3.º) también *s.c.* ó la superficie del cuerpo inscrito, á medida que aumenta el número de lados del polígono generador; y como la superficie del cuerpo originado por el polígono de mas lados, tendrá mas circunferencias comunes con la superficie de la esfera, y ademas dicha superficie se hallará entre la del cuerpo originado por el polígono de ménos lados, y la de la esfera, resulta que *S.C.* es una variable, que al paso que crece, se acerca á la superficie de la esfera que es constante; luego (227) esta es mayor que aquella, ó *S.E.* > *s.c.*, que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Igualmente se tendrá *S.C.* = *circunf. R × H* (n), pero aumentando el número de lados, disminuirá (344) el factor *H*, que se compone del diámetro *D* del círculo generador, y de las dos sajititas del polígono circunscrito; el factor *circunf. R* es constante, por ser *R* el radio del círculo generador; luego (61, 3.º) disminuirá *S.C.*; y como, al paso que mengua, se acerca á la superficie de la esfera, por tener mas circunferencias comunes con ella, y estar dicha superficie entre la del cuerpo engendrado por el polígono de ménos lados, y la de la esfera, se sigue (228) que *S.E.* < *S.C.*, que es L. 2.º Q. D. D.

3.º Restando la ecuacion (m) de la (n), resultará *S.C.* — *s.c.* = *circunf. R × H* — *circunf. r × D*; pero *circunf. r* se puede acercar todo lo que se quiera á *circunf. R*, pues (343) lo puede

hacer  $r$  á  $\bar{R}$ , y  $H$  se puede acercar (344) todo lo que se quiera á  $D$ ; luego si la diferencia entre los factores circunf. $R$ ,  $H$ , y circunf. $r$ ,  $D$ , puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, la de sus productos, y de consiguiente la diferencia  $S.C.-s.c.$  tambien (esc. 3.º § 231) lo podrá llegar á ser. L. 3.º Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir á la esfera un cuerpo tal, que la diferencia entre cualquiera de sus superficies y la de la esfera sea menor que cualquier cantidad dada.

432 Teor. La superficie de la esfera es igual á la circunferencia de un círculo máximo multiplicada por el diámetro.

*Dem.* Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá respecto del cuerpo circunscrito  $S.C.=\text{circunf.}R \times H$ ; pero, al paso que aumenta el número de lados del polígono, disminuye  $S.C.$ , y se va acercando á  $S.E.$  de modo que su diferencia (431 cor.) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; y como al mismo tiempo el producto circunf. $R \times H$  se acerca á circunf. $R \times D$ , pues  $H$  se acerca (344) á  $D$  y circunf. $R$  es comun, resulta que las dos cantidades variables  $S.C.$  y circunf. $R \times H$ , siendo siempre iguales, se pueden acercar respectivamente á las dos constantes  $S.E.$  y circunf. $R \times D$ ; luego (231 cor.) estas son iguales, ó se tiene  $S.E.=\text{circunf.}R \times D$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Si en vez de circunf. $R$  se sustituye su valor (347), será  $S.E.=2\pi R \times D=\pi \times 2R \times D=\pi \times D \times D=\pi D^2$ ; que es la fórmula general que da todas las que tienen relacion con la superficie de la esfera.

433 Como la superficie de un círculo máximo de la esfera será  $\pi R^2$ , y  $D^2=(2R)^2=4R^2$ , se sigue que la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos.

434 Teor. A toda esfera se pueden inscribir y circunscribir dos cuerpos, tales, que la diferencia entre sus volúmenes sea menor que cualquier cantidad dada.

*Espl.* Sean ahora  $V.C., v.c.$  los volúmenes de dos cuerpos, circunscrito é inscrito á la esfera;  $S.C., s.c.$ , sus superficies;  $R, r$ , los radios rectos de los polígonos generadores; y digo que la diferencia  $V.C.-v.c.$  puede ser menor que cualquier cantidad dada.

*Dem.* Por lo dicho (426) se tiene  $V.C. = S.C. \times \frac{1}{3}R$ ,  
 $v.c. = s.c. \times \frac{1}{3}r$ ; y restando será  $V.C. - v.c. = S.C. \times \frac{1}{3}R - s.c. \times \frac{1}{3}r$ ;  
 y como la diferencia entre los factores puede ser (431 y 344),  
 respectivamente menor que cualquier cantidad dada, resulta que  
 lo mismo sucederá á los productos (esc. 3.º § 231), y de consi-  
 guiente á  $V.C. - v.c.$ , cuyo valor espresa L. Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá circunscribir, ó  
 inscribir en la esfera un cuerpo tal, que la diferencia en-  
 tre su volúmen y el de la esfera sea menor que cualquier  
 cantidad dada por pequeña que sea.

435 Teor. El volúmen de la esfera V.E. es igual á  
 su superficie S.E. multiplicada por el tercio del radio  
 R, ó  $V.E. = S.E. \times \frac{1}{3}R$ .

*Dem.* Conservando las mismas denominaciones de ántes, se  
 tendrá  $V.C. = S.C. \times \frac{1}{3}R$ ; pero al paso que crece el número de  
 lados del polígono generador va acercándose V.C. á V.E.; de  
 modo que su diferencia puede ser menor que cualquier cantidad  
 dada (434 cor.); y como al mismo tiempo la espresion de V.C.,  
 esto es  $S.C. \times \frac{1}{3}R$ , se va acercando á  $S.E. \times \frac{1}{3}R$  todo lo que se  
 quiera (229 cor. 3.º) por hacerlo S.C. á S.E. (431 cor.), y ser  
 comun  $\frac{1}{3}R$ , resulta que las dos cantidades variables V.C. y  
 $S.C. \times \frac{1}{3}R$ , siendo siempre iguales, se pueden acercar todo lo que  
 se quiera á las dos constantes V.E. y  $S.E. \times \frac{1}{3}R$ ; luego (231 cor.)  
 estas son iguales, y se tiene  $V.E. = S.E. \times \frac{1}{3}R$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Sustituyendo en vez de S.E. su valor (432 cor.), será

$$V.E. = \pi D^2 \times \frac{1}{3}R = \pi D^2 \times \frac{1}{6}D = \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{1}{6} \times 3,14159 \text{ etc.} \times D^3 \dots\dots \\ = 0,523595 \times D^3,$$

que es la fórmula de donde se sacan todas las que tie-  
 nen relacion con el volúmen de la esfera.

*Esc.* 1.º Sustituyendo 2R en vez de D, el volú-  
 men de la esfera será  $V.E. = \pi(2R)^2 \times \frac{1}{3}R = 4\pi \times \frac{1}{3}R^3$ , y  
 el del hemisferio EKG (fig. 139), que llamaremos H, será  
 $H = 2\pi \times \frac{1}{3}R^3$ . Ahora, si concebimos el cilindro ELPG  
 circunscrito á la semiesfera, su volúmen, llamándole G,  
 será (§ 414 cor.)  $G = \pi R^3$ .

Restando de esta ecuacion la anterior, el residuo repre-  
 sentará la porcion de cilindro circunscrito ELTPGKZSQ,  
 cuyo volúmen tendrá por espresion

$$G - H = \pi R^3 - 2\pi \times \frac{1}{3}R^3 = (1 - \frac{2}{3})\pi R^3 = \pi \times \frac{1}{3}R^3.$$

*Esc. 2.ª* Ahora podríamos comparar las espresiones de las superficies y volúmenes de todos los cuerpos que hemos dado á conocer, y determinar la razon en que estaban; pero solo lo harémos con los que se llaman *semejantes*, que son *aquellos que están terminados por un mismo número de caras semejantes: y cuyos ángulos sólidos homólogos son iguales en número y en cantidad*. Sean  $V, v$ , los volúmenes de dos cuerpos semejantes;  $A, B, C$ , las tres dimensiones que constituyen al primero, y  $a, b, c$ , las del segundo; y tendremos  $V=ABC$ ,  $v=abc$ , y formando proporcion será  $V:v::ABC:abc$ ; y como por ser semejantes, todas sus dimensiones han de ser proporcionales, sustituyendo (189) en vez de  $B, C$  y  $b, c$ , sus proporcionales  $A, a$ , se tendrá  $V:v::A^3:a^3$ ; que manifiesta, que *los volúmenes de dos cuerpos semejantes son como los cubos de sus dimensiones homólogas*.

---

# TRIGONOMETRÍA

## RECTILÍNEA.

---

436 **S**E llama *Trigonometría* la ciencia que trata de la resolucion de los triángulos. Cuando el triángulo que se ha de resolver es rectilíneo, la *Trigonometría* se llama *plana ó rectilínea*; y cuando está formado sobre la superficie de una esfera por arcos de círculos máximos, se llama *Trigonometría esférica*.

En todo triángulo hay seis cosas que considerar, á saber, tres lados, y tres ángulos; tres de estos datos determinan un triángulo (con tal que en los rectilíneos en-

tre un lado), y por lo mismo el objeto de la Trigonometría es resolver este problema general:

*Dadas tres de las seis cosas de que consta un triángulo, hallar las otras tres; estos datos bien combinados, ofrecen los seis casos siguientes para la resolución de los triángulos.*

I. *Dados los tres lados, hallar los tres ángulos.*

II. *Dados dos lados y el ángulo comprendido, hallar el otro lado y los dos ángulos.*

III. *Dado un lado y los ángulos adyacentes, hallar el otro ángulo y los dos lados.*

IV. *Dados dos ángulos y un lado opuesto á uno de ellos, hallar los otros dos lados y el tercer ángulo.*

V. *Dados dos lados, y el ángulo opuesto á uno de ellos, hallar el otro lado y los dos ángulos.*

VI. *Dados los tres ángulos, hallar los tres lados.*

437 Los tres primeros son los de la igualdad de los triángulos; y como el cuarto es lo mismo que el tercero, porque dados dos ángulos se conoce el otro (289 cor. 1.<sup>o</sup>), resulta que en los cuatro primeros casos siempre se puede resolver el triángulo.

438 En el quinto se pueden dar dos soluciones cuando el ángulo conocido es el opuesto al lado menor; porque los datos pueden corresponder á dos triángulos, como manifiesta la (fig. 140) en que los dos triángulos ABC, BDC tienen los mismos datos, á saber, comun el lado BC y el ángulo en C, y el lado  $AB=BD$ .

439 El sexto caso es de todo punto indeterminado en los triángulos rectilíneos; porque los datos pueden corresponder á cuantos triángulos se quieran; pues tirando las  $bc, b'c'$ , paralelas á BC (fig. 141), los triángulos ABC,  $Abc, Ab'c'$ , y otros muchísimos que se podrían formar, todos son equiángulos, y por consiguiente tienen los mismos datos. Pero como en este caso los triángulos son semejantes (331) y tienen sus lados proporcionales, la Trigonometría manifiesta de un modo general la relacion que tienen entre sí.

440 Para fijar esta relacion, y que quede determinada, cuando se conoce uno de los lados, se ha inventado un conjunto ó sistema de líneas, que se llaman *lineas tri-*

gonométricas; las cuales están dotadas de dos propiedades importantes: 1.<sup>a</sup> Que con su magnitud y signo determinan la magnitud absoluta de un arco, y de consiguiente la del ángulo de que es medida; y 2.<sup>a</sup> que dichas líneas son proporcionales con los lados de los triángulos.

441 Para darlas á conocer, consideremos un arco cualquiera  $AB$  (fig. 142), que teniendo su principio ú origen en  $A$ , vaya á terminar en cualquier punto  $B$  de la circunferencia; y lo que se diga de este arco se deberá entender del ángulo  $ACB$  de que es medida. Esto supuesto, se llama *seno recto* ó *seno* de un arco, la perpendicular tirada desde uno de sus extremos al radio ó diámetro que pasa por el otro extremo; así,  $BD$  es el seno del arco  $AB$ . La parte  $AD$  del radio ó diámetro interceptada entre el principio  $A$  del arco y el pie  $D$  del seno, se llama *senoverso* del mismo arco  $AB$ . Si en el principio  $A$  del arco se tira la tangente indefinida  $Ae$ , y se prolonga el radio  $CB$  hasta encontrarla en  $E$ , la parte  $AE$  se llama *tangente trigonométrica* ó *tangente* del arco  $AB$ , y el radio  $CB$  prolongado hasta encontrar á la tangente, esto es, la  $CE$ , se llama *secante* del mismo arco; de manera que la tangente y secante se terminan mutuamente la una á la otra. Así, se dice que la *tangente trigonométrica* de un arco es la parte de la tangente geométrica tirada en uno de sus extremos, hasta encontrar al radio que pasa por el otro extremo; y *secante* es el radio prolongado que pasa por un extremo, hasta encontrar á la tangente tirada en el otro extremo. Donde se ve que todo arco tiene cuatro líneas: un *seno*, un *senoverso*, una *tangente* y una *secante*.

442 Si consideramos ahora el arco  $BF$ , la  $BH$  será su *seno*,  $FH$  su *senoverso*,  $FG$  su *tangente*, y  $CG$  su *secante*; y suponiendo que  $ABF$  sea un cuadrante,  $BF$  será complemento de  $AB$ , y las líneas  $BH$ ,  $FH$ ,  $FG$ ,  $CG$ , serán las líneas del complemento de  $AB$ . En muchas ocasiones se hace uso de estas, refiriéndolas todas al arco primitivo; por lo cual á cada arco corresponden ocho líneas trigonométricas: cuatro, propiamente suyas, y cuatro de su complemento, á saber: *seno*, *senoverso*, *tangente* y *secante*, y las del complemento, que se espresan por

coseno, cosenoverso, cotangente y cosecante. Para introducir estas líneas en los cálculos, solo se escriben las letras indispensables para que no se confundan unas con otras; así, solo se pone *sen.*, *sen. ver.*, *tang.*, *sec.*, *cos.*, *cos.ver.*, *cot.*, y *cosec.*

Cor. 1.º Como  $BH=CD$ , por lados opuestos del rectángulo DCHB, se sigue que CD también será el coseno de AB, y por lo mismo en tirando el seno de un arco, la parte interceptada entre su pie y el centro es el coseno de dicho arco.

Cor. 2.º Luego si espresamos en términos trigonométricos la proporción (333, 1ª), dirá: que el senoverso de un arco ó de un ángulo es á su seno, como el mismo seno es á la suma del radio y del coseno del mismo ángulo.

443 Teor. El seno de un arco es la mitad de la cuerda de un arco dúplo.

Dem. Porque si prolongamos el seno BD hasta que vuelva á encontrar á la circunferencia por abajo en el punto S, tendremos que por ser CA perpendicular á BS, la dividirá (293) en dos partes iguales en D, y también (294) al arco BAS; por consiguiente  $\text{sen.}AB=BD=\frac{1}{2}BS=\frac{1}{2}\text{cuerda}BAS=\frac{1}{2}\text{cuerda}2AB$ , que era L. Q. D. D.

Cor. Como (290) la mayor cuerda de un círculo es el diámetro, resulta que su mitad, que es el seno de un cuadrante, ó el radio es el mayor seno que se puede considerar.

444 Teor. Conocido el radio de un círculo se conoce el valor absoluto de tres líneas trigonométricas, á saber: el seno de un cuadrante, que es el mismo radio; la tangente de  $45^\circ$ , que también es igual al radio; y el seno de  $30^\circ$  que es igual á la mitad del radio.

Dem 1.º Está fundado en lo que se acaba de demostrar (443 cor.).

2.º Si se supone el arco AB ó el ángulo ACB de  $45^\circ$ ; el AEC valdrá también  $45^\circ$ ; luego el triángulo EAC es isósceles y da  $AE=AC$ , ó  $\text{tang.}45^\circ=R$ .

3.º Si el arco AB fuese de  $30^\circ$ , su duplo BAS valdría  $60^\circ$ , y la cuerda BS sería lado de exágono regular que es (317 cor. 8.º) igual al radio R; luego su mitad BD ó  $\text{sen.}30^\circ=\frac{1}{2}R$ , que es L. Q. D. D.

445 Teor. Dado el seno de un arco y el radio, se

pueden determinar en valores suyos todas las demás líneas trigonométricas.

Dem. El triángulo BDC rectángulo en D, dará (33<sup>a</sup> cor.)  $BD^2 + DC^2 = BC^2$  ó  $\text{sen.}^2 + \text{cos.}^2 = R^2$  (a); y  $DC = \sqrt{BC^2 - BD^2}$  (b); y sustituyendo sus valores, será  $\text{cos.} = \sqrt{R^2 - \text{sen.}^2}$  (c).

Haciendo  $R=1$ , las ecuaciones de arriba se convierten en  $\text{sen.}^2 + \text{cos.}^2 = 1$  (d),  $\text{cos.} = \sqrt{1 - \text{sen.}^2}$  (e).

Ahora, por ser AE también perpendicular á AC, las BD, y AE serán paralelas, y los triángulos semejantes AEC, BDC darán

$$DC:AC::BD:AE::BC:EC; \text{ ó } \text{cos.}:1::\text{sen.}: \text{tang.}::1:\text{sec.}$$

Donde despejando la tangente y la secante, refiriéndonos á la primera razon, se tendrá

$$\text{tan.} = \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}} = (e) \frac{\text{sen.}}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}} \quad (f),$$

$$\text{sec.} = \frac{1 \times 1}{\text{cos.}} = \frac{1}{\text{cos.}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}} \quad (g).$$

Los triángulos BDC, GFC también son semejantes, por ser ambos rectángulos, el uno en D y el otro en F, y tener además el ángulo  $DBC = GCF$  por alternos internos entre las paralelas BD, FC, siendo GC la secante; luego darán  $BD:CF::DC:FG::BC:CG$ , ó  $\text{sen.}:1::\text{cos.}:\text{cot.}::1:\text{cosec.}$

$$\text{De donde sale } \text{cot.} = \frac{\text{cos.}}{\text{sen.}} = (e) \frac{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}}{\text{sen.}} \quad (h),$$

$$\text{y } \text{cosec.} = \frac{1 \times 1}{\text{sen.}} = \frac{1}{\text{sen.}} \quad (i).$$

Las ecuaciones (e), (f), (g), (h), (i), manifiestan que todas estas líneas trigonométricas dependen del seno y del radio: y como lo mismo se podría obtener respecto del senoverso y del cosenoverso, resulta L. Q. D. D.

Esc. Es muy conveniente encomendar á la memoria

las fórmulas  $\text{tang.} = \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}}$ ,  $\text{sec.} = \frac{1}{\text{cos.}}$ ,  $\text{cot.} = \frac{\text{cos.}}{\text{sen.}}$ ,  
 y  $\text{cosec.} = \frac{1}{\text{sen.}}$ , por las muchísimas transformaciones

de que son susceptibles, y que cada una da un valor particular para la línea que se despeja. Además, debe observarse que el triángulo rectángulo CAE da  $AC^2 = EC^2 - AE^2$ , ó  $1 = \text{sec.}^2 - \text{tang.}^2$ , que también da

$\text{sec.}^2 = 1 + \text{tang.}^2$ ; y como de la (ec. g) se saca  $\text{cos.} = \frac{1}{\text{sec.}}$ ,

será  $\text{cos.}^2 = \frac{1}{\text{sec.}^2} = \frac{1}{1 + \text{tang.}^2}$ .

Si en cualquiera de estas fórmulas, quisiésemos restablecer el radio, que ha desaparecido por el supuesto de hacerle igual con la unidad, y que se refieran á un radio cualquiera, que espresarémos por R, lo conseguiríamos sin mas que hacer homogénea la ecuacion; es decir, que pues una de estas espresiones trigonométricas representa siempre una *línea*, en su valor debe haber solo una dimension, y tener una forma homogénea; y si le falta alguno de estos requisitos es por haber desaparecido el radio por el supuesto de hacerle igual con 1. Luego, solo con introducir la letra R donde y como convenga para restablecer la homogeneidad en toda la ecuacion, conseguiremos nuestro objeto.

Elijamos por ejemplo la ecuacion (g)

$$\text{sec.} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}}$$

Aquí vemos, que el primer término de lo que hay debajo del radical en el denominador, no tiene ninguna dimension; y el segundo, que es  $\text{sen.}^2$ , tiene dos dimensiones; luego para que el denominador sea homogéneo, deberá tener dos dimensiones su primer término; por lo que introduciendo la letra R, elevada á la segunda potencia en el primer término del espresado denominador se nos convertirá este en  $\sqrt{R^2 - \text{sen.}^2}$ ; y como el sig-

no radical reduce á la mitad las dimensiones de lo que hay debajo, resulta que en el denominador hay solo una dimension; y para que la espresion tenga una dimension, deberá haber (107) dos dimensiones en el numerador; luego introduciendo  $R^2$ , en este, se nos convertirá la

$$\text{ecuacion (g) en } \sec. = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - \text{sen.}^2}}.$$

Para convencernos de la exactitud de este procedimiento, observaremos, que si en vez de suponer AC y BC iguales con 1 en la série de razones iguales DC:AC::BD:AE::BC:EC, las hubiéramos espresado por R, inicial de radio, hubiéramos tenido

$$\text{cos.:R::sen.:tang.:R:sec.};$$

y tomando la 1ª y última razon, se tendría

$$\text{cos.:R::R:sec.} = \frac{R^2}{\text{cos.}};$$

y sustituyendo en vez de cos. su valor (ec. c), se tendría

$$\text{sec.} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - \text{sen.}^2}};$$

que es la misma que acabamos de sacar por el método de la homogeneidad.

446 Entendido esto, para determinar las alteraciones que corresponden á las líneas de un arco, por las que puedan sobrevenir al mismo arco, y manifestar la generalidad de las fórmulas halladas, y su conformidad con sus definiciones y construcciones geométricas, prescindiremos del seno verso y coseno verso de que no se hace uso, y principiaremos fijando las ideas del modo siguiente.

Sea A el principio ú origen de todos los arcos que vamos á considerar; y todos los arcos que se cuenten desde A hácia B, F, etc. serán positivos, y todos los que se cuenten desde A hácia S, Y, serán negativos. Sea LAe una tangente indefinida, donde se han de contar todas las tangentes, llamando positivas las que se cuenten desde A para arriba, y negativas las contrarias; sea GFV una cotangente indefinida, donde se han de contar todas las cotangentes, llamando positivas las que se cuenten á la izquierda del punto F, por ser las primeras que hemos considerado, y negativas las que se cuenten á la derecha; sea AP el diámetro

sobre que se han de tirar perpendiculares todos los senos, llamando positivos los que estén por la parte de arriba, y negativos los que estén por la parte de abajo; sea este mismo diámetro donde se han de contar los cosenos, llamando positivos los que estén á la izquierda, y negativos los que estén á la derecha del centro C; y como las secantes y cosecantes varían de direccion á cada arco, sin que haya línea ni punto fijo en que se puedan contar, solo las llamaremos negativas cuando no cumplan exactamente con su definicion; ó lo que es lo mismo, cuando no sea el radio que pasa por el otro extremo del arco el que encuentra á la tangente, sinó el radio que está en direccion opuesta.

Sentado esto, si el arco AB crece y se convierte en ABb, su seno bd será mayor que BD; porque á mayor arco bAt corresponderá mayor cuerda que á BAS, esto es,  $bt > BS$ ; luego  $\frac{1}{2}bt > \frac{1}{2}BS$ , ó  $\text{sen.}ABb > \text{sen.}AB$ .

El coseno Cd será menor que el CD del primero, porque es parte respecto de él. La tangente Ae será mayor que la AE del primero; porque como la ha de determinar la secante Cb, y esta pasa por fuera de la CE, la irá á encontrar mas arriba (ó por fuera) del punto E. La secante Ce ha de ser mayor que la CE, por separarse mas de la perpendicular CA. La cotangente Fg debe ser menor que FG, porque debiéndola terminar el radio Cb prolongado, y estando este entre CG y CF, deberá encontrar á la FG ántes del punto G. La cosecante Cg debe ser menor que la CG; porque se separa ménos de la perpendicular CF. Luego cuando crece un arco sin llegar al cuadrante, crecen sus líneas y menguan sus colineas.

Esto mismo lo confirman las fórmulas (445) que espresan sus valores.

447 Si el arco ABb continúa creciendo, y se convierte en el cuadrante ABF, entónces de las seis líneas trigonométricas, dos son iguales con cero, á saber, el coseno y la cotangente; dos con el radio, á saber, el seno y la cosecante; y dos infinitas, á saber, la tangente y la secante.

En efecto, el coseno se reduce á cero; porque habiéndose confundido el extremo del arco con el radio CF, no hay distancia ninguna entre el pie del seno y el centro. La cotangente lo hace igualmente, porque ha de ser la parte de la tangente geométrica levantada en el punto F, y comprendida entre dicho punto y el parage en que la encuentre el radio que pasa por F; luego para encontrar á dicho radio no necesita salir ni separarse de

punto F, y por lo mismo se reducirá á cero dicha cotangente.

Siendo el seno entónce la mitad de la cuerda de  $180^\circ$  ó  $\pi$ , que es el diámetro, se convierte en el radio. La cosecante es tambien igual al radio; porque la cosecante es el radio prolongado hasta que encuentre á la cotangente, que se ha reducido al punto F; luego no se debe prolongar nada dicho radio para encontrar á la cotangente.

Finalmente, la secante y tangente son infinitas; porque siendo ABF un cuadrante, la FC es perpendicular á AC; y siéndolo tambien la AE, resulta que estas dos líneas son paralelas, y no se pueden encontrar; luego serán infinitas.

Todo esto lo dan á conocer tambien las fórmulas halladas (§ 445), como cualquiera puede comprobarlo.

448 Sea ahora el arco AFM; y se tendrá su seno MN *positivo*, su coseno NC *negativo*, su tangente AL *negativa*, y su secante CL *negativa*. Porque la tangente cae por la parte de abajo del punto A, y la secante en vez de ser el radio CM prolongado hácia Q, es al contrario prolongado desde C hácia L. Para deducir sus valores negativos, como deben ser, consideraremos los triángulos semejantes CNM, CAL, que dan  $CN:CA::NM:AL::CM:CL$ , ó  $-\cos.:1::\text{sen.:tang.}::1:\text{sec.}$

de donde sale  $\text{tang.} = -\frac{\text{sen.}}{\text{cos.}}$ , y  $\text{sec.} = -\frac{1}{\text{cos.}}$ .

La cotangente FV es *negativa*, y la cosecante CV es *positiva*; la cotangente es negativa, porque va desde F hácia la derecha; y la cosecante es positiva, porque siendo la secante del complemento, es exactamente el radio prolongado que pasa por el extremo del arco hasta encontrar á la cotangente.

Comparando los lados de los triángulos semejantes CMN, CFV, se obtienen estos mismos resultados.

449 Supongamos que continúa el arco creciendo; y se convierte en AFP; y se tendrá su seno = 0, su cos. = -1, su tangente = -0, su sec. = -1; su cotangente FV y su cosecante CP, prolongadas llegan á ser paralelas, y por consiguiente son infinitas.

450 Sea ahora el arco AFPZ, y se tendrá su seno ZN *negativo*; su coseno CN *negativo*; su tangente AE *positiva*; su secante CE *negativa* (porque en vez de ser

el radio CZ prolongado hácia X, es el mismo radio prolongado hácia la parte opuesta); su cotangente FG es *positiva*; y su cosecante CG (que son las líneas del complemento FPZ del arco que consideramos) es *negativa*; la primera por ir desde F hácia la izquierda; y la segunda, porque en vez de ser el radio CZ prolongado hácia X, lo está al contrario.

Sus valores se deducen de los triángulos semejantes CNZ, CAE, y de los CNZ, CGF.

451 Supongamos ahora que el arco llega á ser los tres cuadrantes, esto es, AFPY; y tendrémolos su seno CY *negativo*  $\hat{=}$   $-1$ ; su coseno, que se reduce al punto C, será  $=0$ ; su tangente AE llega á ser  $=\infty$ ; y su secante CE  $=-\infty$  (porque vienen á ser paralelas); su cotangente se reduce al punto F, y por consiguiente es  $=0$ ; y su cosecante se reduce al radio CF *negativo*, ó  $=-1$ .

452 Sea ahora el arco AFPYS el que vamos á considerar, y tendrémolos su seno SD *negativo*; su coseno CD *positivo*; su tangente AL *negativa*; su secante CL *positiva*; su cotangente FV *negativa*; y su cosecante CV igualmente *negativa*.

Para deducir sus valores se consideran los triángulos semejantes CDS, CAL, y los CDS, CFV.

453 Supongamos ahora que el arco llega á ser toda la circunferencia; y tendrá su seno  $=-0$ ; su coseno  $=1$ ; su tangente  $=-0$ ; su secante  $=1$ ; su cot.  $=-\infty$ ; su cosec.  $=-\infty$ .

454 Si el arco continuase creciendo, se tendrían los mismos valores que ántes, con sólo añadir una, dos ó mas circunferencias á cada arco de los que acabamos de considerar.

455 Supongamos ahora que el arco AB, en vez de ir creciendo, va menguando (con lo cual menguarán sus líneas y crecerán sus colíneas) hasta llegar á cero, y tendrémolos: su seno  $=0$ ; su coseno  $=1$ ; su tangente  $=0$ ; su secante  $=1$ ; su cotangente  $=\infty$ ; y su cosec.  $=\infty$ . Donde es digno de notarse que todas las líneas de un arco *cero* son las mismas que las de la circunferencia entera; pero se diferencian en posición, escepto el coseno y la secante.

456 Supongamos ahora que el arco continúa menguando todavía, ó por mejor decir, que crece en un sentido opuesto al de ántes, y se llega á convertir en AS, y tendremos su seno SD *negativo*; su coseno CD *positivo*; su tangente AL *negativa*; su secante CL *positiva*; su cotangente FV *negativa*; y su cosecante CV tambien *negativa*.

La cotangente del arco negativo AS será la tangente del complemento de dicho arco; pero el complemento de un arco negativo debe ser este mismo arco mas un cuadrante; luego el complemento de que tratamos es todo el arco SAF; y como la tangente de este arco es la FV negativa, y su secante es la CV tambien negativa, resulta que la tangente y cosecante del arco negativo son negativas.

Luego cuando un arco pasa de positivo á negativo, solo varían de signo el seno, tangente, cotangente y cosecante; y permanecen las mismas la secante y el coseno.

457 Todo lo espuesto manifiesta la perfecta conformidad de las fórmulas de las líneas trigonométricas con su misma definicion y construccion geométrica; y se deduce que como todas las líneas vienen espresadas en el seno y el coseno, en sabiendo los valores absolutos y signos de estos, se hará la sustitucion conveniente, y se tendrán los valores y signos de todas las demas líneas trigonométricas.

458 Para hacer esta sustitucion con facilidad, conviene tener bien presente que en el primer cuadrante, que se considere, se tienen *senos y cosenos positivos*; en el 2.<sup>o</sup> *senos positivos y cosenos negativos*; en el 3.<sup>o</sup> *senos y cosenos negativos*; y en el 4.<sup>o</sup> *senos negativos y cosenos positivos*.

459 Consideremos ahora dos arcos AFM, PM, que el uno tenga su origen en A, y el otro en P, y que sean el uno suplemento del otro, ó entre los dos valgan la semicircunferencia, y tendremos que el seno MN conviene en un todo á ambos arcos. El coseno MT ó CN es tambien el mismo en magnitud para los dos arcos AFM, MP; pero se diferencian en posicion, pues res-

pecto del AFM se cuenta desde el pie N del seno hácia el principio A del arco, y en el MP se cuenta desde el pie del seno hácia la parte opuesta del principio P del arco MP. La cotangente FV conviene en magnitud á los dos arcos AFM, MP, pero se diferencian en posicion, por razones análogas á las anteriores. Los triángulos CAL, CPQ, por tener  $CA=CP$ , los ángulos en C iguales por opuestos al vértice, y los en A y P por rectos, son iguales (261), y dan  $AL=PQ$ ,  $CL=CQ$ ; lo que manifiesta que la tangente y secante del arco AFM son iguales en magnitud á las del arco PM; pero ambas se diferencian en posicion, porque la tangente AL del primero se cuenta en un sentido opuesto á aquel en que se ha contado el arco; y la PQ del segundo se cuenta en el mismo sentido que su arco. La secante CL del arco AFM, en vez de ser el radio prolongado que pasa por el extremo M del arco, es la prolongacion de este radio en un sentido opuesto; la secante CQ del arco PM es positiva; porque cumple exactamente con su definicion. Esto mismo sucede á la cosecante CV, y de consiguiente conviene en magnitud y posicion á ambos arcos. De donde resulta, que *las líneas de un arco son las mismas en magnitud que las de su suplemento; pero se diferencian en posicion, excepto el seno y la cosecante, que convienen en todo á ambos arcos.*

*Cor. gener.* De toda la doctrina espuesta se deduce, que si espresamos por  $\frac{1}{2}\pi$  el cuadrante ABF y por  $m$  el arco BF, será

$$\text{sen.}AB = \text{sen.}(ABF - BF) = \text{sen.}(\frac{1}{2}\pi - m) = BD = \text{cos.}m,$$

$$\text{y } \text{cos.}AB = \text{cos.}(\frac{1}{2}\pi - m) = BH = \text{sen.}m.$$

Si se hace  $FM = m$ , será

$$\text{sen.}AFM = \text{sen.}(\frac{1}{2}\pi + m) = MN = \text{cos.}m,$$

$$\text{y } \text{cos.}AFM = \text{cos.}(\frac{1}{2}\pi + m) = -CN = -\text{sen.}m.$$

Y si hacemos  $PM = m$ , será

$$\text{sen.}AFM = \text{sen.}(AFP - PM) = \text{sen.}(\pi - m) = MN = \text{sen.}m;$$

$$\text{y } \text{cos.}AFM = \text{cos.}(\pi - m) = -CN = -\text{cos.}m.$$

460 Puesto que dado el radio  $R$  de un círculo, se conoce el seno de un cuadrante y la tangente de  $45^\circ$ , que son iguales con él, y el seno de  $30^\circ$  que vale la mitad del radio, y conocido el seno de un arco se pueden co-

nocer todas sus líneas trigonométricas, vamos á ver cómo por su medio se podrán calcular las de todos los arcos; para lo cual se tienen las tres proposiciones siguientes, en el supuesto de ser el radio  $R=1$ , y de que para indicar el cuadrado de una línea trigonométrica de un arco  $A$ , por ejemplo de un seno, se escribe indiferentemente  $\text{sen.}^2 A$ , ó  $\text{sen.} A^2$ , etc.

1.<sup>a</sup> Dado el seno de un arco  $A$ , el seno de la mitad viene expresado por

$$\text{sen.} \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \text{sen.}^2 A}}.$$

*Dem.* Sea (fig. 143) el arco  $AHB=A$ , y  $BD$  su seno; con lo cual tendremos que si tiramos la cuerda  $AB$ , su mitad  $AE$  será el seno pedido; y como

$$\begin{aligned} AE &= \frac{1}{2} AB = (\S 333, \text{ cor. } 1.^{\circ}) \frac{1}{2} \sqrt{2AC \times AD} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2AC(AC - CD)} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \times 1(1 - \text{cos.} AHB)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\text{cos.} AHB} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\text{cos.} A} = \end{aligned}$$

$$(\S 445, e) \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \text{sen.}^2 A}}, \text{ que es L. Q. D. D.}$$

2.<sup>a</sup> Dados los senos y por consiguiente (445) los cosenos de dos arcos  $A, B$ , los senos y cosenos de la suma y diferencia de dichos arcos son:

$$\begin{cases} \text{sen.}(A+B) = \text{sen.} A \text{cos.} B + \text{sen.} B \text{cos.} A \text{ (m),} \\ \text{cos.}(A+B) = \text{cos.} A \text{cos.} B - \text{sen.} A \text{sen.} B \text{ (n),} \\ \text{sen.}(A-B) = \text{sen.} A \text{cos.} B - \text{sen.} B \text{cos.} A. \\ \text{cos.}(A-B) = \text{cos.} A \text{cos.} B + \text{sen.} A \text{sen.} B. \end{cases}$$

*Dem.* Sean (fig. 144)  $AB=A$ , y  $BD=B$ , los arcos dados; colocando el uno á continuacion del otro, será  $ABD=AB+BD=A+B$ , y poniendo el  $BD$  desde  $B$  hasta  $M$  será  $AM=AB-BD=A-B$ ; luego bajando las perpendiculares  $DF, MP$  al radio  $AC$ ,

$$\text{será } \left\{ \begin{array}{l} DF = \text{sen.} ABD = \text{sen.}(A+B), \\ CF = \text{cos.} ABD = \text{cos.}(A+B), \\ MP = \text{sen.} AM = \text{sen.}(A-B), \\ CP = \text{cos.} AM = \text{cos.}(A-B), \end{array} \right\} \text{ (P).}$$

Para determinar estas líneas en valores de las de los arcos dados, tiraremos la cuerda  $MD$ , y el radio  $CB$  que (294 esc.) le será perpendicular, y tambien tiraremos la  $BE$  perpendicu-

lar á la AC; por lo que las líneas de los arcos dados serán

$$\left\{ \begin{array}{l} BE = \text{sen. } A, \quad CE = \text{cos. } A, \\ DH = \text{sen. } B, \quad CH = \text{cos. } B. \end{array} \right.$$

Si ahora tiramos la HK paralela á BE, y las HL, MN, paralelas á la AC, y observamos que los triángulos MNH, HLD (por tener MH=HD por lo dicho ántes, el ángulo HMN=DHL por correspondientes entre las paralelas MN, HL siendo MD la secante, y el ángulo MHN=HDL, por la misma razon entre las paralelas HK, DF, siendo tambien la secante MD) son iguales, y dan MN=HL, y NH=LD; las líneas DF, CF, MP, CP que tratamos de conocer, las podremos expresar del modo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} DF = DL + LF = DL + HK, \\ CF = CK - FK = CK - HI, \\ MP = NK = HK - NH = HK - DL, \\ CP = CK + KP = CK + MN = CK + HL. \end{array} \right.$$

Puesto que los triángulos CBE, CHK son semejantes,

$$\text{darán } \left\{ \begin{array}{l} CB:CH::BE:HK::CE:CK, \\ \text{ó } 1:\text{cos. } B::\text{sen. } A:HK::\text{cos. } A:CK, \end{array} \right.$$

que despejando el cuarto y sexto término, refiriéndonos á la primera razon, se tendrá

$$HK = \text{sen. } A \text{cos. } B, \quad CK = \text{cos. } A \text{cos. } B.$$

Los triángulos CBE, DHL, por tener sus lados perpendiculares, serán (331 cor. 4.<sup>o</sup>) semejantes y

$$\text{darán } \left\{ \begin{array}{l} CB:DH::BE:HL::CE:DL, \\ \text{ó } 1:\text{sen. } B::\text{sen. } A:HL::\text{cos. } A:DL, \end{array} \right.$$

de donde resultará,

$$HL = \text{sen. } A \text{sen. } B, \quad DL = \text{sen. } B \text{cos. } A.$$

Luego substituyendo estos valores en las ecuaciones (P), y poniendo los primeros miembros por segundos, nos resultará

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen. } (A+B) = \text{sen. } A \text{cos. } B + \text{sen. } B \text{cos. } A, \\ \text{cos. } (A+B) = \text{cos. } A \text{cos. } B - \text{sen. } A \text{sen. } B, \\ \text{sen. } (A-B) = \text{sen. } A \text{cos. } B - \text{sen. } B \text{cos. } A, \\ \text{cos. } (A-B) = \text{cos. } A \text{cos. } B + \text{sen. } A \text{sen. } B; \end{array} \right.$$

que es L. Q. D. D.

3.<sup>a</sup> Dado el seno, y por consiguiente el coseno de un arco A, el seno y coseno del arco duplo son

$$\begin{aligned} \text{sen. } 2A &= 2 \text{sen. } A \text{cos. } A = 2 \text{sen. } A \sqrt{1 - \text{sen.}^2 A} \text{ (p),} \\ \text{cos. } 2A &= \text{cos.}^2 A - \text{sen.}^2 A = 1 - 2 \text{sen.}^2 A \text{ (q).} \end{aligned}$$

Dem. No hay mas que hacer en las fórmulas ante-

riores  $B=A$ , y sustituir despues en vez de  $\cos.A$  su

igual  $\sqrt{1-\text{sen.}^2A}$ , y  $1-\text{sen.}^2A$  en vez de  $\cos.^2A$ .

Cor. Si hacemos  $2A=A'$ , será  $A=\frac{1}{2}A'$ ;

y si sustituimos en las fórmulas anteriores, se tendrá

$$\text{sen.}A'=2\text{sen.}\frac{1}{2}A'\cos.\frac{1}{2}A';$$

$$\cos.A'=\cos.^2\frac{1}{2}A'-\text{sen.}^2\frac{1}{2}A';$$

y como  $\cos.^2\frac{1}{2}A'=1-\text{sen.}^2\frac{1}{2}A'$ , será

$$\cos.A'=1-\text{sen.}^2\frac{1}{2}A'-\text{sen.}^2\frac{1}{2}A'=1-2\text{sen.}^2\frac{1}{2}A'.$$

461 Si en la fórmula (m) se hace  $B=2A$ , se convertirá en  $\text{sen.}3A=\text{sen.}A\cos.2A+\text{sen.}2A\cos.A$ ;

y poniendo en vez de  $\cos.2A$ ,  $\text{sen.}2A$ , y  $\cos.A$ , sus valores (q), (p) y (e) (445) todo espresado en valores del seno, se tendrá  $\text{sen.}3A=\text{sen.}A(1-2\text{sen.}^2A)+$

$$2\text{sen.}A\sqrt{1-\text{sen.}^2A}\sqrt{1-\text{sen.}^2A}=$$

$$\text{sen.}A-2\text{sen.}^3A+2\text{sen.}A(1-\text{sen.}^2A)=$$

$$\text{sen.}A-2\text{sen.}^3A+2\text{sen.}A-2\text{sen.}^3A=3\text{sen.}A-4\text{sen.}^3A;$$

que es la fórmula que espresa el seno del arco triplo en valores del arco sencillo. Igualmente se puede hallar el coseno del mismo arco; y por procedimientos análogos se pueden determinar todas las líneas trigonométricas de cualquier arco múltiplo de otro dado.

462 Ademas de la propiedad de determinar la magnitud del arco, se verifica tambien que *todas las líneas trigonométricas son proporcionales con los radios de los círculos con que están trazados los arcos.*

Dem. En efecto, si suponemos que haciendo centro en C (figura 145) vértice del ángulo DCG, se trazan con los radios CA, CD, dos arcos de círculo AB, DG, y bajamos desde A y D, las AP, DE perpendiculares á CG, resultará que serán los senos respectivos de los arcos AB, DG, que tendrán un mismo número de grados por ser ambos medida del ángulo DCG; las líneas CP, CE, serán sus cosenos; y levantando en B y G las perpendiculares BN, GM á la CG, serán las tangentes, y CN, CM las secantes. Ahora, los triángulos semejantes CDE, CAP, dan  $CD:CA::DE:AP::CE:CP$ , ó poniendo en vez de estas líneas sus valores, y acentuando las líneas correspondientes al radio CA, que tambien señalaremos con  $R'$ , será

$$R:R'::\text{sen.}:\text{sen.'}::\cos.:\cos.' \text{ (a)};$$

los triángulos semejantes CGM, CBN, también darán  
 $CG:CB::GM:BN::CM:CN$ , ó  $R:R'::\text{tang.}:\text{tang.'}::\text{sec.}:\text{sec.'}$  (b).

Ahora, completando los cuadrantes GDR, BAQ, se tendrá que RS, QO, serán las cotangentes de los arcos GD, BA; y CS, CO serán las cosecantes; y los triángulos semejantes CSR, COQ darán  $CR:CQ::RS:OQ::CS:CO$ , ó  $R:R'::\text{cot.}:\text{cot.'}::\text{cosec.}:\text{cosec.'}$  (c).

Y como las tres series de razones iguales (a), (b), (c), tienen comun la razón  $R:R'$ , enlazando las demas porque son iguales, se tendrá  $R:R'::\text{sen.}:\text{sen.'}::\text{cos.}:\text{cos.'}::\text{tang.}:\text{tang.'}::\text{sec.}:\text{sec.'}::\text{cot.}:\text{cot.'}::\text{cosec.}:\text{cosec.'}$  (\*).

*Cor.* Luego si respecto de un radio cualquiera se calculan estas líneas para todos los arcos, y al lado de cada arco se pone el valor de las líneas trigonométricas que le corresponden, las tablas que las contengan servirán para hallar estas mismas líneas cuando correspondan á otro radio; y además, por medio de ellas cuando se dé un arco, se podrá determinar la magnitud de sus líneas trigonométricas; y dada una línea trigonométrica, se podrá hallar el valor del arco á que corresponde.

463 Las tablas que se formasen de este modo, esto es, que contuviesen el valor de las líneas trigonométricas en partes del radio, se llaman *tablas trigonométricas naturales*; pero como todos los cálculos se hacen por medio de proporciones, para hacer las operaciones con facilidad y prontitud, se ha tomado el medio de que las tablas contengan, no las líneas trigonométricas naturales, sino el logaritmo correspondiente á dicho número de partes del radio á que equivalgan; y en este caso, que es como las usamos, se llaman *tablas trigonométricas artificiales*. Las de D. Tadéo Lópe y Aguilar, que como ya hemos dicho en otra ocasion, son á las que nosotros nos referimos, están calculadas de 10 en 10 segundos; cuya construccion y uso omitimos por razones análogas á las espuestas (208) y pasaremos á la

(\*) Lo mismo se verifica en el seno y coseno verso. No lo deducimos, porque no se hace uso de estas líneas en la resolucion de los triángulos; pero los principiantes harán muy bien en ensayar sus fuerzas para demostrarlo por sí mismos. Lo que conseguirán combinando la doctrina de los (§§ 183 y 184) con las proporciones del testo.

## Resolucion de los triángulos rectángulos.

464 Para la resolucion de los triángulos rectángulos solo se necesitan dos proporciones generales, que se llaman *analogías*

1.<sup>a</sup> *El radio de las tablas es al seno de uno de los ángulos agudos, como la hipotenusa es al cateto opuesto á dicho ángulo agudo; ó el radio de las tablas es al coseno de un ángulo agudo, como la hipotenusa es al cateto adyacente á dicho ángulo agudo; que puestas en proporciones dan*

$$\left\{ \begin{array}{l} R:\text{sen.áng.ag.}::\text{hipot.}:\text{catet.op.}, \\ R:\text{cos.áng.ag.}::\text{hip.}:\text{cat.ady.} \end{array} \right.$$

*Dem.* En efecto, sea CDE (fig. 145) un triángulo rectángulo cualquiera; si con una parte CA, igual al radio de las tablas, se traza el arco AB, y se tira la perpendicular AP, esta será el seno que se halle en las tablas, y CP el coseno; y los triángulos CAP, CDE, serán semejantes (328) y darán

$$\left\{ \begin{array}{l} CA:AP::CD:DE, \quad \text{ó } R:\text{sen.áng.ag.}::\text{hip.}:\text{cat.op.} \\ CA:CP::CD:CE, \quad \text{ó } R:\text{cos.áng.ag.}::\text{hip.}:\text{cat.ady.} \end{array} \right.$$

*Esc.* Como el radio de las tablas se considera igual con la unidad, resulta que hallando el cuarto término en las dos proporciones de arriba,

$$\text{será } \left\{ \begin{array}{l} DE = CD \times AP = \text{hip.} \times \text{sen.áng.op.} \text{ á DE,} \\ CE = CD \times CP = \text{hip.} \times \text{cos.áng.ady.} \text{ á CE,} \end{array} \right.$$

cuyas espresiones manifiestan, que *un cateto de un triángulo rectángulo es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto, ó por el coseno del ángulo adyacente, tomados en las tablas.*

465 2.<sup>a</sup> *El radio de las tablas es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el cateto adyacente á dicho ángulo es al cateto opuesto, ó*

$$R:\text{tang.áng.ag.}::\text{cat.ady.}:\text{cat.op.}$$

*Dem.* Porque si despues de haber descrito el arco AB con el radio CA, igual al de las tablas, se tira la perpendicular BN, esta será la tangente trigonométrica que en las tablas corresponde al ángulo en C; y los triángulos semejantes CBN, CDE, darán CB:BN::CE:DE, ó *R:tang.áng.ag.::cat.ady.:cat.op. (A),*  
L. Q. D. D.

*Cor.* De donde tomando el radio por unidad, resulta  $DE = CE \times BN$ , ó  $\text{cat.} = \text{tang.} \times \text{áng. op.} \times \text{cat. ady.}$

que quiere decir, que en un triángulo rectángulo cualquiera. un cateto es igual á la tangente trigonométrica de su ángulo opuesto multiplicada por el otro cateto.

*Esc.* Se usará la primera analogía cuando la hipotenusa entre en los datos ó sea lo que se busque, y de la segunda cuando no.

466 Esto supuesto, para resolver el triángulo ABC (fig. 146) rectángulo en C, en que se da la hipotenusa  $AB = 327$  varas, y el ángulo  $A = 32^\circ 25' 15'', 7$ ; se escriben los datos dentro de una llave como se ve en (M), y las partes que se buscan dentro de otra (N); se restará el ángulo A de  $90^\circ$ , y se hallará el B de  $57^\circ 34' 44'', 3$ .

$$\begin{array}{l} \text{(M)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Áng. C} = 90^\circ. \\ \text{Áng. A} = 32^\circ 25' 15'', 7. \\ AB = 327 \text{ varas.} \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(N)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Áng. B} = 57^\circ 34' 44'', 3. \\ BC = 175,317 \text{ varas.} \\ AC = 276,031 \text{ varas.} \end{array} \right. \end{array}$$

Para hallar los lados BC, AC, nos servirá la primera analogía alternada, que será

$$R : 327 :: \text{sen. } 32^\circ 25' 15'', 7 : BC :: \text{cos. } 32^\circ 25' 15'', 7 : AC.$$

Que hallando por logaritmos el cuarto y sexto término, refiriéndonos á la primera razón, será

$$\log. BC = \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \log \text{ sen. } 32^\circ 25' 10'' = 9,7292566 \\ \text{part. corresp. á } 5'', 7 = 189 \\ \log. 327 \dots\dots\dots = 2,5145478 \\ \text{compl. log. R} \dots\dots = 0, \end{array} \right. \\ \hline \text{suma ó } \log. 175,317 = 2,2438233 \end{array}$$

$$\log. AC = \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \log \text{ cos. } 32^\circ 25' 10'' = 9,9264176 \\ \text{part. corresp. á } 5'', 7 = -76 \\ \log. 327 \dots\dots\dots = 2,5145478 \\ \text{compl. log. R} \dots\dots = 0, \end{array} \right. \\ \hline \text{suma ó } \log. 276,031 = 2,4409578; \end{array}$$

cuyos valores se colocan en la llave (N) y se tiene resuelto el triángulo.

*Esc.* Si se conociese la hipotenusa y un cateto, la primera analogía permutada nos daría por cuarto término el seno de uno

de los ángulos, y restando este ángulo de  $90^\circ$ , se obtendría el otro, y quedaría resuelto el triángulo.

467 Si se diesen en el mismo triángulo un cateto  $AC$  y el ángulo  $A$ , como se ve en (M); para hallar el ángulo  $B$ , se restará el  $A$  de  $90^\circ$ , y se tendrá el  $B$  de  $50^\circ 33' 23'', 2$  como se ve en (N).

$$\begin{array}{l} \text{(M)} \\ \left\{ \begin{array}{l} AC=829 \text{ varas.} \\ \text{Áng. } A=39^\circ 26' 36'', 8. \\ \text{Áng. } C=90^\circ. \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(N)} \\ \left\{ \begin{array}{l} B=50^\circ 33' 23'', 2. \\ BC=682,004 \text{ varas.} \\ AB=1073,485. \end{array} \right. \end{array}$$

Para hallar el lado  $BC$  nos servirá la segunda analogía, que dará  $R:\text{tang. } 39^\circ 26' 36'', 8::829:CB$ , que por logaritmos será:

$$\begin{array}{l} \log.CB = \left\{ \begin{array}{l} \log.\text{tang. } 39^\circ 26' 30'' = 9,9152034 \\ \text{par.cor. á } \dots 6'', 8 = \quad \quad 292 \\ \log.829 \dots \dots \dots = 2,9185545 \\ \text{compl.log.R. } \dots \dots = 0, \\ \hline \text{suma ó } \log.682,004 = 2,8337871. \end{array} \right. \end{array}$$

El lado  $AB$  le hallaremos por la primera analogía invertida, que dará  $\cos. 39^\circ 26' 36'', 8.R.:829:AB$ , que por logaritmos, será:

$$\begin{array}{l} \log.AB = \left\{ \begin{array}{l} \log.829 \dots \dots \dots = 2,9185545 \\ \log.R \dots \dots \dots = 10, \\ \text{com.log.cos. } 39^\circ 26' 36'', 8 = 0,1122416 \\ \hline \text{suma ó } \log.1073,485 = 3,0307961. \end{array} \right. \end{array}$$

*Esc. 1.º* Si se diesen los dos catetos, se despejaría el segundo término de la proporción (A, 465), y se tendría ya conocido un ángulo. El cual restado de  $90^\circ$  daría el otro ángulo; y después, por la primera analogía, se hallaría la hipotenusa, y quedaba resuelto el triángulo.

*Esc. 2.º* En los triángulos rectángulos se pueden siempre conocer dos datos sin necesidad de analogías, á saber, un ángulo en conociendo los otros dos (lo cual conviene igualmente á los oblicuángulos); y uno cualquiera de los lados, cuando se conocen los otros dos (332 cor.). Aunque es mas sencillo en estos casos el cálculo logarítmico, sin embargo, aquel puede servir de comprobación, como se ve en el primer caso, en que se tiene

$327^2 = 175,317^2 + 276,031^2$  con ménos de dos décimas de diferencia, que en nada influyen.

*Resolucion de los triángulos oblicuángulos.*

468 La resolucion de los triángulos oblicuángulos está fundada en esta proposicion general:

*Los senos de los ángulos son como sus lados opuestos.*

*Dem.* En efecto, si al triángulo ABC (fig. 147) circunscribimos un círculo, y desde el centro O se tiran las OQ, OR, OS, perpendiculares á las cuerdas AC, CB, AB, y se une tambien el centro O con los vértices de los ángulos, se tendrá que el ángulo ABC será igual al AON, porque ambos tienen por medida el arco AN; y como el seno de AON es  $AQ = \frac{1}{2}AC$ , este mismo será el seno del ángulo ABC, ó  $\text{sen.}ABC = \frac{1}{2}AC$ .

Así mismo será  $\text{sen.}BCA = \frac{1}{2}AB$ , y  $\text{sen.}BAC = \frac{1}{2}BC$ , y formando tres razones de igualdad, será

$$\text{sen.}ABC : \frac{1}{2}AC :: \text{sen.}BCA : \frac{1}{2}AB :: \text{sen.}BAC : \frac{1}{2}BC.$$

Multiplicando por 2 los consecuentes, y escribiendo abreviadamente, será  $\text{sen.}ABC : \text{sen.}BCA : \text{sen.}BAC :: AC : AB : BC$ , ó (335 esc. 1.<sup>o</sup>) mas general

$$\text{sen.}A : \text{sen.}B : \text{sen.}C :: a : b : c, \text{ que es L. Q. D. D.}$$

469 Pasemos á resolver algunos ejemplos, y sea el primero, *dados dos lados y el ángulo comprendido, hallar el otro lado y los dos ángulos.*

Para poder aplicar á este caso la analogía general, es necesario demostrar, que *la suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos á dichos lados (\*) es á la tangente de su semidiferencia.*

Para lo cual, la proporcion general

$$\text{sen.}A : BC :: \text{sen.}B : AC, \text{ dará (§ 184.6.ª)}$$

$$\text{sen.}A + \text{sen.}B : \text{sen.}A - \text{sen.}B :: BC + AC : BC - AC \text{ (m).}$$

(\*) En vez de la tangente de la mitad de los ángulos opuestos á dichos lados, podriamos decir, *como la cotangente de la mitad del ángulo comprendido.* Este enunciado, á primera vista, parece mas sencillo, pero, en la práctica, viene á ser mas complicado.

Sean ahora BS, CP (fig. 148) los senos de dos arcos AB, AC; si se tira el diámetro AM y se prolonga la BS, será (294) el arco AD=ACB, por consiguiente se tendrá

$$DAC=AB+AC \text{ y } CB=AB-AC.$$

Tírese ahora la CF paralela al diámetro AM,

$$\text{y será } \begin{cases} DE=DS+SE=BS+CP=\text{sen. } AB+\text{sen. } AC, \\ BE=SB-SE=SB-CP=\text{sen. } AB-\text{sen. } AC. \end{cases}$$

Si se tiran las cuerdas BF, DF, y con un radio FG igual al del círculo, se describe un arco hGK, se tendrá  $GK=\frac{1}{2}CAD=\frac{1}{2}(DA+CA)=\frac{1}{2}(BA+AC)$ , por ser ambas espresiones medida del ángulo DFG; por la misma razón será

$$Gh=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AB-AC).$$

Luego si por el punto G se tira la tangente IGL, la parte GL será la tangente del arco  $GK=\frac{1}{2}(AB+AC)$ , y la parte GI será la tangente del arco  $Gh=\frac{1}{2}(AB-AC)$ .

Pero los triángulos DEF, FGL, BEF, FGI,

dan  $FE:FG::DE:GL$ ,  $FE:FG::BE:GI$ ;

que dan  $DE:GL::BE:GI$ , ó  $DE:BE::GL:GI$ ;

y substituyendo en vez de estas líneas los valores que hemos hallado ántes, se tendrá

$$\text{sen. } AB+\text{sen. } AC:\text{sen. } AB-\text{sen. } AC::$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}(AB+AC):\text{tang. } \frac{1}{2}(AB-AC) \text{ (n),}$$

que quiere decir, que la suma de los senos de dos arcos ó de dos ángulos es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de dichos arcos es á la tangente de la semidiferencia.

Y como haciendo  $AB=A$ ,  $AC=B$ , las proporciones (m) y (n) tienen comun la primera razón, las otras darán  $BC+AC:BC-AC::\text{tang. } \frac{1}{2}(A+B):\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B)$ , que es la proporción enunciada.

Pasemos ahora, á la resolución del triángulo ABC (fig. 149), en que se conocen los datos que se ven en M;

(M)

$$\left\{ \begin{array}{l} BC=748 \text{ varas.} \\ AC=659 \text{ varas.} \\ \text{Áng } C=77^{\circ}46'28'',5. \end{array} \right.$$

(N)

$$\left\{ \begin{array}{l} A=55^{\circ}35'49'',73. \\ B=46^{\circ}37'41'',77. \\ AB=886,014 \text{ varas.} \end{array} \right.$$

Y observaremos que conocido el ángulo C, la suma de los otros dos  $A+B$  será también conocida (289 cor. 1.º) y tendremos  $180^{\circ}-77^{\circ}46'28'',5=102^{\circ}13'31'',5$  y  $\frac{1}{2}(A+B)=51^{\circ}6'45'',75$ ; luego la proporción anterior se convertirá en

$$748+659:748-659::\text{tang. } 51^{\circ}6'45'',75:\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B),$$

$$\begin{aligned} \text{ó } 1407:89::\text{tang. } 51^{\circ}6'45'',75:\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B); \text{ de donde sale} \\ \log.\text{tan. } 51^{\circ}6'40''=10,0933536 \\ \log.\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B) = \begin{cases} \text{par.cor. á } 5'',75 = & 247 \\ \log.89. \dots\dots\dots = & 1,9493900 \\ \text{comp.log. } 1407. = & 6,8517059 \end{cases} \\ \text{suma ó log.tang. } 4^{\circ}29'3'',98 = \underline{18,8944742.} \end{aligned}$$

Conocida la mitad de la suma y de la diferencia de los ángulos  $A$  y  $B$ , tendremos (§ 154)

$$\begin{aligned} A &= 51^{\circ}6'45'',75 + 4^{\circ}29'3'',98 = 55^{\circ}35'49'',73, \\ \text{y } B &= 51^{\circ}6'45'',75 - 4^{\circ}29'3'',98 = 46^{\circ}37'41'',77. \end{aligned}$$

Para hallar el lado  $AB$  formaremos esta proporción  
 $\text{sen. } A : BC :: \text{sen. } C : AB,$

$$\begin{aligned} \text{ó } \text{sen. } 55^{\circ}35'49'',73 : 748 :: \text{sen. } 77^{\circ}46'28'',5 : AB, \quad \text{que da} \\ \log.\text{sen. } \dots\dots\dots 77^{\circ}46'20'' = 9,9900338 \\ \log. AB = \begin{cases} \text{par.cor. á } \dots\dots\dots 8'',5 = & 39 \\ \log.748 \dots\dots\dots = & 2,8739016 \\ \text{com.log.sen. } 55^{\circ}35'49'',73 = & 0,0835011 \end{cases} \\ \text{suma ó log. } 886,014 = \underline{12,9474404.} \end{aligned}$$

Con lo cual queda resuelto el segundo caso y las partes buscadas son las que se ven en (N).

47<sup>o</sup> *Dados dos ángulos y un lado, hallar el otro ángulo y los dos lados.*

Si en el triángulo  $ABC$  (fig. 150) se tienen los datos (M), lo primero se hallará el tercer ángulo

$$\begin{array}{cc} \text{(M)} & \text{(N)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Áng. } C = 74^{\circ}5'37'',6. \\ \text{Áng. } A = 63^{\circ}23'53'',7. \\ BC = 863 \text{ varas.} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} B = 42^{\circ}30'28'',7. \\ AC = 652,16 \text{ varas.} \\ AB = 928,218 \text{ varas.} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{que será } B &= 180^{\circ} - (74^{\circ}5'37'',6 + 63^{\circ}23'53'',7) \dots \\ &= 180^{\circ} - 137^{\circ}29'31'',3 = 42^{\circ}30'28'',7. \end{aligned}$$

La analogía general  $\text{sen. } A : BC :: \text{sen. } B : AC :: \text{sen. } C : AB,$  será  
 $\text{sen. } 63^{\circ}23'53'',7 : 863 :: \text{sen. } 42^{\circ}30'28'',7 : AC :: \text{sen. } 74^{\circ}5'37'',6 : AB.$

Despejando el cuatro y sexto término se tiene

$$\begin{aligned} \log. AC = \begin{cases} \log.\text{sen. } \dots\dots\dots 42^{\circ}30'20'' = & 9,8297293 \\ \text{par.cor. á } \dots\dots\dots 8'',7 = & 200 \\ \log.863 \dots\dots\dots = & 2,9360108 \\ \text{com log.sen. } 63^{\circ}23'53'',7 = & 0,0485942 \end{cases} \\ \text{suma ó log. } 652,16 = \underline{12,8143543} \end{aligned}$$

$$\log. AB = \begin{cases} \log. \text{sen.} \dots\dots\dots 74^{\circ} 5' 30'' = 9,9830403 \\ \text{par. cor. á} \dots\dots\dots 7'',6 = 46 \\ \log. 863. \dots\dots\dots = 2,9360108 \\ \text{comp. log. sen. } 63^{\circ} 23' 53'',7 = 0,0485942 \end{cases}$$

$$\text{suma ó log. } 928,218 = 12,9676499.$$

Con lo cual queda resuelto el triángulo, y el valor de las partes buscadas es el que se ve en (N).

471 *Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, hallar el tercer lado y los dos ángulos.*

Este caso no tiene mas de una solución cuando el ángulo dado es el opuesto al lado mayor, pues entónces el ángulo opuesto al otro lado conocido será precisamente agudo en virtud de lo demostrado (§§ 267 y 266..cor. 2.º), y se resolverá como el caso anterior:

Pero cuando el ángulo conocido es el opuesto al lado menor de los dados, entónces hemos visto (438), que, suponiendo que sean conocidos los lados BC. BA (fig. 140) y el ángulo C opuesto al lado menor, entónces trazando desde B con BA el arco AD, resulta que BD es igual con BA por radios; y los dos triángulos ABC, BDC tienen los mismos datos, á saber: el lado BC comun, el ángulo C tambien es comun; y el lado BA=BD por radios. Sin embargo, estos triángulos difieren mucho entre sí, pues el ángulo BAC del primero es agudo, y el BDC del segundo es obtuso, y cabalmente el suplemento del ángulo BAC, en virtud de lo espuesto (§§ 254 y 265); y el ángulo ABC y el lado AC del primero son mayores que el ángulo DBC, y el lado DC del segundo. Y como para determinar los ángulos, en virtud de la analogía general, se hace por medio del seno, y este conviene (459) tanto al ángulo agudo como al obtuso que le sirve de suplemento, resulta efectivamente la duda; y lo que se hace en este caso es resolver los dos triángulos, suponiendo en el uno, 1.º que el ángulo opuesto al lado mayor sea agudo; y 2.º suponiendo despues que dicho ángulo sea obtuso é igual al suplemento del anterior.

Vamos á resolver un ejemplo no omitiendo ningun detalle para la mas completa inteligencia.

Supongamos que en el triángulo ABC (fig. 140), se tenga



Resolvamos ahora el triángulo en el supuesto de ser obtuso el ángulo opuesto al lado mayor, y estará representado por BDC en que se tiene

$$\text{partes dadas} \begin{cases} BC=8532 \text{ varas} \\ BD=7490 \text{ id.} \\ \text{áng. DCB}=29^{\circ} 43'. \end{cases}$$

El ángulo BDC hemos hallado que es  $145^{\circ} 37' 13''$  por ser el suplemento del  $BDA=BAD=BAC=34^{\circ} 22' 47''$ .

Para encontrar el tercer ángulo DBC, sumaremos  $145^{\circ} 37' 13''$  con  $29^{\circ} 43'$ ; y su suma  $175^{\circ} 20' 13''$  la restaremos de  $180^{\circ}$ , y tendremos  $\text{áng. DBC}=4^{\circ} 39' 47''$ .

Y para encontrar el tercer lado DC, diremos  $\text{sen } C=\text{sen. } 29^{\circ} 43': BD=7490::\text{sen. DBC}=\text{sen. } 4^{\circ} 39' 47'': DC$ ; que, por logaritmos, será

$$\text{log. DC} = \begin{cases} \text{log. } 7490 \dots\dots\dots = 3,8744818 \\ \text{log. sen. } 4^{\circ} 39' 40'' \dots = 8,9098877 \\ \text{parte correspondiente á } 7'' = 1807 \\ \text{compl. log. sen. } 29^{\circ} 43' \dots = 0,3047712 \\ \hline \text{Suma. } \dots\dots\dots = 3,0893214 \end{cases}$$

que corresponde al número 1228,3; luego

$$\text{partes buscadas} \begin{cases} \text{áng. BDC}=145^{\circ} 37' 13'' \\ \text{áng. DBC}= 4^{\circ} 39' 47'' \\ \text{lado DC}=1228,3 \text{ varas.} \end{cases}$$

472 Las construcciones preparatorias que hemos tenido que hacer, se podrían evitar si entre las seis cosas que entran en un triángulo se pudiesen encontrar tres ecuaciones; pues en este caso, *dadas tres cosas, se tendrían tres ecuaciones con tres incógnitas, que se despejarían inmediatamente.* Para esto, observaremos, que (figs. 77 y 78) por lo dicho (335 esc. I.) se tiene  $c^2=a^2+b^2\pm 2b\times CD$ ; y como (§ 464 esc.)  $CD=acos.BCD$ , y en la figura primera, que es la que da el signo + del  $\pm$ , se tiene  $\text{cos. BCD}=-\text{cos. BCA}=-\text{cos. C}$ , sustituyendo este valor y sacando los análogos para los demas, se tendrá

$$c^2=a^2+b^2-2ab\times\text{cos. C}, \quad b^2=a^2+c^2-2ac\times\text{cos. B}, \\ a^2=b^2+c^2-2bc\times\text{cos. A},$$

que sirven para determinar un lado, cuando se conocen los otros dos y el ángulo que forman.

Despejando los cosenos de los ángulos, se tendrá

$$\text{cos. C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \quad \text{cos. B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad \text{cos. A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

que sirven para determinar un ángulo cuando se conocen los tres lados.

*Esc.* Estas fórmulas se pueden poner bajo una forma á que puede aplicar inmediatamente el cálculo logarítmico.

*Idea general de la resolucion de los triángulos esféricos.*

473 Queda indicado (436) y ahora repetimos, que se llama *triángulo esférico* una porcion de la superficie de una esfera, comprendida por tres arcos de círculo máximo; tal es el  $ABC$  (fig. 151), que suponemos construido en la superficie de una esfera, cuyo centro está en  $O$ , y cuyos lados son los arcos de círculo máximo  $AB, AC, BC$ .

Para fijar bien las ideas, conviene saber, que *todo triángulo esférico  $ABC$  determina en el centro  $O$  de la esfera un ángulo sólido, compuesto de tres ángulos planos  $AOB, AOC, BOC$ , que tienen por medida respectivamente los arcos ó lados del mismo triángulo  $AB, AC, BC$ .*

Ademas, *el ángulo esférico  $CAB$  es el mismo que el que forman las dos tangentes  $AE, AD$ , tiradas en el vértice  $A$ , respectivamente á cada arco  $AC, AB$ .*

Porque la inclinacion de estos arcos es la misma que la de los planos  $OAE, OAD$  en que se hallan, y cuya interseccion comun es el radio  $AO$ ; pero la inclinacion de estos planos se mide (377) por el ángulo rectilíneo  $EAD$  formado por las dos perpendiculares  $AE, AD$ , á un mismo punto  $A$  de la comun interseccion: luego este ángulo será tambien el formado por los arcos  $AC, AB$ , ó el esférico  $BAC$ .

474 Esto supuesto, lo que nos proponemos es hallar la relacion que tienen entre sí los lados  $AB, AC, BC$ , que llamaremos  $c, b, a$ , y los ángulos  $C, B, A$ , del triángulo esférico  $ABC$ .

Para esto, sea el radio  $OA=1$ , y prolónguense los  $OC, OB$ , hasta que encuentren á las tangentes en  $E$  y en  $D$ , y será  $AE$  la tangente trigonométrica del arco  $AC$ , y  $OE$  será la secante; y  $AD, OD$  serán la tangente y secante del arco  $AB$ . Únanse los puntos  $D$  y  $E$ , y el triángulo rectilíneo  $ADE$  dará (§ 472)  $DE^2=AE^2+AD^2-2AE \times AD \times \cos A$ ; ó hacien-

do  $DE=x$ , y sustituyendo en vez de estas líneas los valores que les hemos dado ántes, será

$$x^2 = \text{tang.}^2 b + \text{tang.}^2 c - 2 \text{ tang.} b \text{ tang.} c \cos. A;$$

el triángulo ODE dará igualmente

$$x^2 = \text{sec.}^2 b + \text{sec.}^2 c - 2 \text{ sec.} b \text{ sec.} c \cos. a.$$

Restando de esta ecuacion la anterior, se tendrá

$$0 = \text{sec.}^2 b + \text{sec.}^2 c - 2 \text{ sec.} b \text{ sec.} c \cos. a - \text{tang.}^2 b - \text{tang.}^2 c + 2 \text{ tang.} b \text{ tang.} c \cos. A;$$

y teniendo presente (445 esc.) que  $\text{sec.}^2 b - \text{tang.}^2 b = 1$  y  $\text{sec.}^2 c - \text{tang.}^2 c = 1$ , esta ecuacion despues de dividir por 2 se convertirá en  $1 + \text{tang.} b \text{ tang.} c \cos. A - \text{sec.} b \text{ sec.} c \cos. a = 0$ ; y sustituyendo en vez de tang. y sec. sus valores (445), se tendrá

$$1 + \frac{\text{sen.} b}{\cos. b} \times \frac{\text{sen.} c}{\cos. c} \times \cos. A - \frac{1}{\cos. b} \times \frac{1}{\cos. c} \times \cos. a = 0;$$

ó haciendo las operaciones, reduciendo el entero á la especie del quebrado, suprimiendo el denominador, y despejando  $\cos. a$ , se tendrá  $\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen.} b \text{ sen.} c \cos. A$ ; y haciendo una construccion semejante en cada ángulo, se tendrá el sistema de

$$\text{ecuaciones} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen.} b \text{ sen.} c \cos. A \\ \cos. b = \cos. a \cos. c + \text{sen.} a \text{ sen.} c \cos. B \\ \cos. c = \cos. a \cos. b + \text{sen.} a \text{ sen.} b \cos. C \end{array} \right\} (M);$$

que sirven para determinar un lado, cuando se conocen los otros dos y el ángulo que forman.

475 Despejando en la primera  $\cos. A$ , se tendrá

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen.} b \text{ sen.} c};$$

y si en la ecuacion,  $\text{sen.}^2 A = 1 - \cos.^2 A$ , sustituimos este valor,

$$\text{será} \quad \text{sen.}^2 A = 1 - \frac{\cos.^2 a + \cos.^2 b \cos.^2 c - 2 \cos. a \cos. b \cos. c}{\text{sen.}^2 b \text{ sen.}^2 c}.$$

Reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, sustituyendo en el numerador  $1 - \cos.^2$  en vez de  $\text{sen.}^2$ , efectuando la multiplicacion y reduccion, multiplicando arriba y abajo por  $\text{sen.}^2 a$ , y estrayendo la raiz cuadrada se tendrá

$$\text{sen.} A = \text{sen.} a \frac{\sqrt{1 - \cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos.^2 c + 2 \cos. a \cos. b \cos. c}}{\text{sen.} a \text{ sen.} b \text{ sen.} c}.$$

Representando por  $F$  la fraccion que multiplica á  $\text{sen.} a$ , y haciendo operaciones análogas con las otras dos ecuaciones (M)

se tendrá  $\text{sen. } A = F \times \text{sen. } a$ ,  $\text{sen. } B = F \times \text{sen. } b$ ,  $\text{sen. } C = F \times \text{sen. } c$ ;  
que dan  $\text{sen. } A : \text{sen. } B : \text{sen. } C :: \text{sen. } a : \text{sen. } b : \text{sen. } c$ ; que es la ana-  
lojía general de los triángulos esféricos, y se enuncia: *los senos*  
*de los ángulos son como los senos de los lados opuestos.*

476 Despejando los cosenos de los ángulos en las ecuaciones (M),

$$\text{se tendrá } \cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}, \quad \cos. B = \frac{\cos. b - \cos. a \cos. c}{\text{sen. } a \text{ sen. } c},$$

$$\cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{\text{sen. } a \text{ sen. } b};$$

que sirven para determinar un ángulo cuando se conocen los tres  
lados del triángulo: Mas para hallar el ángulo  $A$ , v. g. sería me-  
nester calcular separadamente por logaritmos los términos  $\cos. a$   
y  $\cos. b \cos. c$ , hallar los números á que correspondían, restar es-  
tos, y despues hallar el logaritmo de la diferencia, y de él restar  
el logaritmo de  $\text{sen. } b \text{ sen. } c$ , y esta última diferencia sería el lo-  
garitmo de  $\cos. A$ ; y como esta operacion sería muy embarazosa  
en la práctica, se han transformado dichas ecuaciones, hasta el  
punto de quedar resueltos en factores los segundos miembros, en  
esta forma:

$$\text{sen. } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2} (a+b-c) \text{sen. } \frac{1}{2} (a+c-b)}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}},$$

$$\text{sen. } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2} (a+b-c) \text{sen. } \frac{1}{2} (b+c-a)}{\text{sen. } a \text{ sen. } c}},$$

$$\text{sen. } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2} (b+c-a) \text{sen. } \frac{1}{2} (a+c-b)}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}},$$

cuyas fórmulas sirven para el mismo objeto, y se les puede apli-  
car inmediatamente el cálculo logarítmico.



# GEOMETRÍA PRÁCTICA.



Ó APLICACION DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL Á  
LAS DIFERENTES OPERACIONES QUE SE EJECUTAN  
EN EL TERRENO.

## De la nivelacion.

477 **S**E llama *nivelacion* la operacion que enseña á determinar lo que un punto está mas ó ménos distante que otro del centro de la Tierra. Para proceder con acierto en lo que vamos á esponer, debe saberse: que la Tierra, que hasta estos últimos tiempos se había tenido por esférica, se ha encontrado que tiene la figura de una naranja, esto es, aplanada hácia los polos, y prolongada hácia el ecuador; este aplanamiento no influye nada en las operaciones ordinarias, y por lo mismo supondremos que la Tierra es esférica como se ve (fig. 152). Los puntos A, B, son los *polos*, la línea AB, se llama el *eje* de la Tierra; y la línea CD el *diámetro*; todo círculo máximo, que pasa por los polos, se llama *meridiano* de la Tierra; y el círculo máximo perpendicular al meridiano, se llama *ecuador*. El *horizonte* de un parage ó sitio es el plano tangente á la superficie de la Tierra, cuyo punto de contacto es el lugar mismo del observador; *línea horizontal* es cualquier recta que se halla en este plano; *línea vertical* es la prolongacion del radio terrestre perpendicular al horizonte; un hilo de cuyo extremo cuelga un cuerpo cualquiera, señala la direccion vertical.

478 Esto supuesto, todos los puntos de la superficie de las aguas, cuando se hallan en quietud, ó en general

dos ó mas puntos equidistantes del centro de la Tierra, están á un mismo nivel, ó están en el nivel verdadero; tales son los A, R, D, etc.; y tambien lo están los P, Q y M, N, equidistantes del punto de contacto A de la horizontal MN. Los puntos que como A, Q, N, etc., están en una recta, distan desigualmente del centro O, se dice que están en el nivel aparente; por lo cual la línea horizontal AN, se llama *línea de nivel aparente*; y la circunferencia terrestre ADBC, ó cualquiera otra concéntrica con ella, se llama *línea de nivel verdadero*. Así, los puntos A, Q, están en el nivel aparente; los A, R, en el verdadero; y la parte QR del radio OR prolongado hasta Q, es lo que se llama *diferencia del nivel aparente al verdadero*. Cuando se hacen nivelaciones grandes y de importancia conviene tener en consideracion esta diferencia.

479 En este compendio omitimos la descripción de los instrumentos con que se ejecutan las operaciones, tanto porque con sola la esplicacion sin tenerlos á la vista, es imposible formar una idea de ellos, como porque su presencia y cuatro palabras del Profesor aprovechan mas que diez hojas de esplicacion. No obstante, en el Tratado Elemental se halla la esplicacion de cada uno y la figura que le representa; y así, suponiendo que se tienen, decimos que para nivelar una piedra, una mesa, un plano de cualquier instrumento, máquina, etc. se emplea el *nivel de albañil ó el de aire*.

480 Para nivelar puntos que no disten demasiado, se emplea el *nivel de agua*; y si la nivelacion ha de ser muy grande, se usan *niveles de aire* con pínulas ó anteojo.

Cuando para averiguar la diferencia de nivel entre dos puntos, solo se coloca el nivel en un paraje, se llama *nivelacion simple*; y cuando en dos ó mas, *nivelacion compuesta*.

Si se quiere hallar la diferencia de nivel entre los dos puntos C y D (fig. 153), se colocará el nivel en B, sobre poco mas ó ménos á igual distancia de C y D, y en línea recta con ellos, se echará agua en el nivel, y clavando dos miras verticalmente en C, y D, se dirigirá la visual por los puntos M, N de la superficie del agua, haciendo que otro suba ó baje la tablilla de la mira, hasta que dicha visual vaya á parar á la línea que separa lo blanco de lo negro, con lo cual los puntos E, F serán dos puntos de nivel verdadero. Ahora, midiendo con una vara dividida en pulgadas y líneas, ó mejor en pies y decimales de pie,

las alturas  $CE$ ,  $DE$ , y restándolas, el residuo será la diferencia de nivel entre  $C$  y  $D$ , estando mas alto el punto  $C$ , cuya altura  $CE$  se ha encontrado menor.

*Esc.* Para asegurar mejor la direccion de las visuales, suelen tener las tablillas de las miras la forma que representa la (fig. 153\*); esto es, que suelen ser cuadradas ó circulares, con dos líneas ó diámetros que se crucen á ángulos rectos; y entonces el punto de interseccion de dichas líneas es el punto donde se debe dirigir la visual.

481 Si la distancia entre los puntos es muy considerable, se emplea la nivelacion compuesta del modo siguiente. Supongo que se quiere hallar la diferencia de nivel entre los dos puntos  $A$  y  $D$  (fig. 154); lo primero se clava una mira en  $A$ , y se coloca el nivel en  $E$ ; y (para no tener que atender á la diferencia del nivel aparente al verdadero) á igual distancia sobre poco mas ó menos, si se puede, v. g. en  $B$ , se clava otra mira ó estadal: se señalan los puntos  $a$  y  $b$  de nivel, se averiguan las alturas  $Aa$  y  $Bb$ , y se apuntan en un papel. Despues se pasa el nivel á otro punto  $F$ , dejando clavada la mira en  $B$ , y á igual distancia sobre poco mas ó menos se coloca otra mira en  $C$ ; se señalan los puntos de nivel  $e$ ,  $c$ , y se apuntan las alturas  $Be$ ,  $Cc$ . Se pasa el nivel á  $G$ , y con las mismas circunstancias que antes, se averigua el valor de  $Cf$ ,  $Dd$ . Se suman los valores de  $Aa$ ,  $Be$ ,  $Cf$ , que representan las alturas de los primeros términos; se suman igualmente los valores de  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ , que representan las de los segundos; se restan estas dos sumas, y el exceso espresará la diferencia de nivel: estando mas alto el primer término, si la suma de los primeros términos es menor, y el segundo, si la de estos lo es.

*De la medicion de las líneas.*

---

482 Para ejecutar cualquier operacion, es necesario primero medir una línea auxiliar que se llama *base*. Los instrumentos que ordinariamente se emplean, son: una cadena ó cuerda de 100 pies (ó menos), jalones, piquetes y un mazo.

Así, si se quiere medir la distancia de  $A$  á  $E$  (fig. 455), se colocarán los jalones  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , en los puntos intermedios, de manera que mirando desde  $A$  á  $E$  queden todos cubiertos; despues de estar alineada ya la recta, se empieza la medicion con la cadena ó cuerda, procurando

que esté bien tirante; y segun las veces que se coloque se deducirá el número de pies de que consta la línea dada.

483 Con solo la cadena y los jalones se pueden resolver varios problemas.

1.<sup>o</sup> *Formar un ángulo recto, ó tirar una perpendicular á una línea dada.*

*Res. y Dem.* Tómense 12 pies ó unidades en la cadena; con los lados 3, 4 y 5, en que se descompone el 12, fórmese un triángulo, y el ángulo comprendido por los lados 3 y 4 será el ángulo recto pedido, y por consiguiente el un lado perpendicular al otro. Porque valiendo los lados del triángulo 3, 4 y 5, se tiene  $3^2 + 4^2 = 5^2$ ; luego el triángulo que se ha construido (335 esc. 2.<sup>o</sup>) es rectángulo.

*Esc.* Si se pidiese un ángulo de sesenta grados, se formaría un triángulo equilátero.

484 Cuando se han de tirar muchas perpendiculares como sucede cuando hay que medir algun terreno, ó se va á trazar un campamento, se lleva el aparato que se llama *cuerda de perpendiculares*, y consiste en un triángulo isósceles (fig. 156) ó equilátero con el cordel CE que divide en dos partes iguales la base AB y señala la direccion de la perpendicular.

Para hacer uso de ella se aplica la base AB sobre la línea á que se ha de tirar la perpendicular, de modo que el punto E caiga sobre el punto de la línea en que se ha de levantar; y tirando del extremo M la cuerda EM, se tendrá la perpendicular pedida.

Si este aparato se hiciese de madera fuerte, se podría llamar *escuadra doble*, y serviría con mucha utilidad tanto para tirar perpendiculares en puntos de líneas dadas, como para tirarlas desde puntos dados fuera de ellas.

485 2.<sup>o</sup> *Medir una línea inaccesible.*

*Res. y Dem.* Sea AB (fig. 157) la línea inaccesible, á causa del rio que la atraviesa; levántese en su extremo B una perpendicular BC; divídase en dos partes iguales en H, y clávese en este punto un piquete, levántese en L la perpendicular indefinida LD; búsquese el punto D, desde el cual tirando una visual por H vaya á parar al punto A, y la línea LD será igual á la distancia AB que se pedia.

Porque los triángulos ABH, HLD, son rectángulos en B y L, y tienen BH=HL por construccion, y los ángulos en H

iguales por opuestos al vértice; luego estos triángulos son iguales, y dan  $AB=LD$ .

486. También se pueden medir las alturas accesibles é inaccesibles por su pie. Así, si se quiere medir la torre  $AB$  (fig. 158), se plantará bien verticalmente un jalón  $EC$ ; á alguna distancia de este jalón, se plantará otro  $DF$  de manera que se pueda ver el extremo  $A$  de la torre por un rayo visual  $FEA$  que rase con el extremo del piquete. Mírese también un punto de la torre tal como  $G$ , por un rayo visual  $FG$  que pase por  $H$ , de manera que  $CH=DF$ .

Hecho esto, si se concibe la  $FG$ , será paralela é igual á la  $DB$ , y se tendrán los dos triángulos semejantes  $AGF$ ,  $EHF$ , que dan  $FH:HE::FG:AG$ ; y como los tres primeros términos de esta proporción son conocidos, porque se pueden medir, se sigue que si al cuarto  $AG$  se añade la parte  $GB$  que está debajo de la línea  $GF$ , que también se puede medir, se tendrá la altura  $AB$  de la torre ó de cualquier otro objeto.

*Esc.* Si la torre fuese inaccesible por su pie, se mediría primero, por el método anterior, la distancia inaccesible  $BC$  ó  $BD$ , y se ejecutaría lo demás como se acaba de manifestar.

#### De la medición de los ángulos.

487 Para medir los ángulos sirven muchos instrumentos, á saber, la *plancheta*, *grafómetro*, *brújula*, *teodolito*, *cuadrantes del círculo*, *círculos repetidores*, y *recipíangulos* (\*). En el papel se trazan y miden los ángulos con un semicírculo  $ACB$  graduado (fig. 159), que se coloca de modo que el centro  $O$  caiga en el vértice del ángulo, y sobre uno de los lados el diámetro del mismo círculo. De manera, que si, colocado sobre el ángulo  $BOD$ , hallamos que  $OD$  cae sobre la línea que señala  $45^\circ$ , diremos que este es el valor de dicho ángulo. Para que en uno de estos semicírculos se pudiesen trazar medios gra-

---

(\*) D. Fernando Boccherini, Catedrático de Matemáticas en el Instituto de Santander, y Académico corresponsal de la de Ciencias Naturales de Madrid, ha presentado á la Sociedad Económica Matritense unas investigaciones de mucha importancia acerca de la medición de los ángulos, y la descripción del instrumento que ha inventado con este objeto, y que denomina *cuadruplicador de ángulos*, del cual se hace mención honorífica en la *Gaceta* de 25 de agosto de 1839.

dos, se necesitaria que fuese de un radio bastante grande; y si se quisiesen trazar hasta minutos, sería muy embarazoso el uso del instrumento. Para evitar esto se ha ideado un medio sencillo, para obtener los ángulos con instrumentos de una regular magnitud.

488 Para esplicarle, sea ACB (fig. 160) el borde ó el *limbo* de un instrumento, que esté dividido en partes que se distinguan bien, v. g. en grados; tómese un número cualquiera de grados en el limbo, v. g.  $9^{\circ}$ ; tómese ahora otra pieza del mismo metal que el instrumento y de una magnitud igual á la de los  $9^{\circ}$  que se tomaron, la cual se dividirá en 10 partes iguales, esto es, en una mas que las que se tomaron en el instrumento; de consiguiente, cada espacio de esta pieza (que es lo que se llama *núñez*) vale  $\frac{9}{10}$  de grado ó 54 minutos; y la diferencia de una division del *núñez* á una del *limbo*, ó á un grado, valdrá  $6'$ . La pieza donde está el *núñez* se aplica sobre el limbo, y gira al rededor del centro del instrumento (ó al contrario, permanece fijo el *núñez* y gira el limbo); la primera division del *núñez* tiene por lo regular una *flor de lis*, y se llama *línea de fé*; esta se hace que coincida con la division  $0^{\circ}$  ó  $180^{\circ}$  en general, ó sobre otra graduacion cualquiera del limbo; y la magnitud de un ángulo se aprecia por lo que se separa la *línea de fé* de dicha graduacion. Ahora, si la *línea de fé* coincide exactamente con una division del limbo, el valor del ángulo será el número de grados comprendido desde cero hasta dicha *línea*; pero si la *línea de fé* cae entre dos divisiones del limbo, el ángulo pedido valdrá un cierto número de grados, y una parte de grado que se valúa por la regla siguiente: véase la division del *núñez* que mas coincide con una del limbo; cuéntense los espacios del *núñez* desde la *línea de fé* hasta la que coincide con la del limbo; multiplíquese el número de espacios hallado por la diferencia  $6'$  (en nuestro caso, ó por lo que valga segun otra division) que hay entre el espacio del limbo y el del *núñez*; y el producto serán los minutos que se deberán añadir al número de grados hallado.

Con un ejemplo se entenderá bien esta regla y su demostracion. En efecto, si se quiere averiguar el valor del ángulo AOG, este valdrá el número de grados del lim-

bo comprendido desde A hasta  $m$  (que aquí son 3), y además la parte  $mG$ ; ahora, la línea del núñez que mas concurre con la del limbo, es la que pasa por B; y multiplicando los seis espacios del núñez que hay desde OG hasta B por  $6'$ , el producto  $36'$  serán los que se deben añadir á los  $3^o$  hallados; por lo que, el ángulo AOG vale  $3^o 36'$ . Porque si la línea del núñez que coincide con la del limbo fuese la primera de aquel, el espacio  $mG$  valdría una vez la diferencia de los espacios del limbo y del núñez, esto es,  $6'$ ; si fuese la segunda, el dicho espacio valdría  $12'$  ó  $2 \times 6'$ ; si fuese la tercera valdría  $18'$  ó  $3 \times 6'$ , y así sucesivamente; luego siendo la sexta, el espacio  $mG$  valdrá  $6 \times 6' = 36'$ . L. Q. D. D. (\*)

489 Para averiguar los ángulos que forman entre sí tres puntos que se hallan sobre el terreno, se emplea generalmente la plancheta (fig. 161); sobre el tablero se estienda un pliego de papel, se señala el punto A adonde corresponde el vértice Q del ángulo del terreno; por las cerdas  $t$ , de la regla FG que se llama *alidada*, se dirigen visuales á los otros puntos C y B, y estas visuales se señalan con un lapicero sobre el papel, donde queda formado el ángulo  $bAe$ , igual al que forman los tres puntos B, Q, C del terreno; y midiendo este ángulo con el semicírculo, se tendrá el que se deseaba sobre el terreno.

490 Por lo regular, lo que se intenta buscar es el ángulo que forman dichos objetos, suponiéndolos proyectados en un plano horizontal que pase por el vértice; entonces es esencial que se coloque el tablero en una situación horizontal por medio de los niveles; y como en este caso puede ocurrir el que los objetos B y C no se vean por el espacio que ocupan las cerdas, es preferible á la alidada un anteojito A (fig. 162), el cual además de tener la circunstancia de poder bajar y subir la puntería cuanto se necesite, reúne la ventaja de distinguir los objetos con claridad y á mayor distancia.

---

(.) Don Ramon Fernandez Reguero, Catedrático de Agricultura en el Seminario de la Vega de Rivadeo, ha inventado un nuevo *Núñez* sumamente ingenioso que se ha presentado á la Sociedad Económica Matritense; y aunque no tiene todo el grado de rigor matemático, da los resultados con tal aproximacion, que en varios casos de la práctica puede ser útil é importante.

491 Otro de los instrumentos que sirven para medir los ángulos es la brújula (fig. 163).

Su construcción y uso estriban en que las agujas tocadas á lo que se llama *pedra iman*, se dirigen hácia el norte; y si colocada en un paraje se mira á un objeto cualquiera, y se vé el ángulo que forma la aguja NS con la línea AB; y luego se mira á otro objeto y se determina el mismo ángulo, la diferencia entre estos dos ángulos observados, será el ángulo que forman dichos objetos, si la aguja ha permanecido en ambos casos á un mismo lado de la línea AB.

Si al enfilar el otro objeto, la aguja pasase al otro lado de la línea AB, el ángulo buscado estaría representado por la suma de los dos observados.

492 De todos los instrumentos que se han inventado para las operaciones que se ejecutan sobre el terreno, y que se caracterizan generalmente con el nombre de *geodésicas*, los mas á propósito son el teodolito, y el círculo repetidor de Bordá.

La primera operacion, que se practica, es nivelar el teodolito, y tiene la ventaja de dar á un mismo tiempo y con un solo anteojo (aunque algunos tienen dos), los ángulos horizontales y de elevacion.

493 Como la division de los instrumentos no puede llegar al grado de exactitud del cálculo, y que se requiere en algunas ocasiones, se ha ideado el círculo repetidor, el cual tiene la propiedad de que en vez del ángulo que se quiere averiguar, se puede tomar el duplo, el triplo, el cuádruplo, etc., y dividiendo despues por 2, por 3, por 4, etc., se tendrá el ángulo pedido con la mitad, tercera, cuarta, etc., parte del error que se debe sospechar en el instrumento.

*Medir alturas y distancias accesibles é inaccesibles, y modo de levantar los planos topográficos.*

494 Cuando se puede uno acercar al pie de una altura AB (fig. 164), y en su plano se puede medir una base, se elije de esta manera que sea sobre poco mas ó menos igual con la altura por medir; se coloca el ins-

trumento en su extremo, y con él se mide el ángulo de elevacion AFG; con lo cual el rayo visual AF, el horizontal GF, y la parte AG de la altura, formarán un triángulo rectángulo, en que se conoce ademas del ángulo recto en G, uno de los ángulos agudos, y el cateto FG que es igual con la base medida BD; luego (465) hallaremos el lado AG, diciendo  $R:\text{tang. AFG}::GF=BD:AG$ ; y añadiendo á esto la parte BG, se tendrá toda la altura AB.

495 Cuando hay algun obstáculo que impida el acercarse al pie como en la (fig. 165), y se puede medir sin embargo una base AB en el plano de su pie, se procede del modo siguiente: colocado el instrumento en A, se toma el ángulo de elevacion CAD; y colocado en B el ángulo CBA; con lo cual tenemos en primer lugar un triángulo CAB; en que conocemos el ángulo en B y el lado AB, porque los hemos medido, y el ángulo CAB por ser suplemento del medido CAD, y en virtud de lo dicho (470) hallaremos el lado CA. Conocido este, queda determinado en el triángulo rectángulo CAD la hipotenusa y un ángulo, y podremos hallar (466) el cateto CD, que es la altura que deseamos.

496 Muchas veces no se sabe si la base está ó no en el mismo plano del pie de la altura, y aun sucede que no se ve el pie de la altura por medir: en este caso es un poco mas complicada la operacion.

Supongamos que se quiera medir la altura inaccesible CD (fig. 166); mediremos donde el terreno lo permita una base AB; en el extremo A se colocará el instrumento, y se tomará el ángulo horizontal BAD y el vertical CAD; colocando en el otro extremo B el instrumento, se tomará el ángulo horizontal DBA, y el vertical CBD. Hecho esto, el triángulo DAB nos dará (470) el valor de uno cualquiera de los lados, tal como AD; con lo cual en el triángulo rectángulo CAD se conocerá el cateto AD, y el ángulo CAD; luego (465) nos dará el valor de CD, que es lo que se pedia.

497 Cuando la distancia que se intenta medir es accesible, se ejecuta conforme hemos dicho se mide una base; cuando solo es accesible por uno de sus extremos, se procederá del modo siguiente.

Supongamos que sea la  $BC$  (fig. 167) la línea que se quiera medir; en este caso se medirá una base  $CA$  desde el extremo accesible  $C$ , y en sus extremos mediremos los ángulos  $BCA$ ,  $CAB$ , y la Trigonometría (470) nos dará el lado  $BC$ . Para hacer esta operación con la plancheta, se coloca este instrumento de manera que su centro corresponda sobre el punto  $C$  del terreno; despues se tira en el papel una línea  $ca$  en la dirección de la base, de una magnitud tal que contenga tantas partes de una escala cualquiera, como veces está contenida la unidad de medida en la base  $CA$ ; despues se dirige la visual por  $C$  al punto  $B$ , y se tira la  $cb$  indefinida; despues se pone el instrumento en  $A$ , y colocado el tablero de modo que la base  $ca$  se halle en la dirección  $AC$  de la base medida, se dirige la visual al punto  $B$ , se tira la  $ab$ , y el número de partes que  $cb$  contenga en la misma escala, será el número de unidades que contenga la  $BC$  de la medida con que se midió la base  $CA$ .

498 Si la distancia  $CD$  (fig. 168) es de todo punto inaccesible, mediremos una base  $AB$  que sea próximamente paralela é igual con la distancia por medir  $CD$ . En  $A$  tomaremos los ángulos  $CAB$ ,  $DAB$ , y pasando el instrumento á  $B$  tomaremos los ángulos  $CBA$ ,  $DBA$ , y tendremos conocido en el triángulo  $CAB$  el lado  $AB$  y los ángulos adyacentes; luego la Trigonometría (470) dará el valor del lado  $AC$ . En el triángulo  $DAB$  se conoce igualmente el lado  $AB$  y los ángulos adyacentes; luego podremos hallar el valor del lado  $AD$ . Ahora, en el triángulo  $CAD$  tenemos conocidos los lados  $CA$ ,  $AD$ , por lo que acabamos de decir, y el ángulo  $CAD$  que forman, por ser la diferencia entre los dos ángulos observados  $CAB$ ,  $DAB$ ; luego la Trigonometría (469) dará la distancia  $CD$  que buscábamos.

499 Para hacer esta operación con la plancheta, se coloca el instrumento en uno de los extremos de la base, tal como  $A$ , y despues de tirada la  $ab$  en la dirección de ella, se dirigen las visuales á los puntos  $C$ ,  $D$ , y se tiran en el papel las  $ac$ ,  $ad$ ; despues se pasa el instrumento á  $B$  y se tiran las  $bc$ ,  $bd$ , en la dirección de las visuales dirigidas á los puntos  $C$  y  $D$ ; y tomando con un com-

pas la distancia  $cd$ , y averiguando su valor en la misma escala en que se tomaron las partes de  $ab$ , que espresaban las unidades de medida de  $AB$ , se tendrá el número de unidades que contiene la  $CD$ .

500 Se da el nombre de *mapa ó plano topográfico* al dibujo en que están representados todos los objetos de un país de corta estension. Para manifestar cómo se consigue esto, supondremos que se nos dé un terreno, en el que se hallan los objetos  $C, D, E, F, G, H, K, L$  (fig. 169), y que se quiere sacar un dibujo en que los objetos guarden la misma posicion que tienen en el terreno.

Para esto, lo primero que se ejecuta es medir una base  $AB$ , desde cuyos extremos se vea el mayor número de objetos posible; se colocará el instrumento en  $A$ , y se dirigirán visuales á los puntos  $C, D, E, F$ , etc., que se ven desde ambos extremos de la base; se pasará el instrumento á  $B$ , y se dirigirán visuales á los mismos objetos; y tendremos que si el instrumento era la plancheta, el concurso de las visuales en el papel determinará los objetos; y si no lo es, en los extremos  $a$  y  $b$  de una línea  $ab$ , de la misma magnitud que la base medida, se forman con un semicírculo, los ángulos  $cab, dab$ , etc., del mismo número de grados que los ángulos observados  $CAB, DAB$ , etc., con lo cual los lados de estos ángulos prolongados determinarán por su concurso los puntos  $c, d$ , etc. Tambien se pudieran calcular por trigonometría los lados  $ac, ad$ , etc. pero esto es mas complicado.

Para fijar la posicion de los puntos  $K, H, L$ , que no se ven desde ambos extremos de la base  $AB$ , se elige una nueva base que se procura tenga sus extremos en dos puntos fijos ya, y con relacion á esta base se fijan los demas. Aquí, para fijar el  $K$  elejiremos por nueva base la distancia  $FG$ , y colocando en sus extremos el instrumento, mediremos los ángulos  $KFG, KGF$ , que nos fijarán la posicion del punto  $K$ . Para fijar los puntos  $H, L$ , elejiremos por base la  $EF$ , y así se continuaría si quedasen mas puntos por determinar.

FIN DEL TOMO PRIMERO.

# ÍNDICE

de las materias contenidas en este tomo.

	Págs.
<b>P</b> RÓLOGO . . . . .	III
<b>I</b> NTRODUCCION . . . . .	XIII
<b>A</b> RITMÉTICA. <i>Nociones preliminares, numeracion, division y subdivision de las unidades de pesas y medidas.</i>	1
<i>De la operacion de sumar ó de la adiccion.</i> . . . .	12
<i>De la operacion de restar ó de la sustraccion.</i> . . . .	16
<i>De la multiplicacion.</i> . . . . .	19
<i>De la division.</i> . . . . .	29
<i>De las pruebas.</i> . . . . .	44
<i>Consecuencias importantes de las operaciones esplicadas.</i>	id.
<i>De los quebrados ó fracciones; de su expresion, reduccion á un comun denominador, y simplificacion.</i> . . . .	47
<i>Sumar, restar, multiplicar y dividir quebrados.</i> . . . .	53
<i>De la valuacion de los quebrados.</i> . . . . .	60
<i>De los quebrados ó fracciones decimales.</i> . . . . .	61
<i>Sumar, restar, multiplicar y dividir decimales.</i> . . . .	66
<i>Sumar, restar, multiplicar y dividir números denominados.</i>	78
<b>Á</b> LGEBRA. <i>Nociones preliminares.</i> . . . . .	86
<i>De la suma de las cantidades algebraicas.</i> . . . . .	93
<i>De la operacion de restar cantidades algebraicas.</i> . . . .	94
<i>De la multiplicacion algebraica.</i> . . . . .	95
<i>De la division algebraica.</i> . . . . .	98
<i>De los quebrados literales.</i> . . . . .	105
<i>De la elevacion á potencias y extraccion de raices de los monomios.</i> . . . . .	107
<i>De las expresiones imaginarias.</i> . . . . .	113
<b>S</b> EGUNDA PARTE DEL <b>Á</b> LGEBRA. <i>De la análisis algebraica, y resolucion de las ecuaciones de primer grado.</i> . . . .	116
<i>De la elevacion al cuadrado de los polinomios, y extraccion de la raiz cuadrada de las cantidades numéricas.</i>	137
<i>De la formacion de las potencias en general</i> . . . . .	143
<i>De las ecuaciones determinadas de segundo grado.</i> . . . .	144
<i>Idéas generales acerca de la resolucion de las ecuaciones superiores al segundo grado.</i> . . . . .	150
<i>De las razones y proporciones.</i> . . . . .	168

<i>De las transformaciones que se pueden dar á una proporcion, sin que deje de subsistir proporcion.</i> . . . . .	175
<i>De la regla de tres y de compañía.</i> . . . . .	184
<i>De las reglas de falsa posicion y de las importantisimas aplicaciones que su doctrina nos ha sujerido, proporcionándonos encontrar un nuevo método general y seguro, para resolver no solamente las cuestiones mas dificiles, sino las ecuaciones numéricas de todos los grados, que se resisten á cuantos procedimientos analíticos se han inventado hasta el dia, incluso los que suministra el Cálculo Infinitesimal.</i> . . . . .	191
<i>Regla general para la resolucion de toda clase de ecuaciones numéricas por este nuevo método.</i> . . . . .	209
<i>Resolucion de las ecuaciones de tercer grado.</i> . . . .	229
<i>Resolucion de las ecuaciones de cuarto grado.</i> . . . .	249
<i>Resolucion de las ecuaciones de quinto grado.</i> . . . .	257
<i>Resolucion de las ecuaciones numéricas superiores al quinto grado.</i> . . . . .	259
<i>De las progresines aritméticas y geométricas.</i> . . . .	290
<i>De los logaritmos.</i> . . . . .	299
<i>Aplicacion de los logaritmos á la estraccion de las raices, y á la resolucion de las ecuaciones esponenciales.</i> . . . .	311
<i>De las ecuaciones indeterminadas de primer grado.</i> . . . .	313
<i>De las permutaciones y combinaciones.</i> . . . . .	327
<i>Proposiciones importantes acerca de las cantidades constantes y variables, y de los limites.</i> . . . . .	336
<b>GEOMETRÍA. Nociones preliminares.</b> . . . . .	346
<i>De las paralelas</i> . . . . .	371
<i>Del circulo y de las rectas consideradas en él.</i> . . . .	386
<i>De los ángulos considerados en el circulo.</i> . . . . .	390
<i>De las figuras en general, y propiedades de los cuadriláteros.</i> . . . . .	396
<i>De los poligonos.</i> . . . . .	399
<i>De las lineas proporcionales.</i> . . . . .	403
<i>De la semejanza de las figuras.</i> . . . . .	409
<b>SEGUNDA PARTE. De la estension en longitud y latitud, ó de las superficies.</b> . . . . .	426
<i>De la reduccion de las superficies.</i> . . . . .	437
<i>De los planos, de su posicion, y de los ángulos sólidos.</i> . . . .	id.
<b>TERCERA PARTE. De los prismas, y medicion de sus superficies y volúmenes.</b> . . . . .	451
<i>De la pirámide, y medicion de su superficie y volumen.</i> . . . .	461
<i>De los poliedros regulares, ó de los cinco cuerpos regulares.</i> . . . .	466

	<i>Págs.</i>
<i>De los tres cuerpos redondos.</i> . . . . .	467
TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA. . . . .	483
<i>Resolucion de los triángulos rectángulos.</i> . . . . .	499
<i>Resolucion de los triángulos oblicuángulos.</i> . . . . .	502
<i>Idea general de la resolucion de los triángulos esféricos</i>	508
GEOMETRÍA PRÁCTICA. <i>De la nivelacion.</i> . . . . .	511
<i>De la medicion de las lineas.</i> . . . . .	513
<i>De la medicion de los ángulos.</i> . . . . .	515
<i>Medir alturas y distancias accesibles é inaccesibles, y modo de levantar los planos topográficos.</i> . . . . .	518

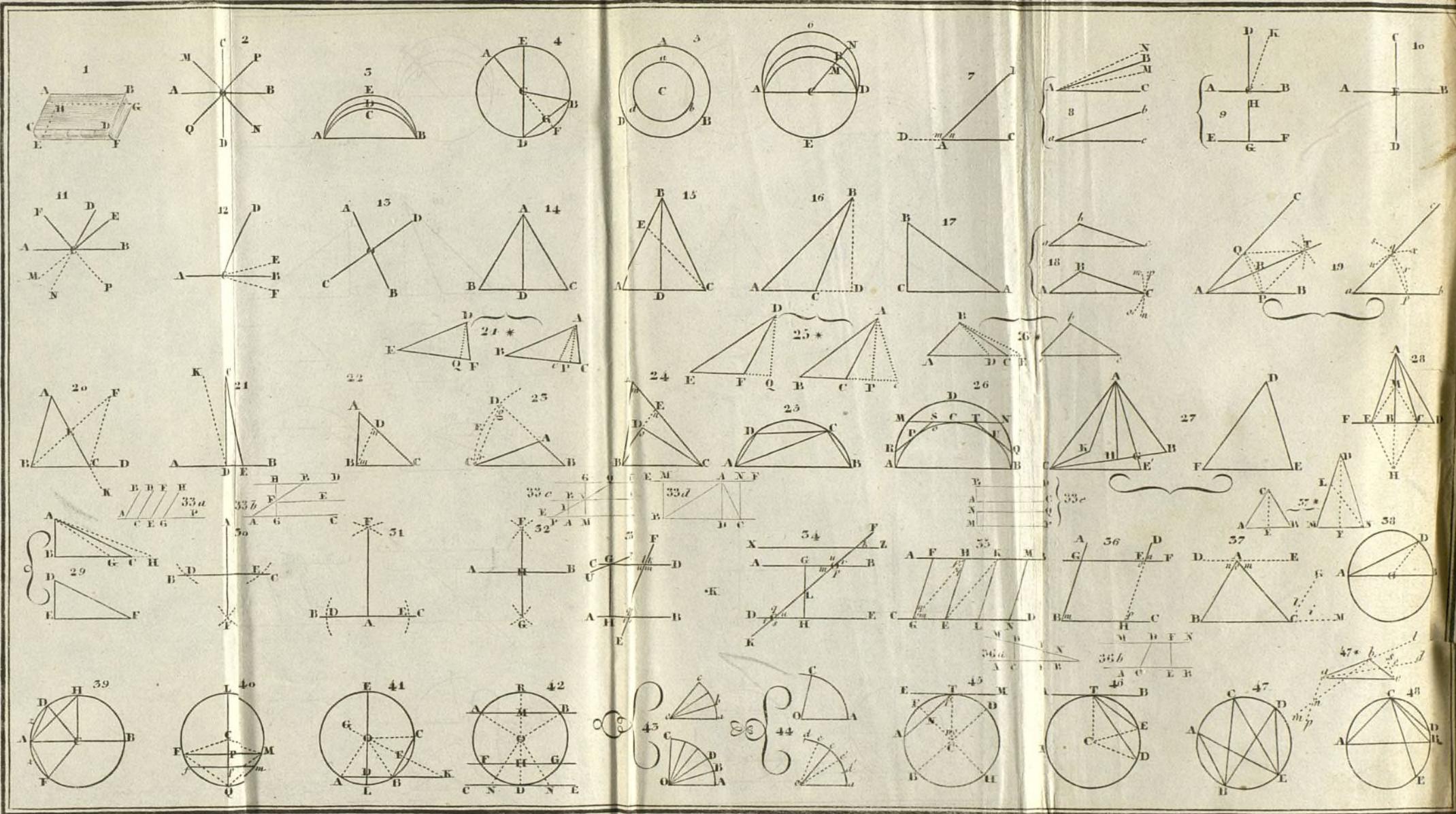
### ERRATAS.

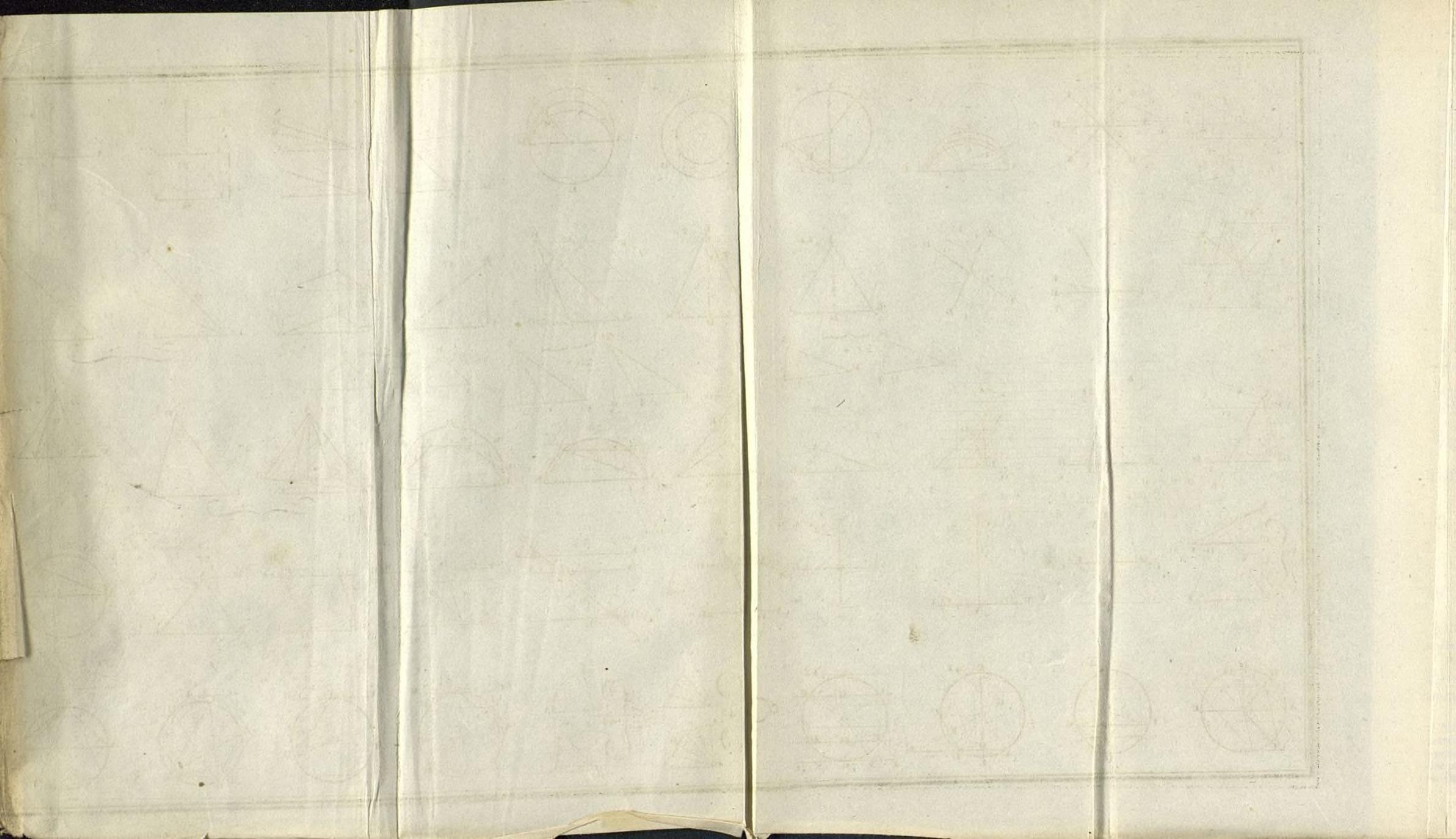
<i>Página.</i>	<i>Línea.</i>	<i>Dice.</i>	<i>Debe decir.</i>
25. . . . .	29 . . . . .	alterando. . . . .	altera.
39. . . . .	el divisor del	1. <sup>er</sup> ejemplo debe ser	8.
47. . . . .	12 . . . . .	manzama. . . . .	manzana.
86. . . . .	3 por abajo. .	enalogía . . . . .	analogía.
130. . . . .	8 de la nota .	$z = \frac{ac' - a'c}{ab' - ba}$ y debe ser	$z = \frac{ac' - a'c}{ab' - ba'}$ .
id . . . . .	3 por abajo de la nota	$z = \frac{8 \times 177 - 33 \times 6}{8 \times 35 + 21 \times 9}$ y le-	be ser $z = \frac{8 \times 177 - 33 \times 6}{8 \times 35 + 21 \times 6}$ .
191. . . . .	8 por abajo. .	cabamos. . . . .	acabamos.

ERRATA importante de la *Esplificacion del sistema decimal ó métrico francés.*

Pág. 5. En la respuesta á la pregunta quinta se dice "La *Litra* que es un centímetro cúbico," y debe decir, "que es un decímetro cúbico."

NOTA. Don Isaac Villanueva, Catedrático de Delineación en el Conservatorio de Artes, construye colecciones de modelos para los fines expresados en la nota del (§ 367) de este tomo; y al entrar este pliego en prensa me consta que está ejecutando con mucho primor el de la (figura 68) del T. II P. I del T. E.





## FINANZAS

	Lugar	Día	Descripción
--	-------	-----	-------------

23		1878	
----	--	------	--

	de dinero del Sr. Juan...		
--	---------------------------	--	--

24			
----	--	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--

	por el Sr. Juan...		
--	--------------------	--	--



